

یک روش مبتنی بر جستجوی ممنوعه برای یافتن مجموعه

متریک l -خوشه در گراف‌ها

نرجس سابقی^۱، استادیار، مصطفی توکلی^{*}، دانشیار

^۱ گروه ریاضی - دانشکده علوم پایه - دانشگاه ولایت - ایرانشهر - ایران - n.sabeghi@velayat.ac.ir

^۲ گروه ریاضی کاربردی - دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - m_tavakoli@um.ac.ir

چکیده: در این مقاله، الگوریتمی مبتنی بر جستجوی ممنوعه برای یافتن مجموعه مولد متریک l -خوشه در گراف‌های همبند ارائه می‌شود. هدف از این الگوریتم، کمینه‌سازی اندازه مجموعه‌ای از رئوس است که می‌تواند خوشه‌های l -تایی را در گراف به‌صورت یکتا شناسایی کند. این مسئله که تعمیمی از بعد متریک کلاسیک است، به دلیل پیچیدگی محاسباتی از نوع NP-سخت، نیازمند استفاده از روش‌های بهینه‌سازی ابتکاری است. الگوریتم پیشنهادی با استفاده از یک لیست ممنوعه و ایجاد مجموعه‌های همسایگی به جستجوی مجموعه بهینه پرداخته و به کمک یک تابع ارزیابی، تعداد رئوس با کد متریک یکسان را به حداقل می‌رساند. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که این روش می‌تواند کارایی بالایی در شناسایی ساختارهای گروهی در شبکه‌های پیچیده داشته باشد و در حوزه‌هایی نظیر تحلیل شبکه و داده‌کاوی کاربرد دارد.

واژه‌های کلیدی: جستجوی ممنوعه، بعد متریک l -خوشه، مجموعه مولد متریک، خدمات تحویل کالا.

* نویسنده مسئول، m_tavakoli@um.ac.ir

A Tabu Search-Based Approach for Finding the Optimal l -Clique Metric Generator Set in Graphs

Narjes Sabeghi¹, Assistant Professor, Mostafa Tavakoli^{2*}, Associate Professor

¹Dept. of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Velayat University, Iranshahr, Iran, n.sabeghi@velayat.ac.ir

² Dept. of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences,
Ferdowsi University of Mashhad, P.O. Box 1159, Mashhad 91775, Iran,

m_tavakoli@um.ac.ir

Abstract: In this paper, a **Tabu Search**-based algorithm is proposed to find the **l -clique metric generator set** in connected graphs. The algorithm aims to minimize the size of a set of vertices that can uniquely identify the l -cliques in the graph. This problem, as a generalization of the classical metric dimension, is NP-hard and requires heuristic optimization methods due to its computational complexity. The proposed algorithm uses a tabu list and generates neighboring sets to search for an optimal solution, and through an evaluation function, it minimizes the number of vertices with identical metric codes. The results demonstrate that this approach is highly effective in identifying group structures in complex networks, with potential applications in network analysis and data mining.

Keywords: Tabu Search, l -Clique Metric Dimension, Metric Generator Set, Delivery service.

* **Corresponding author**, m_tavakoli@um.ac.ir.

۱. مقدمه

شناسایی دقیق ساختارهای گروهی و خوشه‌های مختلف در گراف‌ها از موضوعات مهم در نظریه گراف و کاربردهای آن در شبکه‌های پیچیده است. یکی از ابزارهای مؤثر برای شناسایی این ساختارها، مفهوم **بعد متریک**^۱ است که برای تعیین مجموعه‌ای از رئوس به کار می‌رود تا هر رأس گراف را بر اساس فاصله از این مجموعه به‌طور یکتا شناسایی کند. با این حال، در بسیاری از شبکه‌های بزرگ، شناسایی یکتای رئوس کافی نیست و نیاز است تا ساختارهای بزرگتر و پیچیده‌تری همچون خوشه‌های l -تایی، به‌طور یکتا قابل شناسایی باشند. از این رو، مفهوم **بعد متریک l -خوشه**^۲ به‌عنوان تعمیمی از بعد متریک کلاسیک مطرح می‌شود.

