

یک روش هم‌مکانی مبتنی بر پایه‌های برنولی-هایپربولیک برای حل معادله‌ی دیفرانسیل کسری جریان الکتروهیدرودینامیک در یک مجرای استوانه‌ای

پریسا رحیم‌خانی¹، استادیار، الهام کشاورز هدایتی^{2*}، استادیار

¹گروه علوم کامپیوتر - مرکز آموزش عالی محلات - محلات - ایران - rahimkhani.parisa@mahallat.ac.ir

²گروه آموزش ریاضی - دانشگاه فرهنگیان - صندوق پستی 889-14665 - تهران - ایران - e.keshavarz@cfu.ac.ir

چکیده: پژوهش حاضر یک روش عددی کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل کسری حاکم بر جریان‌های الکتروهیدرودینامیک ارائه می‌دهد. این روش بر ترکیب مؤثری از پایه‌های چندجمله‌ای برنولی و توابع سینوس هایپربولیک، استوار است. در این راستا، یک روش هم‌مکانی توسعه داده شده که از پایه‌های ترکیبی برنولی-هایپربولیک برای تقریب‌زدن بهره می‌برد. ابتدا، بالاترین مرتبه مشتق کسری موجود در معادله، از طریق یک بسط مبتنی بر چندجمله‌ای‌های برنولی مرتبه کسری و تابع سینوس هایپربولیک تقریب زده می‌شود. سپس، با به‌کارگیری اپراتور انتگرال کسری ریمان-لیوویل و اعمال شرایط مرزی مسئله، تقریب‌هایی برای تابع جواب و همچنین مشتقات کسری مرتبه پایین‌تر آن استخراج می‌گردد. در نهایت، با تشکیل تابع باقیمانده و هم‌مکانی آن در گره‌های ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر انتقال‌یافته، یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل می‌آید که با استفاده از الگوریتم نیوتن حل شده و جواب عددی مسئله به دست می‌آید. همچنین، تحلیل همگرایی روش ارائه شده و نتایج ارزیابی نشان می‌دهد روش پیشنهادی با تعداد اندکی نقاط هم‌مکانی به دقت بالایی دست می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، جریان الکتروهیدرودینامیک، روش هم‌مکانی، پایه‌های برنولی-هایپربولیک، انتگرال کسری ریمان-لیوویل، مشتق کسری کاپوتو، همگرایی.

A collocation method based on Bernoulli-hyperbolic functions for solving the fractional electrohydrodynamic flow differential equation in a cylindrical conduit

Parisa Rahimkhani¹, Assistant professor, Elham Keshavarz Hedayati^{2*}, Assistant professor

¹ Faculty of Science, Mahallat Institute of Higher Education, Mahallat, Iran, rahimkhani.parisa@mahallat.ac.ir

² Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 14665-889, Tehran, Iran, e.keshavarz@cfu.ac.ir

Abstract: The present study introduces an efficient numerical method for solving fractional differential equations governing electrohydrodynamic flows. This method relies on an effective combination of Bernoulli polynomial bases and hyperbolic sine functions. To this end, a collocation method has been developed that utilizes these combined Bernoulli-hyperbolic bases for approximation. First, the highest-order fractional derivative in the equation is approximated using an expansion based on fractional-order Bernoulli polynomials and the hyperbolic sine function. Next, by employing the Riemann–Liouville fractional integral operator and applying the problem's boundary conditions, approximations for the solution function and its lower-order fractional derivatives are derived. Finally, by formulating a residual function and collocating it at the roots of shifted Legendre polynomials, a system of nonlinear algebraic equations is obtained; this system is solved using Newton's algorithm to yield the numerical solution. Additionally, a convergence analysis of the proposed method is presented, and evaluation results demonstrate that the method achieves high accuracy with a small number of collocation points.

Keywords: Fractional differential equations; electrohydrodynamic flow; collocation method; Bernoulli-hyperbolic bases; Riemann-Liouville fractional integral; Caputo fractional derivative; convergence.

* Corresponding author

1. مقدمه

سیستم‌های سیال الکتروهیدرودینامیک (EHD) در سال‌های اخیر، به دلیل کاربردهای گسترده در علوم و مهندسی، توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده‌اند [۱] - [۳]. پدیده‌ی EHD شاخه‌ای میان‌رشته‌ای از فیزیک و مکانیک سیالات است که به بررسی برهم‌کنش میان میدان‌های الکتریکی و حرکت سیال‌های باردار می‌پردازد. در این پدیده، وجود بارهای آزاد یا یونیزاسیون در سیال موجب می‌شود تا میدان الکتریکی نیروهایی را بر ذرات اعمال کرده و در نتیجه، انتقال جرم و تکانه (مقدار حرکت) درون سیال را کنترل نماید [4]. جریان‌های EHD معمولاً به وسیله‌ی میدان‌های الکترواستاتیکی ایجاد می‌شوند که اختلاف پتانسیل الکتریکی در سیالات دی‌الکتریک را سبب شده و منجر به شکل‌گیری گرادیان فشار هیدرواستاتیکی و در نهایت حرکت سیال می‌گردند. چنین فرآیندهایی در سامانه‌های گوناگونی از جمله پمپ‌های یونی و دی‌الکتریک، دستگاه‌های جوهرافشان، فناوری نانوپلیمرها، خنک‌سازی الکتریکی و میکروسیستم‌های سیالی به کار گرفته می‌شوند [5] - [8]. به طور کلی، مطالعه‌ی EHD نقش مهمی در درک رفتار سیالات رسانا یا نیمه‌رسانا در حضور میدان‌های الکتریکی دارد و بنیان تحلیل بسیاری از سامانه‌های هوشمند و میکروسیالی نوین را تشکیل می‌دهد. از این رو، توسعه مدل‌های دقیق و روش‌های عددی کارآمد برای شبیه‌سازی جریان‌های EHD از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

جریان EHD یک سیال در پیکربندی کشش یونی در یک مجرای استوانه‌ای دایره‌ای توسط معادله‌ی زیر ارائه می‌شود [9]، [۱۰]:

$${}^c\mathcal{D}^\nu u(t) + \frac{1}{t} {}^c\mathcal{D}^\beta u(t) + H^2 \left(1 - \frac{u(t)}{1 - \alpha u(t)} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\nu > \beta, 1 < \nu \leq 2, 0 < t < 1$$

با شرایط اولیه:

$$u'(0) = a_1, \quad u(1) = a_2. \quad (2)$$

مشتق کسری به کاررفته در معادله‌ی (1) از نوع کاپوتو است؛ در این تعریف، پارامترهای ν و β بیانگر مرتبه‌ی مشتق‌های کسری کاپوتو هستند. تابع $u(t)$ که مجهول مسئله می‌باشد، بیانگر سرعت سیال است و متغیر t فاصله‌ی شعاعی از مرکز مجرا را نشان می‌دهد. پارامتر H که به عنوان عدد هارتمن الکتریکی شناخته می‌شود، به صورت $H = \sqrt{\frac{I_0 r^2}{\mu \chi^2 E}}$ تعریف می‌گردد. در این رابطه، I_0 چگالی جریان الکتریکی یکنواخت در ورودی، r شعاع مجرا (پیش از بی‌بعدسازی)، χ میزان تحرک یونها، μ ویسکوزیته سیال و E شدت میدان الکتریکی است. شایان ذکر است که با کاهش ویسکوزیته، عدد هارتمن افزایش می‌یابد. همچنین، α به عنوان پارامتر غیرخطی بودن و با رابطه‌ی $\alpha = \frac{\nabla P \chi}{I_0} - 1$ بیان می‌شود که در آن گرادیان فشار در نظر گرفته شده و ثابت فرض شده است.

با وجود گستردگی کاربردهای صنعتی و علمی جریان‌های EHD، معادلات حاکم بر این نوع جریان‌ها ماهیتی غیرخطی و تکین دارند و معمولاً حل تحلیلی برای آن‌ها وجود ندارد. مدل کلاسیک جریان EHD در مجرای استوانه‌ای، شامل عبارت‌های غیرخطی است که رفتار سیال را در حضور پارامترهای میدان الکتریکی و عدد هارتمن توصیف می‌کند [9]، [11]. در این مدل‌ها و بسیاری مدل‌های فیزیکی دیگر، ابتدا فقط از مشتقات مرتبه صحیح (کلاسیک) استفاده می‌شد که به دلیل ماهیت ذاتاً محلی، تنها قادر به توصیف رفتار آنی سیستم در یک لحظه و نقطه خاص بودند. در واقع، این نوع مشتقات به جای در نظر گرفتن کل مسیر طی شده توسط سیستم، تنها به تغییرات در

همسایگی بی‌نهایت کوچک یک نقطه توجه دارند. این رویکرد سنتی توانایی لحاظ کردن مفاهیم پیچیده‌ای مانند حافظه‌مندی و اثرات غیرموضعی را در مدل‌های ریاضی نداشت و در نتیجه نمی‌توانست رفتار واقعی بسیاری از پدیده‌ها را بازنمایی کند. برخلاف مدل‌های کلاسیک، در حساب کسری^۲ مفهوم حافظه‌مندی به این معناست که وضعیت فعلی یک سیستم به تمامی سوابق و مقادیر گذشته آن از لحظه شروع فرآیند بستگی دارد [12]. همچنین، اثرات غیرموضعی بیانگر این واقعیت هستند که عملگرهای کسری بر خلاف عملگرهای مرتبه صحیح، به اطلاعات موجود در یک ناحیه یا بازه زمانی وابسته بوده و به یک نقطه خاص محدود نمی‌شوند [13]. این ویژگی‌های ذاتی باعث می‌شود که حساب کسری ابزاری ایده‌آل برای مدل‌سازی سیستم‌های پیچیده با همبستگی‌های دوربرد باشد. در بسیاری از سیالات پیشرفته مانند مواد ویسکوالاستیک، نانوسیالات و سیالات پلیمری، حالت کنونی متغیرهایی نظیر سرعت، تنش، دما و غلظت به شدت به تاریخچه زمانی تغییرات در گذشته وابسته است [14]. استفاده از تکنیک‌های مبتنی بر مشتق کسری این محدودیت‌ها را برطرف کرده و امکان پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار این مواد را فراهم ساخته است. تحقیقات نشان می‌دهند که مدل‌های کسری در مقایسه با مدل‌های سنتی، انطباق بسیار بهتری با داده‌های تجربی در علوم مهندسی و بیولوژی دارند [15]، [16]. به همین دلیل، به‌کارگیری مشتقات کسری در مدل‌های EHD باعث می‌شود رفتارهای زمانی و اثرات حافظه‌دار سیال با دقت بیشتری شبیه‌سازی شوند. برای حل عددی این مدل‌ها، طیف وسیعی از روش‌های نیمه‌تحلیلی و عددی گزارش شده‌اند که شامل روش‌های طیفی مبتنی بر چندجمله‌ای‌ها [1]، روش‌های کلوشن و گالرکین مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لوکاس انتقال‌یافته [17]، رویکرد ترکیبی تابع گرین با طرح‌های تکراری پیکارد و