برای دو رأس u و v از یک گراف همبند G ، **فاصله** بین u و v که با نماد $d_G(u, v)$ نشان داده می‌شود تعداد یال‌های موجود در کوتاه‌ترین مسیر بین u و v را نشان می‌دهد. یک زیرمجموعه مرتب غیرتهی از رئوس $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ به‌عنوان **مولد متریک** شناخته می‌شود اگر بتواند هر رأس گراف را با فاصله‌های منحصربه‌فردی نسبت به رئوس S مشخص کند. در واقع، مجموعه S باید به‌گونه‌ای انتخاب شود که فاصله بین هر رأس گراف و رئوس این مجموعه، نشان‌دهنده یک بردار منحصربه‌فرد باشد. کوچکترین اندازه ممکن برای یک مولد متریک، **بعد متریک** گراف G نامیده می‌شود و با $\dim(G)$ نشان داده می‌شود [۲].

این مفهوم به‌طور وسیعی در مدل‌سازی مسائل واقعی کاربرد دارد، چرا که می‌تواند به یافتن موقعیت‌های خاص در شبکه‌ها کمک کند. محققان نشان داده‌اند که محاسبه بعد متریک،

یک مسئله پیچیده از نوع NP-سخت است ([۳]، [۴]). برای مشاهده کاربرد این پارامتر در ناوبری ربات‌ها و به مرجع [۱۰] مراجعه نمایید. برای آشنایی با بیشتر با انواع دیگر بعد متریک مانند بعد متریک محلی مرجع [۸] را مطالعه فرمایید. بعد متریک l -خوشه، تعمیمی از بعد متریک کلاسیک است که در آن خوشه‌های l -تایی به جای رئوس فردی استفاده می‌شوند.

یک خوشه l -تایی V' از G یک زیرمجموعه از رئوس G است که همه رئوس آن با یکدیگر همسایه هستند و اندازه آن l است. برای هر خوشه l -تایی V' و هر رأس u در گراف، فاصله u از V' $d_G(u, V')$ برابر است با کمترین فاصله بین u و هر کدام از رئوس V' . به عبارت دیگر:

$$d_G(u, V') = \min\{d_G(u, v) : v \in V'\}$$

حال، برای یک زیرمجموعه مرتب غیرتهی از رئوس، $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ یک خوشه l -تایی V' بردار نمایش **متریک l -خوشه**^۳ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$r_G^l(V'|S) = (d_G(V', v_1), \dots, d_G(V', v_k)).$$

یک زیرمجموعه غیرتهی S از $V(G)$ یک **مولد متریک l -خوشه**^۴ نامیده می‌شود، اگر همه خوشه‌های l -تایی گراف دارای بردارهای نمایش متریک متفاوتی باشند. بعد متریک l -خوشه، کمترین اندازه‌ای است که یک مولد متریک l -خوشه می‌تواند داشته باشد و با $\dim_l(G)$ نشان داده می‌شود. مفهوم بعد متریک l -خوشه برای نخستین بار در [۱] معرفی شده و در مطالعات بعدی نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

بنابراین، بعد متریک l -خوشه روشی است برای شناسایی و تمایز دادن خوشه‌ها در گراف براساس فاصله‌ی آن‌ها از

^۳ I-Clique metric representation vector^۴ I-Clique metric generators^۱ Metric Dimension^۲ I-Clique Metric Dimension

مجموعه خاصی از رئوس و به عنوان تعمیمی از متریک کلاسیک به کار می‌رود.

در حوزه تعیین بعد متریک گراف، روش‌های گوناگونی برای مسئله کلاسیک ارائه شده‌اند؛ از جمله الگوریتم‌های دقیق برای گراف‌های خاص و الگوریتم‌های فرااکتشافی مانند الگوریتم ژنتیک، جستجوی ممنوعه و الگوریتم کلونی مورچه‌ها [۲، ۴]. با این حال، تا زمان نگارش این مقاله، هیچ الگوریتم تقریبی یا فرااکتشافی برای مسئله تعیین بعد متریک l -خوشه در متون علمی یافت نشده است. در نتیجه، بر اساس اطلاعات ما الگوریتم پیشنهادی ما مبتنی بر جستجوی ممنوعه، نخستین روش تقریبی برای این مسئله به‌شمار می‌رود. این الگوریتم با بهره‌گیری از ساختار مسئله، توانسته در نمونه‌های متنوع نتایج دقیقی ارائه دهد و عملکرد مناسبی از خود نشان دهد.

توجه داریم که به‌ازای هر l ، مجموعه رئوس گراف یک مجموعه مولد متریک l -خوشه برای آن گراف است. محققان در مرجع [۱] نشان داده‌اند که محاسبه بعد متریک l -خوشه، یک مسئله پیچیده از نوع NP-سخت است. در نتیجه، استفاده از روش‌های بهینه‌سازی ابتکاری برای حل این مسئله ضروری به نظر می‌رسد. یکی از موثرترین الگوریتم‌های ابتکاری برای حل مسائل پیچیده در بهینه‌سازی گراف‌ها، الگوریتم جستجوی ممنوعه^۵ است [۵]. این الگوریتم با استفاده از لیست ممنوع و جستجوی هوشمندانه در فضای همسایگی، توانایی عبور از نقاط بهینه محلی را دارد و می‌تواند به یافتن مجموعه‌های متریک بهینه کمک کند. گرچه مسئله یافتن خوشه‌های l -تایی، از کلاس مسائل NP-سخت است، ولی یافتن خوشه‌های l -تایی بسیاری از خانواده‌های معروف گراف‌ها مانند ابرمکعب‌ها، گراف‌های درخت و گراف‌های کامل در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه است. علی‌رغم این که هیچ الگوریتمی با زمان اجرای چند جمله‌ای برای حل این مسئله برای هر گراف دلخواه وجود ندارد، اما الگوریتم‌هایی نظیر الگوریتم برون-کربوش^۶ برای پیدا کردن همه خوشه‌های ماکسیمال در گراف داده شده کاربرد دارد.

سایر نمادها از مراجع [۷ و ۹ و ۱۲] آورده شده است.

^۵ Tabu Search

^۶ Bron-Kerbosch

۲. روش فرااکتشافی مبتنی بر جستجوی ممنوعه برای

محاسبه بعد متریک l -خوشه

بعد متریک l -خوشه، که به شناسایی مجموعه‌های خوشه l -تایی در گراف‌ها می‌پردازد، چالشی جدید در بهینه‌سازی ساختارهای گرافی ایجاد کرده است، زیرا یافتن کوچک‌ترین مجموعه‌ای که بتواند خوشه‌های مختلف را به‌طور یکتا متمایز کند، یک مسئله NP-سخت است.

در این بخش، ما از الگوریتم جستجوی ممنوعه برای یافتن مجموعه مولد متریک l -خوشه در گراف‌های همبند استفاده می‌کنیم. هدف این است که کوچک‌ترین مجموعه‌ای از رئوس را پیدا کنیم که بتواند خوشه‌های l -تایی گراف را به‌طور یکتا شناسایی کند. نتایج به‌دست‌آمده از این الگوریتم می‌تواند در بهبود کارایی سیستم‌های شناسایی شبکه‌های پیچیده، تحلیل خوشه‌های داده و بهینه‌سازی ساختارهای گروهی در گراف‌های بزرگ مؤثر باشد.

الگوریتم ۱: الگوریتم TS برای پیدا کردن مجموعه متریک l -خوشه

ورودی: گراف G ، خوشه‌های l -تایی، یک مجموعه k -تایی S حداکثر تعداد تکرار الگوریتم، N و حداکثر طول لیست ممنوعه، t . خروجی: یک مجموعه متریک k -تایی.

۱. یک لیست خالی TL ایجاد کن.

۲. مجموعه S را به کمک تابع $Value$ ارزیابی کن.

۳. مادامی که تعداد تکرارهای حلقه کمتر از N است یا

$$Value(S) > 0 \text{ انجام بده:}$$

1.3. S را به TL اضافه کن.

2.3. اگر اندازه TL بزرگتر یا مساوی t است، اولین عضوی که وارد لیست شده است را از لیست TL حذف و لیست را بروز کن.

۳،۳. مجموعه همسایگی NS از S را پیدا کن.

4.3. هر عضو NS را به کمک تابع $Value$ ارزیابی کن.

5.3. بهترین همسایه S ، عضو NS با کمترین مقدار $Value$

را در $Nbest$ قرار بده.

6.3. اگر $Value(S) < Value(Nbest)$ ، آنگاه S را به

عنوان بهترین جواب برگردان و از حلقه خارج شو.

7.3. $Nbest$ را جایگزین S کن.