من [18]، کلوشن برنشتاین [19]، روش کمترین مربعات [20]، تحلیل هموتوپای بهینه‌شده گسسته [21]، روش موجک [22]، روش‌های ترکیبی طیفی-هموتوپای [23]، تحلیل هموتوپای [24]، سری تیلور [25]، هسته بازتولیدکننده برای مدل‌های کسری [26]، الگوریتم‌های ترکیبی شبکه عصبی و ژنتیک [27] می‌باشند. با وجود دقت بالای روش‌های طیفی، بسیاری از آن‌ها در تقریب مشتقات مرتبه بالا یا در حضور عبارت‌های غیرخطی کسری دچار ناپایداری عددی و افزایش پیچیدگی محاسباتی می‌شوند. علاوه بر این، بیشتر پژوهش‌های موجود از پایه‌های کلاسیکی مانند چیشف یا لژاندر استفاده کرده‌اند که برای برخی از توابع با رفتارهای نوسانی، همگرایی کندی دارند. در سال‌های اخیر، ایده‌ی استفاده از چندجمله‌ای‌های ویژه در بسط توابع و تقریب مشتقات مطرح شده است. یکی از این توابع، چندجمله‌ای‌های برنولی و گونه‌های بسط‌یافته‌ی هایپربولیک آن‌ها هستند که به دلیل داشتن پایداری عددی بالا، قابلیت مناسبی در تقریب مشتقات و انتگرال‌های کسری دارند. این ویژگی سبب می‌شود که خطای گرد کردن و برش عددی به حداقل برسد و در عین حال دقت همگرایی افزایش یابد. از سوی دیگر، استفاده از توابع هایپربولیک در بسط‌های برنولی باعث انعطاف‌پذیری بالاتری در بازتولید رفتار غیرخطی سیالات می‌شود.

بنابراین، یک شکاف علمی مشخص در ادبیات پژوهش دیده می‌شود. این شکاف، نبود یک روش عددی پایدار و دقیق برای حل معادلات کسری EHD با استفاده از پایه‌های غیرکلاسیکی است. در این پژوهش، با هدف پر کردن این خلاء، یک روش عددی جدید برای حل معادله‌ی کسری جریان EHD در مجرای استوانه‌ای ارائه می‌شود. در این روش، مشتق مرتبه بالای تابع مجهول با استفاده از بسط سینوس هایپربولیک از چندجمله‌ای‌های برنولی مرتبه کسری تقریب زده می‌شود، سپس

از دو طرف معادله انتگرال کسری گرفته می‌شود تا اپراتور انتگرال کسری استخراج گردد. در ادامه، با بهره‌گیری از روش هم‌مکانی مبتنی بر ریشه‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر، دستگاه غیرخطی حاصل به صورت عددی حل می‌شود. روش پیشنهادی ضمن حفظ پایداری عددی، قادر است با تعداد کم نقاط هم‌مکانی به دقت بالا دست یابد. نوآوری اصلی این پژوهش، ارائه‌ی یک رویکرد عددی پایدار و با دقت بالا برای حل معادلات کسری جریان EHD با استفاده از پایه‌های برنولی-هایپربولیک است که بتواند محدودیت‌های روش‌های کلاسیکی موجود را برطرف سازد و دقت تقریب مشتقات کسری و سرعت همگرایی را به‌طور چشم‌گیری بهبود دهد، که بر سه دستاورد اصلی استوار است: نخست، بهره‌گیری از چندجمله‌ای‌های برنولی مرتبه کسری با پارامتر کسری λ که امکان تنظیم انعطاف‌پذیر تقریب را با توجه به رفتارهای غیرخطی مسئله فراهم می‌کند. دوم، محاسبه‌ی عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل با استفاده از قاعده انتگرال‌سازی فژر نوع دوم که با بهره‌گیری از وزن‌های مثبت و توزیع هوشمند گره‌ها، ضمن دوری از ناپایداری‌های عددی رایج در گسسته‌سازی مستقیم انتگرال‌های کسری، دقت انتگرال‌گیری را در نواحی نزدیک به مبدأ بهبود می‌بخشد [28]. سوم، تبدیل مسئله به یک دستگاه جبری غیرخطی از طریق هم‌مکانی مبتنی بر ریشه‌های چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته و حل آن با الگوریتم نیوتن. ریشه‌های این نوع چندجمله‌ای‌ها به عنوان نقاط هم‌مکانی انتخاب می‌شوند زیرا توزیع غیریکنواخت آنها در نزدیکی مرزها متراکم‌تر است که دقت در ثبت رفتار مرزی و گرادیان‌های تیز را افزایش می‌دهد. این توزیع همچنین مجموعه‌ای از نقاط با پراکندگی مناسب را در سراسر دامنه تضمین می‌کند و به پایداری و دقت روش عددی کمک می‌کند. این ویژگی‌ها به ویژه برای مسائلی که تکین (منفرد) و به شدت غیرخطی هستند، بسیار حائز اهمیت هستند. روش پیشنهادی ضمن حفظ پایداری

عددی، قادر است با تعداد کمی از این نقاط هم‌مکانی، به دقت بالایی دست یابد. به‌طور خلاصه، هدف این پژوهش، ارائه‌ی یک رویکرد عددی پایدار و با دقت بالا برای حل معادلات کسری جریان EHD با استفاده از پایه‌های برنولی-هایپربولیک است که بتواند محدودیت‌های روش‌های کلاسیکی موجود را برطرف سازد و دقت تقریب مشتقات کسری و سرعت همگرایی را به‌طور چشم‌گیری بهبود دهد.

در ادامه‌ی مقاله، ساختار پژوهش به صورت زیر تنظیم شده است. در بخش 2، مفاهیم پایه و تعاریف مربوط به حساب کسری، چندجمله‌ای‌های برنولی مرتبه کسری و قاعده‌ی انتگرال‌گیری فژر اختصاص دارد. در بخش 3، روش عددی پیشنهادی بر پایه‌ی تقریب‌های برنولی-هایپربولیک و الگوریتم هم‌مکانی لژاندر انتقال‌یافته ارائه شده و مراحل پیاده‌سازی آن تشریح می‌گردد. در ادامه، بخش 4 به تحلیل همگرایی روش اختصاص دارد و سپس برای اعتبارسنجی روش پیشنهادی، در بخش 5، معادله‌ی کسری جریان EHD با پارامترهای مختلف حل شده و نتایج عددی در قالب جداول و نمودارها ارائه می‌گردد، و بخش پایانی مقاله به ارائه‌ی جمع‌بندی از نتایج و پیشنهاد مسیرهای آتی پژوهش اختصاص یافته است.

2. پیش‌نیازها

در این بخش، مفاهیم و تعاریف مورد نیاز برای تدوین روش پیشنهادی مرور می‌شود. هدف، فراهم کردن چارچوبی ریاضی برای استفاده از حساب کسری و پایه‌های برنولی-هایپربولیک در حل معادله‌ی کسری جریان EHD است.

1.2. انتگرال و مشتق‌های کسری

انتگرال کسری ریمان-لیوویل و مشتق کسری کاپوتو از پرکاربردترین تعاریف در مدل‌سازی پدیده‌های دارای حافظه

که در آن η عدد حقیقی، $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ و $n - 1 < n$ است. $v \leq n$

2.2. توابع برنولی مرتبه کسری

در این بخش به معرفی توابع برنولی مرتبه کسری می‌پردازیم که تعمیمی از چندجمله‌ای‌های کلاسیک برنولی محسوب می‌شوند. فرم تحلیلی تابع برنولی $\beta_m(t)$ از مرتبه m به صورت زیر است:

$$\beta_m(t) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \beta_{m-i} t^i, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (11)$$

که در این رابطه، $\beta_i = \beta_i(0)$ برای $i = 0, 1, \dots, m$ نشان‌دهنده اعداد برنولی است.

توابع برنولی مرتبه کسری با اعمال تغییر متغیر $t \rightarrow x^\lambda$ در چندجمله‌ای‌های برنولی استاندارد تعریف می‌شوند، که در آن $0 < \lambda \leq 1$ پارامتر مرتبه کسری است. این توابع با نماد $\beta_m^\lambda(x)$ نشان داده می‌شوند. فرم تحلیلی تابع برنولی مرتبه کسری $\beta_m^\lambda(x)$ از مرتبه $m\lambda$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\beta_m^\lambda(x) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \beta_{m-i} x^{i\lambda}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (12)$$

چند تابع اول از این خانواده به شرح زیر هستند:

$$\beta_0^\lambda(x) = 1,$$

$$\beta_1^\lambda(x) = x^\lambda - \frac{1}{2},$$

$$\beta_2^\lambda(x) = x^{2\lambda} - x^\lambda + \frac{1}{6},$$

$$\beta_3^\lambda(x) = x^{3\lambda} - \frac{3}{2}x^{2\lambda} + \frac{1}{2}x^\lambda.$$

به دلیل داشتن رفتار هموار، استفاده از آن‌ها در بسط‌های عددی باعث کاهش خطای گردکردن و بهبود پایداری عددی می‌شود. [34]

هستند [29]، [30]. انتگرال کسری ریمان-لیوویل برای تابعی پیوسته $u(t)$ و مرتبه مثبت $v > 0$ ، به صورت [31]

$$(J^v u)(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-s)^{v-1} u(s) ds, \quad (3)$$

تعریف می‌شود. به‌طور مشابه، مشتق کسری کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$({}^C D^v u)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-v)} \int_0^t (t-s)^{n-v-1} u^{(n)}(s) ds, \quad n-1 < v \leq n, \quad (4)$$

که در آن $n = [v]$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی v است. کاربرد این تعاریف در مدل‌سازی سامانه‌های ویسکوالاستیک، جریان‌های حافظه‌دار و پدیده‌های پراکندگی کسری گسترده است [32]، [33]. حال، برخی ویژگی‌های مهم مربوط به مشتق کسری به صورت کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل ارائه می‌شود. این ویژگی‌ها نقش کلیدی در اثبات روابط و پیاده‌سازی عددی معادله (1) دارند.