است:

۴. S و $Value(S)$ را برگردان.

مجموعه S فعلی به TL اضافه می‌شود. اگر اندازه TL بیشتر یا مساوی t شود، اولین عضو اضافه شده به TL حذف می‌شود تا فضای لازم برای ثبت مجموعه‌های جدید فراهم شود.

مجموعه همسایگی‌های NS به عنوان گزینه‌های جایگزین برای S در نظر گرفته می‌شوند. برای هر عضو همسایگی NS ، مقدار تابع $Value$ محاسبه می‌شود و بهترین عضو همسایگی NS ، که کمترین مقدار $Value$ را داراست، به عنوان $Nbest$ انتخاب می‌شود.

ورودی‌ها:

اگر $Value(S) < Value(Nbest)$ باشد، مجموعه فعلی S به عنوان جواب بهینه در نظر گرفته شده و از حلقه خارج می‌شود. در غیر این صورت، $Nbest$ جایگزین S می‌شود و جستجو با مجموعه جدید ادامه می‌یابد.

در انتها، الگوریتم مجموعه S و مقدار بهینه $Value(S)$ را به عنوان خروجی باز می‌گرداند.

الگوریتم ۲: تابع ارزیابی ($f = Value(S)$)

ورودی: گراف G ، خوشه‌های l -تایی (m تا)، یک مجموعه k -تایی $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

خروجی: تعداد رأس‌های دارای کد یکسان.

1. یک ماتریس $M = [m_{ij}]_{m \times k}$ با درایه‌های صفر در نظر بگیر.

2. به ازای هر خوشه l -تایی V' ، قرار بده $m_{ij} = d(V', v_j)$
 $1 \leq j \leq k$

3. تعداد سطرها ی یکسان ماتریس M را در f قرار بده.

4. f را برگردان.

الگوریتم ۲ یک ماتریس $m \times k$ (m تعداد l -خوشه‌های گراف است) برای ذخیره کد متریک خوشه‌ها ایجاد می‌کند. هر سطر این ماتریس نمایانگر یک خوشه و هر درایه نشان‌دهنده فاصله یکی از خوشه‌ها از اعضای مجموعه S است.

هدف الگوریتم ۱، یافتن کوچک‌ترین مجموعه متریک l -خوشه است که می‌تواند خوشه‌های l -تایی را در گراف G به طور یکتا شناسایی کند. این الگوریتم با بهره‌گیری از لیست ممنوعه و جستجوی محلی در فضای همسایگی، بهینه‌سازی را بهبود می‌بخشد و از بازگشت به مجموعه‌های تکراری جلوگیری می‌کند. پارامترها و نمادهای استفاده شده در این الگوریتم به صورت زیر معرفی می‌شوند:

• G : گراف همبند ورودی،

• l : اندازه خوشه‌های گراف،

• S : مجموعه اولیه متریک k -تایی،

• N : حداکثر تعداد تکرارهای مجاز برای الگوریتم،

• t : حداکثر طول لیست ممنوعه.

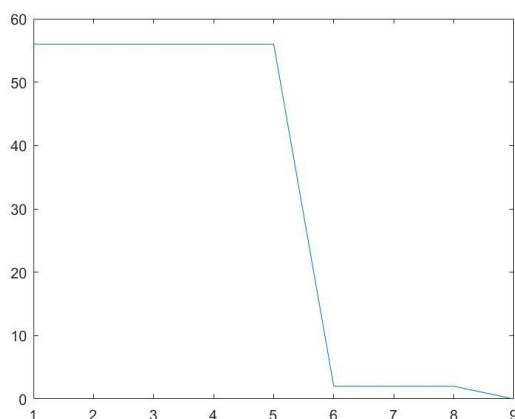
خروجی:

• S : مجموعه بهینه متریک k -تایی،

• $Value(S)$: مقدار نهایی تابع ارزش که نشان‌دهنده میزان بهینگی مجموعه است.

این الگوریتم ابتدا یک لیست ممنوعه خالی TL برای ثبت مجموعه‌های تکراری ایجاد می‌کند تا از جستجوی دوباره در فضاهای قبلی جلوگیری کند. جواب اولیه S به کمک الگوریتم ۲ (تابع ارزیابی $Value(S)$) ارزیابی می‌شود. این تابع تعداد کدهای یکسان متناظر مجموعه S را محاسبه می‌کند. حلقه اصلی تا زمانی که تعداد تکرارها کمتر از N باشد یا مقدار $Value(S)$ بزرگ‌تر از صفر باشد، ادامه می‌یابد. این حلقه شامل مراحل زیر

دهنده عملکرد صحیح و کارایی الگوریتم ارائه شده است. منظور از K_n ، در جدول گراف کامل n رأسی، $W_{1,n}$ گراف چرخ و $F_{1,n}$ گراف فن^۷ است. بعد متریک l -خوشه تحلیلی، در ستون سوم جدول، بر اساس نتایج ارائه شده برای این گراف‌ها در مرجع [۱] نوشته شده است. نمایش یکی از مجموعه‌های مولد در ستون پنجم این جدول برای هر گراف نشان‌دهنده خروجی واقعی الگوریتم برای هر گراف خاص است. در دو سطر آخر جدول نتایج به دست آمده از الگوریتم برای گراف‌های Q_5 و Q_8 نمایش داده شده است. شکل ۱ نمودار همگرایی الگوریتم برای گراف Q_5 را نشان می‌دهد که در تکرار ۹ام به نتیجه رسیده است و شکل ۲ این نمودار را برای گراف Q_8 نشان می‌دهد که در تکرار ۱۲ام به نتیجه رسیده است.



شکل ۱: نمودار همگرایی الگوریتم TS برای گراف Q_5

واضح است که خروجی الگوریتم (تعداد کدهای یکسان) برای مقادیر $k < \text{cdim}_l(G)$ برای هر کدام از گراف‌های جدول ۱، بایستی مقداری مخالف صفر باشد. بعضی از این مقادیر در جدول ۲ گزارش شده است.

تعداد سطرهای یکسان در ماتریس M ، نمایانگر خوشه‌ها با کد متریک یکسان است و در متغیر f ذخیره می‌شود. این مقدار به عنوان خروجی الگوریتم برگردانده می‌شود.

۳. نتایج عددی

افخمی و همکاران [۱] در پژوهش خود قضایایی را برای بعد متریک l -خوشه در برخی گراف‌های خاص از جمله گراف‌های کامل و چرخ ارائه کرده‌اند. در این بخش، الگوریتم‌های ۱ و ۲ را با استفاده از نرم‌افزار MATLAB پیاده‌سازی کرده و نتایج حاصل از اجرای آن‌ها را برای این گراف‌ها در جدول ۱ گزارش کرده‌ایم.

در ستون ۳ جدول مقدار تحلیلی بیان شده در قضایای مرجع و در ستون ۴ مقدار به دست آمده از الگوریتم گزارش شده است. در ستون ۵، یکی از مجموعه‌های مولد متناظر با مقدار بهینه گزارش شده است. لازم به ذکر است که مجموعه مولد S در این الگوریتم ممکن است منحصر به فرد نباشد.

جدول ۱: مقایسه بعد متریک تحلیلی و به دست آمده از الگوریتم

نام گراف	l	بعد متریک l -خوشه تحلیلی	بعد متریک l -خوشه الگوریتم	مولد متریک l -خوشه
K_4	2	3	3	{1,2,3}
K_4	3	3	3	{1,3,4}
K_5	3	4	4	{1,2,3,4}
K_5	4	4	4	{1,2,3,4}
$W_{1,5}$	3	3	3	{2,3,6}
$F_{1,5}$	3	2	2	{3,4}
$F_{1,7}$	3	4	4	{3,4,5,6}
$F_{1,9}$	3	5	5	{3,4,5,6,9}
Q_5	2	-	4	{14,2,22,8}
Q_8	2	-	۶	{۲۰۶,۹۳,۴۸,۳۷,۱۱۸,۲۱۵}

مقایسه نتایج مقادیر تحلیلی (براساس قضایای افخمی و همکاران [۱]) با مقادیر به دست آمده از اجرای الگوریتم نشان

بگیریم، آنگاه کدهای مورد نظر متناظر با نمایش متریک رئوس نسبت به مجموعه مولد متریک مینیمم می‌باشد.