ویژگی‌های مهم این دو اپراتور عبارت‌اند از [29]:

$${}^C D^v J^v u(t) = u(t), \quad (5)$$

$$J^v ({}^C D^v u)(t) = u(t) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{u^{(i)}(0)}{i!} t^i, \quad (6)$$

$${}^C D^v u(t) = J^{n-v} ({}^C D^n u)(t), \quad (7)$$

$${}^C D^v t^\beta = \begin{cases} 0, & \beta \in \mathbb{N}_0, \beta < [v], \\ \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-v)} t^{\beta-v}, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (8)$$

$$J^v t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+v)} t^{\beta+v}, \quad (9)$$

$${}^C D^v \eta = 0, \quad (10)$$

3.2. انتگرال گیری عددی به روش فژر

در محاسبه‌ی اپراتور انتگرال کسری، برای تقریب عددی انتگرال از قاعده‌ی فژر^۳ استفاده می‌شود. این روش بر پایه‌ی گره‌ها و وزن‌های چبیشفی تعریف می‌گردد. فرمول کلی به صورت زیر است:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \omega_k f\left(\frac{1+x_k}{2}\right), \quad (13)$$

که در آن،

$$x_k = \cos(v_k), \quad \omega_k = \frac{2\sin(v_k)}{n} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sin\left(\frac{(2j-1)v_k}{2j-1}\right), \\ v_k = \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (14)$$

قاعده‌ی عددی فژر یکی از روش‌های دقیق و پایدار برای تقریب عددی انتگرال‌های معین است [35]. در این روش، تابع مورد نظر ابتدا با یک سری محدود از چندجمله‌ای‌های چبیشف تقریب زده می‌شود و سپس انتگرال هر جمله به صورت تحلیلی محاسبه می‌گردد. در میان دو نوع قاعده‌ی فژر، نسخه‌ی «نوع دوم» بیشترین کاربرد را در روش‌های طیفی و هم‌مکانی دارد زیرا وزن‌های مرزی آن صفر بوده و تنها از گره‌های داخلی استفاده می‌کند [36]. این ویژگی باعث می‌شود در انتگرال‌گیری‌های کسری (نظیر اپراتور J^ν)، دقت بالا با پیچیدگی محاسباتی کم به دست آید. به طور کلی، قاعده‌ی فژر نوع دوم از دقت طیفی، پایداری عددی مناسب و سازگاری عالی با بسط‌های چبیشفی برخوردار است و به همین دلیل در الگوریتم حاضر برای تقریب انتگرال‌های کسری به کار گرفته شده است [37].

3. روش عددی برای حل معادله‌ی کسری جریان

EHD

در این بخش، روش عددی پیشنهادی برای حل معادله‌ی کسری جریان EHD ارائه شده در رابطه‌ی (1) ارائه می‌شود. ایده‌ی اصلی روش، تقریب بالاترین مشتق مرتبه کسری با استفاده از بسط هایپربولیک از پایه‌های برنولی مرتبه کسری و سپس اعمال عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل است تا یک نمایش تحلیلی از تابع مجهول $u(t)$ به دست آید. در ادامه، با تشکیل تابع باقیمانده و هم‌مکان‌یابی آن در گره‌های لژاندر انتقال‌یافته، مسئله به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود که حل آن ضرایب مجهول را تعیین می‌کند.

1.3. بسط تابع مجهول با پایه‌های برنولی-هایپربولیک

برای تقریب بهتر، بالاترین مرتبه‌ی مشتق در معادله‌ی (1) را، بصورت بسطی از نوع هایپربولیک برنولی در نظر می‌گیریم:

$${}^C D^\nu u(t) \cong \sinh(\mathbf{C}^T \mathbf{B}(t)) = {}^C D^\nu u^*(t), \quad (15)$$

که در آن $u^*(t)$ نمایش تقریبی از $u(t)$ و $\mathbf{C} = [c_0, c_1, \dots, c_m]^T$ بردار ضرایب مجهول و $\mathbf{B}(t) = [\beta_0^\lambda(t), \beta_1^\lambda(t), \dots, \beta_m^\lambda(t)]^T$ بردار پایه‌های برنولی مرتبه کسری است.

با انتگرال‌گیری کسری ریمان-لیوویل از دو طرف معادله‌ی (15) و بهره‌گیری از ویژگی (6) رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$u(t) \cong J^\nu(\sinh(\mathbf{C}^T \mathbf{B}(t))) + u(0) + u'(0) t. \quad (16)$$

حال، عملگر انتگرال کسری $\Lambda(t, \nu)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Lambda(t, \nu) = J^\nu(\sinh(\mathbf{C}^T \mathbf{B}(t))). \quad (17)$$

که در آن x_j و ω_j به ترتیب گره‌ها و وزن‌های قاعده‌ی فزّ نوع دوم هستند.

3.3. تشکیل دستگاه معادلات جبری و پیاده‌سازی روش

هم‌مکانی

با در دست داشتن تقریب عددی $\Lambda(t, v)$ از رابطه‌ی (18)، اکنون می‌توان تقریب جواب $u(t)$ و مشتقات کسری مرتبه پایین‌تر را به‌طور صریح بیان کرد. سپس با جایگذاری در معادله‌ی اصلی و اعمال شرط هم‌مکانی، دستگاه معادلات غیرخطی حاصل می‌شود. مراحل تفصیلی به شرح زیر است:

با توجه به شرایط اولیه‌ی (2)، رابطه‌ی (16) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد،

$$u(t) \cong \Lambda(t, v) + u(0) + a_1 t. \quad (19)$$

با قرار دادن $t = 1$ در (19) و استفاده از شرط $u(1) = a_2$ داریم

$$u(0) = a_2 - a_1 - \Lambda(1, v), \quad (20)$$

در نتیجه، تابع تقریبی نهایی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u(t) \cong \Lambda(t, v) - \Lambda(1, v) + (a_2 - a_1) + a_1 t = u^*(t). \quad (21)$$

با استفاده از خواص عملگرهای کسری (معادلات (7)، (8) و (10))، داریم:

$$\begin{aligned} {}^c D^\beta u(t) &\cong \Lambda(t, v - \beta) - \Lambda(1, v - \beta) \\ &\quad + a_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2 - \beta)} t^{1-\beta} \\ &= D^\beta u^*(t). \end{aligned} \quad (22)$$

تابع باقیمانده $\mathcal{R}(t, \mathbf{C})$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

این عملگر در ادامه‌ی الگوریتم عددی، نقش کلیدی در بیان صریح تقریب جواب $u(t)$ ایفا می‌کند. با تعریف عملگر $\Lambda(t, v)$ گام بعدی در پیاده‌سازی روش عددی، محاسبه‌ی کارآمد این انتگرال کسری است. از آنجا که انتگرال‌گیری تحلیلی در مورد عبارت $\sinh(\mathbf{C}^T \mathbf{B}(t))$ به‌طور مستقیم دشوار است، لازم است از یک قاعده‌ی عددی دقیق و پایدار برای تقریب انتگرال بهره بگیریم. در این راستا، قاعده‌ی انتگرال‌گیری فزّ (به‌ویژه نوع دوم آن) به دلیل دقت طیفی بالا، پایداری عددی و سازگاری مطلوب با بسط‌های چندجمله‌ای‌ها، انتخاب مناسبی است. در بخش بعد، چگونگی اعمال قاعده‌ی انتگرال‌گیری فزّ نوع دوم برای محاسبه‌ی عددی $\Lambda(t, v)$ ، ارائه خواهد شد.

2.3. تقریب عملگر انتگرال کسری با قاعده‌ی فزّ

در این بخش، برای محاسبه‌ی عملگر $\Lambda(t, v)$ در رابطه‌ی (17)، از قاعده‌ی انتگرال‌گیری فزّ نوع دوم بهره می‌گیریم. ابتدا با استفاده از تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوویل (3) داریم:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, v) &= \mathcal{I}^v(\sinh(\mathbf{C}^T \mathbf{B}(t))) = \mathcal{I}^v(\varphi(t, \mathbf{C})) \\ &= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t (t-s)^{v-1} \varphi(s, \mathbf{C}) ds \\ &= \frac{t}{\Gamma(v)} \int_0^1 (t-t\tilde{s})^{v-1} \varphi(t\tilde{s}, \mathbf{C}) d\tilde{s}. \end{aligned}$$

حال، با بهره‌گیری از قاعده انتگرال‌گیری فزّ داریم:

$$\begin{aligned} \Lambda(t, v) &= \frac{t}{\Gamma(v)} \sum_{k=0}^n w_j \left(t - t \left(\frac{1+x_j}{2} \right) \right)^{v-1} \\ &\quad \times \varphi \left(t \left(\frac{1+x_j}{2} \right), \mathbf{C} \right), \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \Lambda(t, v) &= \frac{t}{\Gamma(v)} \sum_{j=0}^n \omega_j \left[t \left(1 - \frac{1+x_j}{2} \right) \right]^{v-1} \\ &\quad \times \sinh \left(\mathbf{C}^T \mathbf{B} \left(t \frac{1+x_j}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

(18)

$$\|u\|_{H^\tau(0,1)} = \left(\sum_{r=0}^{\tau} \int_0^1 |u^{(r)}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{r=0}^{\tau} \|u^{(r)}(t)\|_{L^2(0,1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن $u^{(r)}(t)$ مشتق از مرتبه r برای u است.

لم 1. فرض کنید $u \in H^\tau(0,1)$ با $m \geq \tau$ و $\tau \geq 0$ و u^* بهترین تقریب u باشد که با استفاده از بسط سری بریده شده ی توابع سینوس های پربوکیک برنولی کسری به دست آمده است. آنگاه تخمین زیر برقرار است [38]

$$\|u - u^*\|_{L^2(0,1)} \leq cKm^{-\tau}, \quad (26)$$

و به ازای $1 \leq s \leq \tau$

$$\|u - u^*\|_{H^s(0,1)} \leq cKm^{2s-\frac{1}{2}-\tau},$$

که در آن $c \in \mathbb{R}$ و به τ وابسته است. همچنین

$$\|u' - u'^*\|_{L^2(0,1)} \leq cKm^{2s-\frac{1}{2}-\tau}, \quad (27)$$

$$\|u'' - u''^*\|_{L^2(0,1)} \leq cKm^{2s-\frac{1}{2}-\tau}, \quad (28)$$

که در آن $1 \leq s \leq \tau$ و $K = \|u^{(\tau)}\|_{L^2(0,1)}$.

لم 2. فرض کنید u یک تابع مطلقاً انتگرال پذیر کسری ریمان-لیوویل روی بازه $[0,1]$ باشد. در این صورت نامساوی زیر برقرار است:

$$\|J^\gamma u - J^\gamma u^*\|_{L^2(0,1)} \leq \mathfrak{L}_1 \|u - u^*\|_{L^2(0,1)},$$

که در آن

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{\ell_1}{\Gamma(\gamma+1)},$$

و ℓ_1 ضریب تبدیلی است که

$$\|u - u^*\|_{L^\infty(0,1)} \leq \ell_1 \|u - u^*\|_{L^2(0,1)}$$

را برآورده می کند.

اثبات: از رابطه ی (3) داریم

$$\mathcal{R}(t, \mathbf{C}) = (1 - \alpha u^*(t)) \left[{}^C \mathcal{D}^\nu u^*(t) + \frac{1}{t} {}^C \mathcal{D}^\beta u^*(t) + H^2(1 - (\alpha + 1)u^*(t)) \right]. \quad (23)$$

با جایگذاری تقریب های (15)، (21) و (22) در معادله ی فوق، تابع باقیمانده به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, \mathbf{C}) = & (1 - \alpha(\Lambda(t, \nu) - \Lambda(1, \nu) + (a_2 - a_1) + a_1 t)) \\ & \times [\sinh(\mathbf{C}^T \mathbf{B}(t)) + \frac{1}{t}(\Lambda(t, \nu - \beta) - \Lambda(1, \nu - \beta) \\ & + a_1 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\beta)} t^{1-\beta}) + H^2(1 - (\alpha + 1)(\Lambda(t, \nu) \\ & - \Lambda(1, \nu) + (a_2 - a_1) + a_1 t))]. \end{aligned} \quad (24)$$

حال با اعمال شرط هم مکانی

$$\mathcal{R}(t_i, \mathbf{C}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad (25)$$

که در آن t_i ریشه های چند جمله ای های لژاندر انتقال یافته درجه ی $m+1$ در بازه ی $[0,1]$ هستند، بدین ترتیب یک دستگاه $m+1$ معادله ی غیرخطی با $m+1$ مجهول تشکیل می شود که با روش تکراری نیوتن حل می گردد و حل تقریبی $u^*(t)$ به دست می آید. روش پیشنهادی با ترکیب پایه های برنولی-هایپربولیک، انتگرال گیری فز و هم مکانی لژاندر، ضمن حفظ پایداری عددی، دقت بالایی را برای حل معادله ی (1) فراهم می سازد.

4. تحلیل همگرایی

در این بخش، ویژگی های همگرایی راهکار عددی پیشنهادی را در چارچوب فضای سوبولف روی بازه $(0,1)$ بررسی می کنیم. بدین منظور ابتدا تعریف نرم سوبولف از مرتبه صحیح $\tau \geq 0$ یادآوری می شود [38]:

نتیجه. با فرض اینکه شرایط بیان شده در لم 3 برای $1 < \nu \leq 3$ برقرار باشند، خواهیم داشت

$$\| {}^C \mathcal{D}^\nu u(t) - {}^C \mathcal{D}^\nu u^*(t) \|_{L^2(0,1)} \leq \mathfrak{L}_3 K m^{-\tau}, \quad (30)$$

که در آن $\mathfrak{L}_3$ یک ثابت حقیقی است.

اثبات: برهان این نتیجه کاملاً مشابه برهان لم 3 (و با استفاده از لم های 1 و 2) است.

قضیه. فرض کنید فرضیات لم 3 برقرار باشند. در این صورت تخمین زیر برای نرم باقیمانده برقرار است

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(t, \mathbf{C})\|_{L^2(0,1)} \leq & (\mathfrak{L}_3(1 + \alpha\kappa_1) + \mathfrak{L}_2\delta(1 + \alpha\kappa_1) \\ & + c(H^2(\alpha + 1)(1 + \alpha\kappa_4) \\ & + \alpha(\kappa_2 + \kappa_3\delta + H^2))) K m^{-\tau}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \|u\|_{L^2(0,1)}, \\ \kappa_2 &= \| {}^C \mathcal{D}^\nu u^* \|_{L^2(0,1)}, \\ \kappa_3 &= \| {}^C \mathcal{D}^\beta u^* \|_{L^2(0,1)}, \\ \kappa_4 &= \|u + u^*\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

اثبات: بر اساس تعریف تابع باقیمانده و معادله (1) داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t, \mathbf{C}) = & {}^C \mathcal{D}^\nu u(t) + \frac{1}{t} {}^C \mathcal{D}^\beta u(t) + H^2 \\ & - H^2(\alpha + 1)u(t) - \alpha u(t) {}^C \mathcal{D}^\nu u(t) \\ & - \frac{1}{t} \alpha u(t) {}^C \mathcal{D}^\beta u(t) - H^2 \alpha u(t) \\ & + H^2 \alpha(\alpha + 1)u^2(t) - {}^C \mathcal{D}^\nu u^*(t) \\ & - \frac{1}{t} {}^C \mathcal{D}^\beta u^*(t) - H^2 + H^2(\alpha + 1)u^*(t) \\ & + \alpha u^*(t) {}^C \mathcal{D}^\nu u^*(t) + \frac{1}{t} \alpha u^*(t) {}^C \mathcal{D}^\beta u^*(t) \\ & + H^2 \alpha u^*(t) - H^2 \alpha(\alpha + 1)u^{*2}(t). \end{aligned}$$

با مرتب سازی و دسته بندی جملات، نامساوی مثلث را اعمال می کنیم:

$$\begin{aligned} |J^\nu u - J^\nu u^*| & \leq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} |u(s) - u^*(s)| ds \\ & \leq \|u - u^*\|_{L^\infty(0,1)} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} ds \\ & = \|u - u^*\|_{L^\infty(0,1)} \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} t^\gamma \\ & \leq \|u - u^*\|_{L^\infty(0,1)} \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}. \end{aligned}$$

اکنون با گرفتن نرم L^2 از دو سوی نامساوی فوق و استفاده از رابطه بین نرم های L^∞ و L^2 ، نتیجه مطلوب زیر به دست می آید

$$\|J^\nu u - J^\nu u^*\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{\ell_1}{\Gamma(\gamma+1)} \|u - u^*\|_{L^2(0,1)}.$$

این همان ادعای قضیه است.

لم 3. فرض کنید مفروضات لم های 1 و 2 برقرار باشند و $u \in C^n[0,1]$ به طوری که $0 < \beta \leq 1$ آنگاه تخمین زیر برقرار است:

$$\| {}^C \mathcal{D}^\beta u(t) - {}^C \mathcal{D}^\beta u^*(t) \|_{L^2(0,1)} \leq \mathfrak{L}_2 K m^{-\tau}, \quad (29)$$

که در آن

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{\ell_1}{\Gamma(2-\beta)} c m^{2s-\frac{1}{2}}.$$

اثبات: با استفاده از روابط (3) و (4) و با در نظر گرفتن $0 < \beta \leq 1$ داریم

$$\begin{aligned} | {}^C \mathcal{D}^\beta u(t) - {}^C \mathcal{D}^\beta u^*(t) | \\ = | J^{1-\beta} u'(t) - J^{1-\beta} u'^*(t) |. \end{aligned}$$

اکنون از هر دو سوی نامساوی فوق نرم L^2 می گیریم، سپس لم های 1 و 2 و نامساوی (27) را به کار می بریم،

$$\begin{aligned} \| {}^C \mathcal{D}^\beta u(t) - {}^C \mathcal{D}^\beta u^*(t) \|_{L^2(0,1)} & \leq \frac{\ell_1}{\Gamma(2-\beta)} \|u' - u'^*\|_{L^2(0,1)} \\ & \leq \frac{\ell_1}{\Gamma(2-\beta)} c K m^{2s-\frac{1}{2}-\tau}. \end{aligned}$$

بنابراین حکم قضیه اثبات می شود.

α و عدد هارتمن H در جریان EHD با در نظر گرفتن مقادیر متفاوت برای این پارامترها، تأثیر هر یک بر پاسخ مسئله (1) مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. از آنجا که تاکنون جواب تحلیلی دقیقی برای مسئله مقدار مرزی (1) ارائه نشده است، برای سنجش دقت روش، از خطای باقیمانده‌ی مطلق رابطه‌ی (23) به عنوان معیاری برای سنجش میزان انطباق پاسخ تقریبی با معادله‌ی حاکم استفاده می‌شود:

$$E_{\text{res}}(t) = |\mathcal{R}(t, \mathbf{C})|.$$

نتایج جدول 1 که برای پارامترهای $\beta = 0.9$ ، $\nu = 1.9$ و $m = 12$ و $\lambda = \frac{1}{4}$ محاسبه شده است، نشان می‌دهد که با افزایش عدد هارتمن از $H^2 = 0.5$ به $H^2 = 2$ ، سرعت سیال در تمام نقاط مجرا به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال، برای $\alpha = 0.5$ در $t = 0.1$ ، سرعت از 0/272728 به 0/710791 افزایش یافته که نشان‌دهنده‌ی تأثیر مستقیم تقویت میدان الکتریکی بر افزایش نیروی محرکه‌ی الکتریکی و در نتیجه افزایش سرعت جریان است. از سوی دیگر، با افزایش پارامتر غیرخطی α از 0.5 به 2، سرعت سیال کاهش می‌یابد که ناشی از افزایش گرادیان فشار و مقاومت بیشتر در برابر حرکت سیال می‌باشد. خطای باقیمانده‌ی گزارش شده در محدوده‌ی 10^{-6} تا 10^{-11} قرار دارد که دقت بالای روش پیشنهادی را در شبیه‌سازی پدیده‌ی فیزیکی مورد نظر تأیید می‌کند. زمان‌های اجرای درج شده در انتهای جدول 1 نشان می‌دهد که افزایش عدد هارتمن از $H^2 = 0.5$ به 2، هزینه‌ی محاسباتی را به میزان قابل توجهی کاهش می‌دهد. این پدیده ناشی از کاهش نسبی غیرخطی بودن مسئله در میدان‌های الکتریکی قوی‌تر است که همگرایی روش نیوتن را تسریع می‌کند. همچنین، تأثیر پارامتر غیرخطی α بر زمان اجرا وابسته به H^2 است؛ در H^2 کوچک، افزایش α زمان را افزایش می‌دهد، اما در H^2 بزرگ، افزایش α زمان را اندکی کاهش

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(t, \mathbf{C})\|_{L^2(0,1)} &\leq \|{}^C\mathcal{D}^\nu u - {}^C\mathcal{D}^\nu u^*\|_{L^2(0,1)} \\ &+ \delta \|{}^C\mathcal{D}^\beta u - {}^C\mathcal{D}^\beta u^*\|_{L^2(0,1)} \\ &+ H^2(\alpha + 1)\|u - u^*\|_{L^2(0,1)} \\ &+ \alpha \|u {}^C\mathcal{D}^\nu u - u {}^C\mathcal{D}^\nu u^* + u {}^C\mathcal{D}^\nu u^* - u^* {}^C\mathcal{D}^\nu u^*\|_{L^2(0,1)} \\ &+ \delta \alpha \|u {}^C\mathcal{D}^\beta u - u {}^C\mathcal{D}^\beta u^* + u {}^C\mathcal{D}^\beta u^* - u^* {}^C\mathcal{D}^\beta u^*\|_{L^2(0,1)} \\ &+ H^2\alpha \|u - u^*\|_{L^2(0,1)} + H^2\alpha(\alpha + 1)\|u^2 - u^{*2}\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده مجدد از نامساوی مثلث و خاصیت ضرب در نرم‌ها، داریم:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(t, \mathbf{C})\|_{L^2(0,1)} &\leq (1 + \alpha\|u\|_{L^2(0,1)})\|{}^C\mathcal{D}^\nu u - {}^C\mathcal{D}^\nu u^*\|_{L^2(0,1)} \\ &+ \delta(1 + \alpha\|u\|_{L^2(0,1)})\|{}^C\mathcal{D}^\beta u - {}^C\mathcal{D}^\beta u^*\|_{L^2(0,1)} \\ &+ (H^2(\alpha + 1)(1 + \alpha\|u + u^*\|_{L^2(0,1)}) \\ &+ \alpha(\|{}^C\mathcal{D}^\nu u^*\|_{L^2(0,1)} + \delta\|{}^C\mathcal{D}^\beta u^*\|_{L^2(0,1)} \\ &+ H^2)) \times \|u - u^*\|_{L^2(0,1)}. \end{aligned}$$

در نهایت با جایگذاری کران‌های به‌دست آمده از (26)، (29) و

(30)، به نامساوی زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(t, \mathbf{C})\|_{L^2(0,1)} &\leq (\mathfrak{L}_3(1 + \alpha\kappa_1) + \mathfrak{L}_2\delta(1 + \alpha\kappa_1) \\ &+ c(H^2(\alpha + 1)(1 + \alpha\kappa_4) \\ &+ \alpha(\kappa_2 + \kappa_3\delta + H^2)))K m^{-\tau}. \end{aligned}$$

از این نامساوی به روشنی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathcal{R}(t, \mathbf{C})\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

5. نتایج عددی

در این بخش، کارایی و دقت روش پیشنهادی مبتنی بر پایه‌های برنولی-هایبرولیک برای حل معادله‌ی کسری جریان EHD (1) مورد بررسی قرار می‌گیرد. تمامی محاسبات در محیط Wolfram Mathematica 12 روی رایانه‌ی Asus DESKTOP-L7SUP39 مجهز به پردازنده‌ی 13th Gen Intel(R) Core(TM) i7-13620H (2.40 GHz) و حافظه‌ی 32 گیگابایت انجام شده است.

برای مشتقات مرتبه‌ی کسری، مقادیر مختلفی از پارامترهای ν و β انتخاب شده است. با توجه به اهمیت شدت پارامتر غیرخطی

می‌دهد که حاکی از تعامل پیچیده بین نیروی محرکه‌ی الکتریکی و مقاومت غیرخطی در تعیین سرعت همگرایی است.

جدول (1): نتایج عددی، خطای باقیمانده و زمان اجرا (ثانیه) برای مقادیر مختلف α و عدد هارتمن H^2

t	$H^2 = 0/5$				$H^2 = 2$			
	$\alpha = 0/5$		$\alpha = 2$		$\alpha = 0/5$		$\alpha = 2$	
	$u^*(t)$	E_{res}	$u^*(t)$	$E_{res}(t)$	$u^*(t)$	E_{res}	$u^*(t)$	E_{res}
0/1	0/272728	7/80e - 07	0/226361	5/16e - 07	0/710791	2/30e - 06	0/405051	5/58e - 05
0/2	0/244181	5/07e - 07	0/202541	3/58e - 07	0/632795	1/72e - 06	0/310322	3/20e - 05
0/3	0/217408	5/95e - 08	0/180384	4/47e - 08	0/560526	2/19e - 07	0/236461	1/60e - 06
0/4	0/190418	7/61e - 09	0/158198	6/00e - 09	0/489874	2/98e - 8	0/183023	4/73e - 08
0/5	0/162468	6/75e - 12	0/135293	1/95e - 11	0/418508	2/25e - 11	0/145833	4/93e - 10
0/6	0/133216	7/50e - 10	0/111298	6/61e - 10	0/344771	3/41e - 09	0/118416	3/09e - 08
0/7	0/102466	5/67e - 10	0/085966	4/88e - 10	0/267297	2/55e - 09	0/094515	2/57e - 08
0/8	0/070085	2/45e - 10	0/059095	2/16e - 10	0/184832	1/15e - 09	0/069134	9/29e - 09
0/9	0/035964	7/78e - 11	0/030501	7/23e - 12	0/096152	8/63e - 11	0/038559	2/61e - 09
زمان اجرا	9/891		11/688		5/265		4/953	

انتخاب λ و تأثیر مستقیم این پارامتر بر ویژگی‌های طیفی پایه‌های مورد استفاده است. بنابراین، تعیین مقدار مناسب λ نقش مهمی در دستیابی به دقت مطلوب داشته و مقدار بهینه‌ی آن به ساختار مسئله و پارامترهای کسری وابسته است. در انتهای جدول 2، زمان اجرا متناظر با هر مقدار λ گزارش شده است. مشاهده می‌شود که اگرچه $\lambda = \frac{1}{4}$ بیشترین دقت را ارائه می‌دهد، زمان محاسباتی آن نسبت به مقادیر $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1$ بیشتر است. این افزایش زمان، هزینه‌ی دستیابی به دقت بالاتر با استفاده از پایه‌های برنولی-هایپربولیک با λ کوچکتر محسوب

برای بررسی تأثیر پارامتر λ در پایه‌های برنولی-هایپربولیک، معادله‌ی (1) با $\alpha = 1, H^2 = 1, \beta = 1, \nu = 2$ و $m = 12$ حل شده و نتایج در جدول 2 گزارش شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مسئله، مقدار $\lambda = \frac{1}{4}$ کمترین خطای باقیمانده را تولید کرده و عملکرد بهتری نسبت به سایر مقادیر دارد. با افزایش λ از $\frac{1}{4}$ تا 1، خطا به‌طور محسوسی افزایش می‌یابد؛ به عنوان مثال، در $t = 0.1$ خطا از 1.13×10^{-6} برای $\lambda = \frac{1}{4}$ به 1.11×10^{-3} برای $\lambda = 1$ می‌رسد. این رفتار نشان‌دهنده‌ی حساسیت روش نسبت به

می‌شود. قابل توجه است که مقدار $\lambda = \frac{1}{3}$ نه تنها بزرگترین خطای باقیمانده را دارد، بلکه زمان اجرا آن (20.156 ثانیه) نیز به‌طور چشمگیری از سایر مقادیر بیشتر است که نشان‌دهنده‌ی رفتار نامناسب عددی این پارامتر در فرآیند هم‌مکانی و حل

دستگاه غیرخطی می‌باشد. بنابراین، انتخاب $\lambda = \frac{1}{4}$ با وجود هزینه‌ی محاسباتی بالاتر، به دلیل دقت بسیار مطلوب، گزینه‌ی مناسبی برای مسئله است.

جدول (2): خطای باقیمانده و زمان اجرا (ثانیه) برای مقادیر مختلف λ

t	$\lambda = \frac{1}{4}$	$\lambda = \frac{1}{3}$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\lambda = \frac{2}{3}$	$\lambda = 1$
0/1	1/13e - 06	4/68e - 01	8/35e - 06	2/80e - 05	1/11e - 03
0/2	7/82e - 07	5/30e - 01	1/28e - 05	7/08e - 05	3/79e - 03
0/3	8/48e - 08	5/46e - 01	2/67e - 06	2/26e - 05	5/72e - 03
0/4	9/69e - 09	5/54e - 01	5/37e - 07	6/23e - 06	2/84e - 03
0/5	2/43e - 11	5/59e - 01	2/24e - 12	7/85e - 13	2/45e - 11
0/6	8/19e - 10	5/63e - 01	1/13e - 07	2/05e - 06	2/29e - 03
0/7	4/10e - 10	5/65e - 01	1/05e - 07	2/24e - 06	3/57e - 03
0/8	2/92e - 10	5/67e - 01	6/82e - 08	1/68e - 06	3/66e - 03
0/9	4/18e - 11	5/68e - 01	2/70e - 09	7/54e - 08	2/17e - 04
زمان اجرا	10/531	20/156	4/953	4/468	4/031

در جدول 3 که برای حالت کلاسیک با پارامترهای $\nu = 2$ ، $\alpha = 1$ ، $\beta = 1$ ، $m = 16$ ، $\lambda = \frac{1}{3}$ محاسبه شده است، مشاهده می‌شود که با افزایش عدد هارتمن از $H^2 = 0.5$ به $H^2 = 4$ ، سرعت سیال افزایش می‌یابد. این رفتار فیزیکی مطابق با انتظار بوده و نشان می‌دهد روش پیشنهادی برای هر دو مدل کسری و کلاسیک کارایی دارد. زمان‌های اجرای درج شده در انتهای جدول 3 نشان می‌دهد که با افزایش عدد هارتمن از $H^2 = 0.5$ به $H^2 = 4$ ، زمان محاسبات به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. این رفتار ناشی از کاهش مؤثر غیرخطی بودن مسئله در میدان‌های الکتریکی قوی‌تر است؛ چرا که افزایش H^2 نیروی محرکه‌ی الکتریکی را تقویت کرده و وابستگی جواب به جمله‌ی غیرخطی $\alpha u(t)$ را کاهش می‌دهد. در نتیجه، همگرایی روش نیوتن در حل دستگاه غیرخطی شتاب گرفته و هزینه‌ی محاسباتی کاهش می‌یابد.

جدول (3): نتایج عددی، خطای باقیمانده و زمان اجرا (ثانیه) برای مقادیر مختلف عدد هارتمن H^2

$H^2 = 0/5$	$H^2 = 1$	$H^2 = 2$	$H^2 = 4$
-------------	-----------	-----------	-----------

t	$u^*(t)$	E_{res}	$u^*(t)$	E_{res}	$u^*(t)$	E_{res}	$u^*(t)$	E_{res}
0/1	0/256284	$5/98e-06$	0/413503	$4/44e-07$	0/532940	$4/63e-06$	0/673579	$2/44e-05$
0/2	0/234253	$4/19e-06$	0/379370	$3/37e-07$	0/477708	$3/08e-07$	0/596476	$1/67e-06$
0/3	0/211676	$2/76e-06$	0/343590	$3/16e-07$	0/427972	$7/65e-09$	0/530145	$1/31e-07$
0/4	0/187467	$1/80e-06$	0/304921	$2/22e-07$	0/378963	$3/52e-08$	0/468170	$9/53e-08$
0/5	0/161364	$1/19e-06$	0/263103	$1/59e-07$	0/328215	$3/24e-08$	0/406702	$9/17e-08$
0/6	0/133280	$7/77e-07$	0/217990	$1/10e-07$	0/274126	$3/29e-08$	0/342598	$1/16e-07$
0/7	0/103165	$4/89e-07$	0/169399	$7/40e-08$	0/215432	$3/89e-08$	0/272924	$1/75e-07$
0/8	0/070964	$2/85e-07$	0/117087	$5/20e-08$	0/150971	$4/03e-08$	0/194734	$2/13e-07$
0/9	0/036605	$1/28e-07$	0/060743	$3/09e-08$	0/079576	$6/11e-08$	0/104908	$4/88e-07$
زمان اجرا	99/172		74/5		66/875		62/594	

برای تحلیل همگرایی روش، معادله‌ی (1) با پارامترهای $\nu = 1.8, \beta = 0.8, H^2 = 1$ و $\alpha = \frac{1}{4}$ حل شده است. نتایج در جدول 4 نشان می‌دهد که با افزایش تعداد پایه‌های برنولی از $m = 6$ به $m = 12$ ، خطای باقیمانده به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابد. به عنوان مثال، در $t = 0.1$ خطا از 1.05×10^{-3} به 3.86×10^{-7} رسیده که این نتایج می‌کند.

جدول (4): نتایج عددی، خطای باقیمانده و زمان اجرا (ثانیه) برای مقادیر مختلف m

	$m = 6$		$m = 8$		$m = 10$		$m = 12$	
t	$u^*(t)$	E_{res}	$u^*(t)$	E_{res}	$u^*(t)$	E_{res}	$u^*(t)$	E_{res}
0/1	0/502850	$1/05e-03$	0/340929	$4/75e-04$	0/467764	$1/20e-04$	0/348498	$3/86e-07$
0/2	0/457831	$1/82e-03$	0/301266	$1/54e-05$	0/407925	$7/39e-06$	0/310394	$3/40e-07$
0/3	0/408099	$4/49e-05$	0/265564	$1/73e-05$	0/357528	$1/56e-06$	0/276102	$4/74e-08$
0/4	0/357217	$5/26e-04$	0/231354	$8/69e-06$	0/311070	$3/63e-07$	0/242377	$6/85e-09$
0/5	0/305340	$6/70e-14$	0/197268	$7/61e-14$	0/265691	$1/14e-15$	0/207902	$1/11e-11$

0/6	0/251824 2/30e - 04	0/162351 2/18e - 06	0/219516 8/11e - 08	0/171872 8/52e - 10
0/7	0/195715 8/37e - 06	0/125831 9/85e - 07	0/171101 6/71e - 08	0/133654 7/36e - 10
0/8	0/135894 1/43e - 04	0/087030 1/53e - 07	0/119184 4/18e - 08	0/092663 2/87e - 10
0/9	0/071119 8/56e - 05	0/045301 4/19e - 07	0/062561 3/52e - 08	0/048315 1/06e - 10
زمان اجرا	0/282	4/656	7/672	9/953

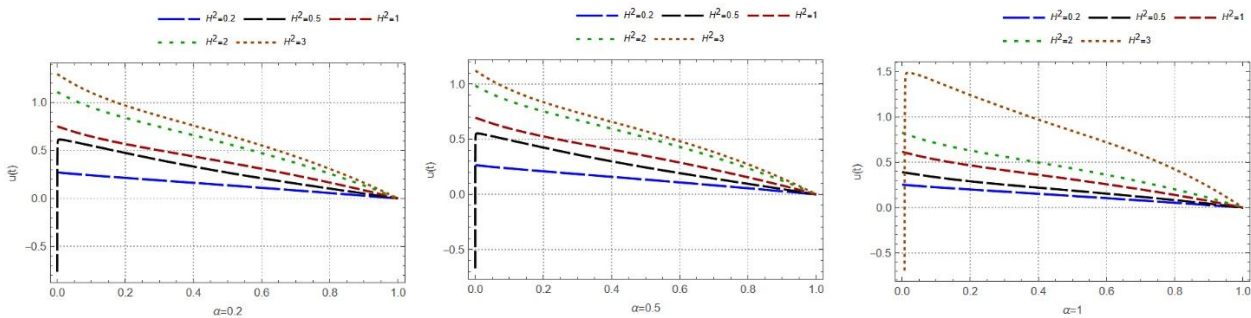
برای اعتبارسنجی کارایی طرح پیشنهادی، ما یک مطالعه مقایسه‌ای از حداکثر خطای باقیمانده در مقایسه با چند تکنیک معروف، از جمله روش موجک هار [22]، روش عددی مبتنی بر موجک هار [39] و روش تجزیه آدومیان گسسته [40]، ارائه می‌دهیم. نتایج برای $m = 18$ و $v = 2, \beta = 1, \alpha = 0.5$ و مقادیر مختلف H^2 در جدول 5 خلاصه شده است. این مقایسه‌ها به وضوح عملکرد برتر روش پیشنهادی را از نظر دقت و پایداری نشان می‌دهند.

جدول (5): مقایسه حداکثر باقیمانده روش پیشنهادی برای $m = 18$ و $v = 2, \beta = 1, \alpha = 0.5$ با برخی روش‌های دیگر

H^2	روش [22]	روش [39]	روش [40]	روش پیشنهادی
0/5	—	4/00e - 7	1/63e - 8	7/64e - 9
1	4/19e - 5	4/00e - 7	9/40e - 7	8/59e - 10
2	2/42e - 7	3/50e - 11	4/51e - 5	2/82e - 8

نقاط مجرا به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. این رفتار فیزیکی ناشی از تقویت میدان الکتریکی و افزایش نیروی محرکه وارد بر ذرات باردار است که منجر به افزایش دبی جریان می‌شود. همچنین مقایسه منحنی‌های مربوط به مقادیر مختلف α نشان می‌دهد که با افزایش این پارامتر، سرعت جریان کاهش می‌یابد.

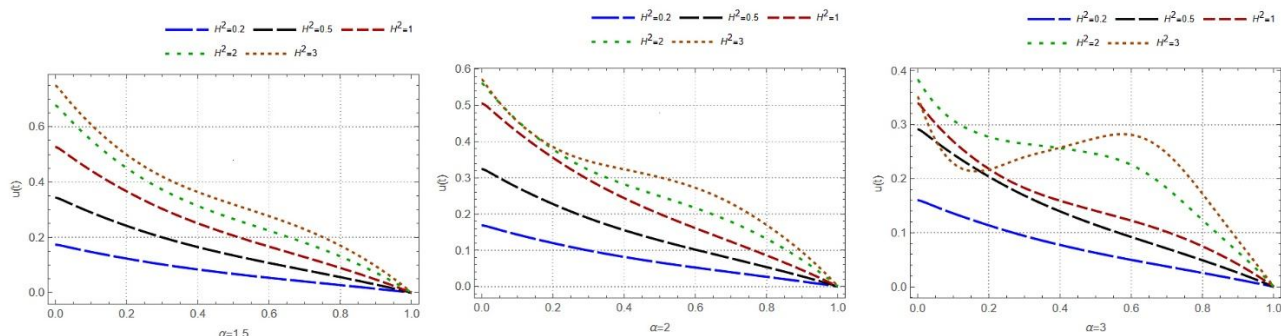
در شکل 1 که برای پارامترهای $m = 10, \beta = 0.9, v = 1.9$ رسم شده است، تأثیر عدد هارتمن بر پروفایل سرعت (توزیع تابع سرعت $u(t)$ در دامنه سیال) برای سه مقدار مختلف پارامتر غیرخطی $\alpha = 0.2, 0.5, 1$ مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای هر مقدار ثابت α ، با افزایش H^2 از 0.2 به 3، سرعت سیال در تمام



شکل (1): جواب بدست آمده برای مقادیر مختلف H^2 و $\alpha = 0.2, 0.5, 1$ داده شده با $m = 10$

غیرخطی این پارامتر بر توزیع سرعت در مجرا می‌باشد. همچنین مقایسه‌ی این نتایج با شکل 1 نشان می‌دهد که برای مقادیر بزرگ‌تر α ، اثر افزایش عدد هارتمن بر افزایش سرعت کمتر محسوس است و منحنی‌ها حساسیت کمتری نسبت به تغییرات H^2 نشان می‌دهند.

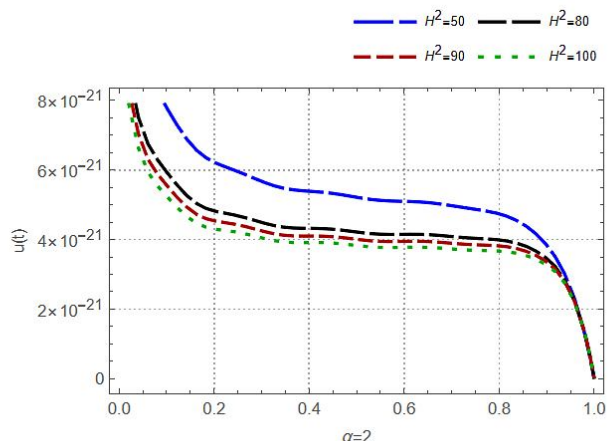
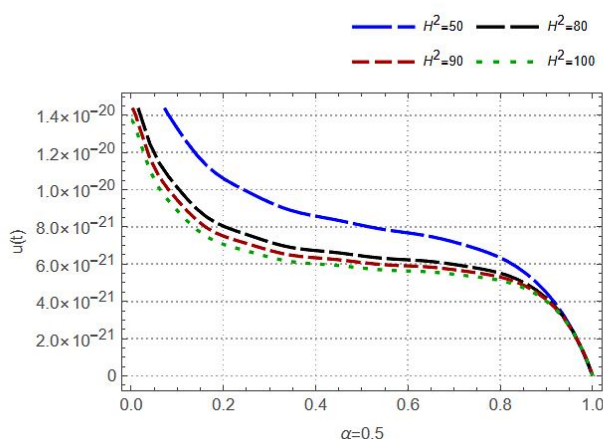
شکل 2 که برای پارامترهای $\nu = 1.9$ ، $\beta = 0.9$ ، $m = 10$ و $\lambda = 1$ رسم شده است، تأثیر عدد هارتمن بر پروفایل سرعت را برای مقادیر بزرگ‌تر پارامتر غیرخطی $\alpha = 1.5, 2, 3$ نشان می‌دهد. با افزایش α به مقادیر بزرگ‌تر، مشاهده می‌شود که سرعت سیال در تمام نقاط مجرا کاهش می‌یابد و شکل پروفایل نیز تغییر می‌کند که نشان‌دهنده تأثیر



شکل (2): جواب بدست آمده برای مقادیر مختلف H^2 و $\alpha = 1.5, 2, 3$ داده شده با $m = 10$

افزایش بیشتر H^2 ناچیز است. این پدیده نشان می‌دهد که پس از یک حد آستانه، افزایش بیشتر میدان الکتریکی تأثیر چندانی بر افزایش سرعت جریان ندارد که می‌تواند ناشی از اثرات اشباع در سیستم باشد.

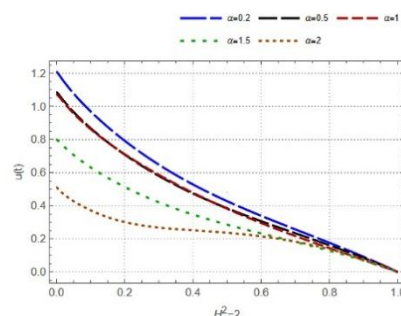
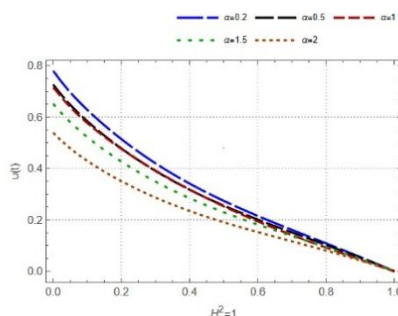
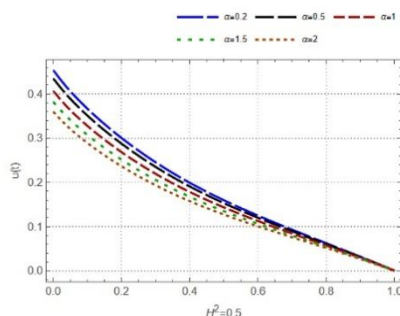
در شکل 3 که برای پارامترهای $\nu = 1.9$ ، $\beta = 0.9$ ، $m = 14$ و $\lambda = 1$ رسم شده است، رفتار جریان برای اعداد هارتمن $H^2 = 50, 80, 90, 100$ مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که برای این مقادیر بزرگ H^2 ، پروفایل‌های سرعت تقریباً بر هم منطبق شده و تغییرات سرعت نسبت به



شکل (3): جواب بدست آمده برای مقادیر بزرگ H^2 و $\alpha = 0.5, 2$ داده شده با $m = 14$

سرعت کاهش می‌یابد و برای مقادیر ثابت α ، با افزایش H^2 سرعت افزایش می‌یابد. این نتایج تعامل پیچیده بین این دو پارامتر را در تعیین رفتار جریان نشان می‌دهد.

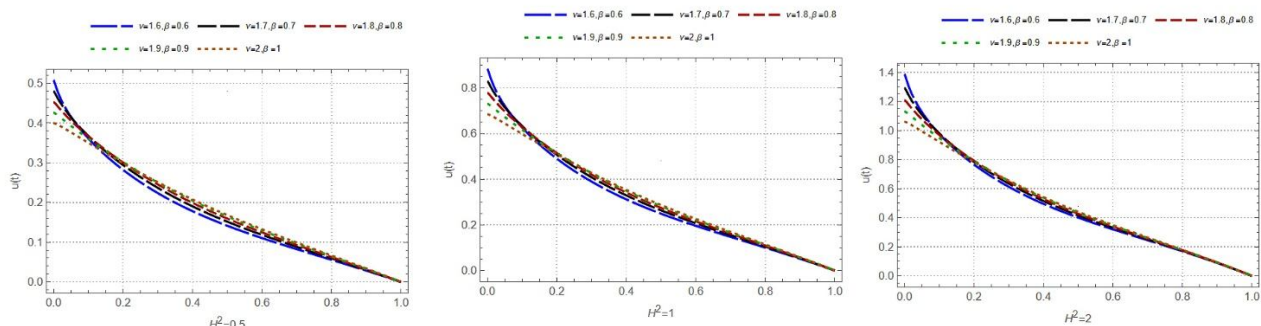
شکل 4 که برای پارامترهای $m = 14$ ، $\beta = 0.8$ ، $\nu = 1.8$ و $\lambda = 1$ رسم شده است، تأثیر همزمان پارامتر غیرخطی α و عدد هارتمن H^2 بر پروفایل سرعت را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای مقادیر ثابت H^2 ، با افزایش α



شکل (4): جواب بدست آمده برای مقادیر مختلف α و عدد هارتمن $H^2 = 0.5, 1, 2$ داده شده با $m = 14$

غیرموضعی در سیستم است. این نتایج اهمیت استفاده از مدل‌سازی کسری را در شبیه‌سازی دقیق‌تر پدیده‌های فیزیکی نشان می‌دهد. همچنین اثر افزایش عدد هارتمن در هر دسته از منحنی‌ها به وضوح قابل مشاهده است.

در شکل 5 که برای $m = 14$ ، $\lambda = 1$ و $\alpha = 0.2$ رسم شده است، تأثیر مرتبه‌های کسری ν و β بر پروفایل سرعت برای مقادیر مختلف عدد هارتمن بررسی شده است. با تغییر مرتبه‌های کسری، مشاهده می‌شود که پروفایل سرعت تغییرات محسوسی داشته که نشان‌دهنده تأثیر حافظه بلندمدت و اثرات



شکل (5): جواب بدست آمده برای مقادیر مختلف ν و β و عدد هارتمن $H^2 = 0.5, 1, 2$ داده شده با $m = 14$

6. بحث و نتیجه گیری

غیرخطی به یک دستگاه جبری غیرخطی اعمال شده است و برای حل دستگاه بدست آمده، از روش تکرار نیوتن استفاده شده است.

همانطور که قبلاً ذکر شد، دو پارامتر مهم در جریان EHD وجود دارد. برای تحلیل تأثیر پارامترهای عملیاتی، معادله را برای مقادیر مختلف پارامتر غیرخطی α و عدد الکتریکی هارتمن H حل کردیم. همچنین، مقادیر مختلفی برای القای مرتبه کسری مشتقات مدل EHD با $0 < 1 \leq \nu \leq 2$ و $\beta \leq 1$ در نظر گرفته شده و نتایج زیر به دست آمده است:

تأثیر عدد هارتمن H : برای بررسی تأثیر عدد الکتریکی هارتمن جریان EHD در حل های عددی روش معرفی شده، مقدار این پارامتر را تغییر دادیم. در تمام قسمت های شکل های 1 و 2، رابطه مستقیم بین سرعت ذرات یونیزه شده و عدد هارتمن مشهود است، یعنی با افزایش عدد الکتریکی هارتمن، سرعت جریان در رسانا افزایش می یابد و برعکس. اما باید توجه داشت که تفاوت قابل توجهی بین سرعت جریان در ورودی رسانا برای مقادیر بزرگ H^2 وجود ندارد. به طور دقیق تر، جواب تقریبی مسئله اصلی برای برخی از اعداد هارتمن بزرگ و ثابت α تقریباً یکسان هستند. در واقع اعداد هارتمن در بازه (0,3) بر جواب ها در $t = 0$ تأثیر گذاشته اند (شکل 2 را ببینید)، ولی همانطور که در شکل 3 می بینیم، سرعت در ورودی مجرا برای مقادیر بزرگ عدد هارتمن تقریباً یکسان

در مطالعه حاضر، یک تکنیک جدید و کاربردی برای حل مسئله مقدار مرزی غیرخطی مرتبه کسری ناشی از جریان EHD در یک مجرای استوانه ای توسعه داده شده است. مسئله مذکور منفرد و به شدت غیرخطی است. روش طیفی معروف هم مکانی، از طریق ترکیب چند جمله ای های برنولی مرتبه کسری و بسط سینوس هایپربولیک به عنوان توابع پایه برای دستیابی به جواب عددی مسئله اصلی به کار گرفته شده است. برای این منظور، ما از قاعده انتگرال گیری فزونی نوع دوم برای محاسبه عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل بر روی این پایه ها بهره برده ایم. رویکرد پیشنهادی مبتنی بر روش هم مکانی است که در آن ریشه های چند جمله ای های لژاندر انتقال یافته به عنوان گره های هم مکانی انتخاب می شوند. با جایگزینی گره ها و بهره گیری از وزن های مثبت قاعده فزونی، ناپایداری های عددی در همسایگی مبدأ برطرف شد و در نتیجه، بر تکینگی و همچنین غیرخطی بودن مسئله غلبه کردیم و این مزیت تکنیک پیشنهادی است. همانطور که قبلاً اشاره کردیم، توزیع غیریکواخت ریشه های لژاندر انتقال یافته در نزدیکی مرزها متراکم تر است؛ بنابراین با توجه به این ویژگی، انتخاب این نقاط به عنوان گره های هم مکانی، منجر به ثبت دقیق تر رفتار مرزی و گرادیان های تیز می شود و این مزیت رویکرد پیشنهادی است. روش پیشنهادی برای کاهش مسئله

مدل غیر کسری ($\beta = 1, \nu = 2$) را می‌توان از نمودارهای شکل 5 نتیجه گرفت.

بر اساس نتایج این پژوهش، مسیرهای زیر برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود: تعمیم روش برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، بکارگیری روش در مسائل دینامیک سیالات محاسباتی پیشرفته و توسعه روش برای سیستم‌های معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی. همچنین، اگرچه روش طیفی پیشنهادی مبتنی بر پایه‌های برنولی-هایبرولیک از دقت و همگرایی مطلوبی برخوردار است، پیشرفت‌های اخیر در حوزه یادگیری ماشین و هوش مصنوعی، افق‌های جدیدی را برای حل مسائل کسری گشوده‌اند. از این رو، بررسی و توسعه رویکردهای داده‌محور نظیر شبکه‌های عصبی آگاه از فیزیک [41]، معماری‌های نوین شبکه‌های عصبی ویژه معادلات دیفرانسیل کسری [42] و روش‌های ترکیبی مبتنی بر تکامل دستوری و رگرسیون بردار پشتیبان حداقل مربعات [43]، می‌تواند به‌عنوان مکملی مؤثر در کنار روش‌های عددی کلاسیک مورد توجه قرار گیرد. در این راستا، ارزیابی و مقایسه دقت، نرخ همگرایی و هزینه محاسباتی این رویکردها با روش طیفی پیشنهادی حاضر، می‌تواند زمینه‌ساز توسعه چارچوب‌های محاسباتی کارآمدتر برای حل مسائل پیچیده کسری در پژوهش‌های آینده باشد. همچنین، همانطور که در این مطالعه مشاهده شد انتخاب λ تأثیر چشمگیری بر همگرایی، دقت و هزینه محاسباتی روش دارد (جدول 2)، از این رو، به عنوان یکی از مسیرهای مهم پژوهش در آینده، بررسی سیستماتیک روش‌هایی برای تعیین مقدار بهینه λ بر اساس پارامترهای مسئله پیشنهاد می‌شود.

تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافی ندارند.

است، چه برای غیرخطی بودن ضعیف و چه برای غیرخطی بودن قوی. در این شکل، عدد هارتمن برای $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 2$ مقادیر 50، 80، 90 و 100 را به خود گرفته است که نمودارهای $H^2 = 80, 90, 100$ نزدیک به هم هستند. در حالی که، همانطور که در شکل 2 نشان داده شده است، تفاوت بین سرعت سیال برای مقادیر کوچک $H^2 = 0.2, 0.5, 1, 2, 3$ برای غیرخطی بودن قوی و ضعیف α کاملاً مشهود است. در نتیجه، تأثیر مقادیر بزرگ عدد هارتمن، به ویژه برای $H^2 \geq 80$ ، بر سرعت سیال چندان چشمگیر نیست.

تأثیر پارامتر غیرخطی α : برای مطالعه تأثیر پارامتر غیرخطی بودن، جواب تقریبی معادله‌ی (1) را برای هر دو مدل کسری و غیر کسری به دست آوردیم. همانطور که در شکل 4 مشاهده می‌کنیم، با افزایش مقدار α ، سرعت ذرات یونیزه شده جریان کاهش می‌یابد. همچنین، شکل 2 نشان می‌دهد که برای $H^2 = 3$ ، سرعت سیال در مجرای ورودی برای $\alpha = 1.5$ برابر 0.7، و برای $\alpha = 3$ برابر 0.4 است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که بین پارامتر غیرخطی بودن و سرعت ذرات یونیزه شده جریان رابطه معکوس وجود دارد، یعنی سرعت جریان برای مقادیر بزرگتر α کاهش می‌یابد.

اثر القای مشتق کسری: برای مطالعه تأثیر مشتقات مرتبه کسری در معادله‌ی (1)، مقادیر ثابتی را برای پارامتر غیرخطی بودن α و عدد هارتمن H^2 در نظر می‌گیریم و مقادیر مختلفی را برای β و ν قرار می‌دهیم. در شکل 5، نمودارهای جواب‌های عددی برای $\alpha = 0.2$ ، $H^2 = 0.5, 1, 2$ برای مقادیر مختلف β و ν رسم شده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که با افزایش مرتبه مشتقات کسری، سرعت جریان کاهش می‌یابد و رابطه معکوسی بین مشتقات مرتبه کسری و سرعت جریان وجود دارد. همگرایی جواب‌های مدل مرتبه کسری به جواب‌های

نویسندگان مراتب قدردانی خود را از داوران بابت مطالعه دقیق

مقاله و ارائه نظرات و پیشنهادهایی که موجب ارتقای کیفیت

آن شده است، ابراز می‌دارند.

مراجع

- [9] O. M. Stuetzer, "Ion drag pressure generation," *J. Appl. Phys.*, vol. 30, no. 7, pp. 984–994, 1959, doi: 10.1063/1.1777003.
- [10] J. Seyed-Yagoobi, J. Bryan, and J. Castaneda, "Theoretical analysis of ion-drag pumping," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 31, no. 3, pp. 469–476, 1995, doi: 10.1109/ias.1992.244252.
- [11] J. E. Paullet, "On the solutions of electrohydrodynamic flow in a circular cylindrical conduit," *ZAMM - J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79, no. 5, pp. 357–360, 1999, doi: 10.1002/(sici)1521-4001(199905)79:5<357::aid-zamm357>3.0.co;2-b.
- [12] M. B. Riaz, F. Jarad, D. Baleanu, and M. Asgir, "Theoretical study of MHD Maxwell fluid with combined effect of heat and mass transfer via local and nonlocal time derivatives," *Fractals*, vol. 30, no. 01, pp. 2240010, 2022, doi: 10.1142/S0218348X22400102.
- [13] J. Jiang, M. Liu, H. Zhao, and Y. Zhang, "The Numerical Analysis of the Fractional Maxwell Fluid in Porous Rock Formations," *Math. Method Appl. Sci.*, vol. 48, no. 8, pp. 9140–9150, 2025, doi: 10.1002/mma.10786.
- [14] Y. Li, Z. Zhou and N. Zhang, "Fractional derivative method for anomalous aquitard flow in a leaky aquifer system with depth-decaying aquitard hydraulic conductivity," *Water Research*, vol. 249, pp. 120957, 2024, doi: 10.1016/j.watres.2023.120957.
- [15] J. H. He, "Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 167, no. 1-2, pp. 57–68, 1998, doi: 10.1016/s0045-7825(98)00108-x.
- [16] S. Momani and Z. Odibat, "Analytical solution of a time-fractional Navier–Stokes equation by Adomian decomposition method," *Appl. Math. Comput.*, vol. 177, no. 2, pp. 488–494, 2006, doi: 10.1016/j.amc.2005.11.025.
- [17] M. N. Sahlan and H. Afshari, "Lucas polynomials based spectral methods for solving the fractional order electrohydrodynamics flow model," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 107, pp. 106108, 2022, doi: 10.1016/j.cnsns.2021.106108.
- [18] M. Abukhaled and S. A. Khuri, "A fast convergent semi-analytic method for an electrohydrodynamic flow in a circular cylindrical conduit," *Int. J. Appl.*
- [1] S. Thirumalai and R. Seshadri, "Spectral solutions of fractional differential equation modelling electrohydrodynamics flow in a cylindrical conduit," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 79, pp. 104931, 2019, doi: 10.1016/j.cnsns.2019.104931.
- [2] J. R. Melcher, *Continuum Electromechanics*, MIT Press, 1981.
- [3] J. Crowley, G. Wright, and J. Chato, "Selecting a working fluid to increase the efficiency and flow rate of an EHD pump," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 26, no. 1, pp. 42–49, 1990, doi: 10.1109/28.52672.
- [4] A. C. Eringen and G. A. Maugin, *Electrodynamics of Continua I*. Springer-Verlag, 1990, doi: 10.1007/978-1-4612-3226-1.
- [5] K. Edamura and Y. Otsubo, "A continuous inkjet device on the basis of electrohydrodynamic mechanism," *J. Imaging Sci. Technol.*, vol. 48, no. 2, pp. 148–152, 2004, doi: 10.2352/j.imagingsci.technol.2004.48.2.art00011.
- [6] C. H. Park, K. H. Kim, J. C. Lee, and J. Lee, "In-situ nanofabrication via electrohydrodynamic jetting of countercharged nozzles," *Polym. Bull.*, vol. 61, no. 4, pp. 521–528, 2008, doi: 10.1007/s00289-008-0976-9.
- [7] N. G. Green, A. Ramos, A. Gonzalez, H. Morgan, and A. Castellanos, "Fluid flow induced by non-uniform AC electric fields in electrolytes on microelectrodes III: Observation of streamlines and numerical simulation," *Phys. Rev. E*, vol. 66, no. 2, pp. 026305, 2002, doi: 10.1103/physreve.66.026305.
- [8] M. Driouich, K. Gueraoui, M. Sammouda, Y. M. Haddad, and I. Aberdane, "The effect of electric field on the flow of a compressible ionized fluid in a cylindrical tube," *Adv. Stud. Theor. Phys.*, vol. 6, no. 14, pp. 687–696, 2012.

- [28] C. Li and F. Zeng, *Numerical Methods for Fractional Calculus*, CRC Press, 2015.
- [29] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.
- [30] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, World Scientific, 2010, doi: 10.1016/S0076-5392(99)80001-0.
- [31] E. Keshavarz, Y. Ordokhani, and M. Razzaghi, "A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials," *J. Vib. Control*, vol. 22, no. 18, pp. 3889–3903, 2016, doi: 10.1177/1077546314567181.
- [32] R. L. Bagley and P. J. Torvik, "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity," *J. Rheol.*, vol. 27, no. 3, pp. 201–210, 1983, doi: 10.1122/1.549724.
- [33] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, 2010, doi: 10.1007/978-3-642-14574-2.
- [34] M. Pourbabaee and A. Saadatmandi, "New operational matrix of Riemann–Liouville fractional derivative of orthonormal Bernoulli polynomials for the numerical solution of some distributed-order time-fractional partial differential equations," *J. Appl. Anal. Comput.*, vol. 13, no. 6, pp. 3352–3373, 2023, doi: 10.11948/20230039.
- [35] L. Fejér, "Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen," *Math. Z.*, vol. 37, pp. 287–309, 1933, doi: 10.1007/bf01474575.
- [36] J. Waldvogel, "Fast Construction of the Fejér and Clenshaw–Curtis Quadrature Rules," *BIT Numer. Math.*, vol. 43, no. 1, pp. 1–18, 2003, doi: 10.1007/s10543-006-0045-4.
- [37] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, and T. A. Zang, *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. Springer, 2006, doi: 10.1007/978-3-540-30726-6.
- [38] P. Rahimkhani, and M. H. Heydari, "Fractional shifted morgan-voynce neural networks for solving fractal– fractional pantograph differential equations," *Chaos Soliton Fract.*, 2023, doi: 10.1016/j.chaos.2023.114070.
- [39] S. C. Shiralashetti, "Haar wavelet based numerical method for the solution of non-linear boundary value Comput. Math., vol. 7, no. 2, 2021, doi: 10.1007/s40819-021-00974-y.
- [19] E. Hosseini, G. B. Loghmani, M. Heydari, and A. M. Wazwaz, "A numerical study of electrohydrodynamic flow analysis in a circular cylindrical conduit using orthonormal Bernstein polynomials," *Comput. Methods Differ. Equ.*, vol. 5, no. 4, pp. 280–300, 2017, doi: 10.1001.1.23453982.2017.5.4.3.7.
- [20] S. E. Ghasemi, M. Hatami, G. H. R. Mehdizadeh Ahangar, and D. D. Ganji, "Electrohydrodynamic flow analysis in a circular cylindrical conduit using least square method," *J. Electrostat.*, vol. 72, pp. 47–52, 2014, doi: 10.1016/j.elstat.2013.11.005.
- [21] P. Roul, H. Madduri, and K. Kassner, "A sixth-order numerical method for a strongly nonlinear singular boundary value problem governing electrohydrodynamic flow in a circular cylindrical conduit," *Appl. Math. Comput.*, vol. 350, pp. 416–433, 2019, doi: 10.1016/j.amc.2018.12.070.
- [22] S. C. Shiralashetti, M. H. Kantli, and A. B. Deshi, "Haar wavelet based numerical solution of nonlinear differential equations arising in fluid dynamics," *Int. J. Comput. Mater. Sci. Eng.*, vol. 5, no. 2, p. 1650010, 2016, doi: 10.1142/s204768411650010x.
- [23] M. Moghtadaei, H. Saberi Nik, and S. Abbasbandy, "A spectral method for the electrohydrodynamic flow in a circular cylindrical conduit," *Chin. Ann. Math. Ser. B*, vol. 36, no. 2, pp. 307–322, 2015, doi: 10.1007/s11401-015-0882-z.
- [24] A. Mastroberardino, "Homotopy analysis method applied to electrohydrodynamic flow," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 16, no. 7, pp. 2730–2736, 2011, doi: 10.1016/j.cnsns.2010.10.004.
- [25] S. Mosayebdorchesh, "Taylor series solution of the electrohydrodynamic flow equation," *J. Mech. Eng. Technol.*, vol. 1, no. 2, pp. 40–45, 2013, doi: 10.18005/JMET0102001.
- [26] A. Akgül, D. Baleanu, and F. Tchier, "On the solutions of electrohydrodynamic flow with fractional differential equations by reproducing kernel method," *Open Phys.*, vol. 14, no. 1, pp. 685–689, 2016, doi: 10.1515/phys-2016-0077.
- [27] M. M. Sabir, "Electrohydrodynamic flow solution in ion drag in a circular cylindrical conduit using hybrid neural network and genetic algorithm," *Kuwait J. Sci.*, vol. 45, no. 1, pp. 20–28, 2018.

problems arising in fluid dynamics," *Int. J. Eng. Sci. Math.*, vol. 6, no. 8, pp. 27–39, 2017.

- [40] P. Roul, and H. A. Madduri, "A new approximate method and its convergence for a strongly nonlinear problem governing electrohydrodynamic flow of a fluid in a circular cylindrical conduit," *Appl. Math. Comput.*, vol. 341, pp. 335-347, 2019, doi: 10.1016/j.amc.2018.09.010.
- [41] M. M. Moghaddam, H. D. Mazraeh, and K. Parand, "Symbolic solution of fractional Volterra population models via physics-informed neural networks and distributed particle swarm optimization," *Appl. Soft Comput.*, 114512, 2025, doi: 10.1016/j.asoc.2025.114512.
- [42] H. Dana Mazraeh, A. Nosrati Firoozsalari, A. Afzal Aghaei, and K. Parand, "A novel neural network architecture for solving fractional differential equation," *Comput. Methods Differ. Equ.*, 2025, doi: 10.22034/cmde.2025.63059.2803.
- [43] H. Dana Mazraeh, and K. Parand, "GELS-SVR: a combination of grammatical evolution and least squares support vector regression for symbolic solution to Falkner-Skan equation," *Genet Program Evolvable Mach.*, vol. 27, no. 1, 3. 2026, doi: 10.1007/s10710-025-09527-4.