به‌عنوان کاربردی دیگر، به کاربرد بعد متریک ۲-

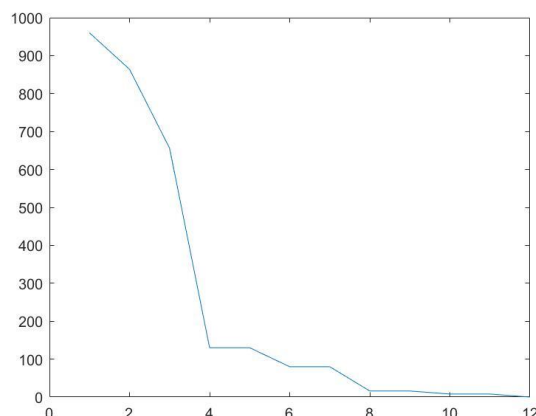
خوشه در سیستم حمل‌ونقل هوشمند (ITS) و شهرهای هوشمند اشاره می‌کنیم. وقتی صحبت از شهر هوشمند به میان می‌آید، سیستم حمل‌ونقل هوشمند (ITS) یکی از اولین اجزایی است که تصور می‌شود. در چنین سیستمی، خودروهای خودران نقش کلیدی خواهند داشت. این خودروها برای تعیین موقعیت دقیق خود در خیابان‌های شهر نیازمند کدهای منحصربه‌فردی هستند که هر خیابان را به‌طور یکتا مشخص کند. اگر شهر را با یک گراف مدل کنیم (که یال‌های آن معادل خیابان‌ها هستند)، مفهوم مولد متریک ۲-خوشه در نظریه گراف، ابزاری است که می‌تواند این کدهای یکتا را برای خیابان‌ها ایجاد کند. برای کسب جزئیات بیشتر به مراجع [۱۱ و ۸] مراجعه نمایید.

سپاسگزاری

نویسندگان این مقاله از همفکری اعضای هیئت تحریریه مجله علمی ترویجی محاسبات نرم کمال سپاسگزاری را دارند. پژوهش نویسنده سوم، مصطفی توکلی، توسط دانشگاه فردوسی مشهد حمایت شده است.

۵. مراجع

- [1] M. Afkhami, K. Khashyarmansh, and M. Tavakoli, "L-clique metric dimension of graphs," *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 45, no. 6, pp. 2865-2883, 2022, doi: 10.1007/s40840-022-01299-9.
- [2] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann, "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph," *Discrete Appl. Math.*, vol. 105, no. 1-3, pp. 99-113, 2000, doi: 10.1016/S0166-218X(00)00198-0.
- [3] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd ed. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2009, 1312 p.
- [4] E. L. Epstein, A. Levin, and G. J. Woeginger, "The (weighted) metric dimension of graphs: hard and easy cases," *Algorithmica*,



شکل ۲: نمودار همگرایی الگوریتم TS برای گراف Q_8

جدول ۲: خروجی الگوریتم برای مقادیر $k < cdim_l(G)$ متناظر گراف‌های جدول ۱

نام گراف	l	k	f
K_4	2	2	4
K_4	3	2	2
K_5	3	3	6
$W_{1,5}$	3	2	2
$F_{1,5}$	3	1	3
$F_{1,8}$	3	3	2
$F_{1,9}$	3	4	2

۴. کاربرد

مفهوم مولد متریک کاربردهای فراوانی در مسائل موجود در دنیای واقعی دارد که در این بخش به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. خدمات تکمیلی عبارت است از خدماتی که به‌عنوان نتیجه حاصل از فروش محصولات ملموس ارائه می‌شوند. در این بخش، کاربردی از مجموعه‌های مولد متریک در خدمات تحویل کالا که یک نوع خدمات تکمیلی به شمار می‌آید، ارائه می‌کنیم. فرض کنید شرکتی بخواهد برای مشترکین خود کُد منحصربه‌فردی اختصاص دهد به‌طوری که براساس آن کُد، موقعیت مشترک مربوطه مشخص شود. از طرفی تمایل این شرکت به کدهای حتی‌الامکان کوتاه می‌باشد. اگر این مسئله را با گراف مدل کنیم، یعنی مشترکین و شعب خدماتی را به‌عنوان رئوس و ارتباط‌های مسیری بین آن‌ها را به‌عنوان یال‌ها در نظر

- [9] A. Khaleghi Tabar and R. Farazkhish, "Routing improvement for vehicular Ad Hoc networks (VANETs) using nature inspired algorithms," *Soft Comput. J.*, vol. 6, no. 2, pp. 72-85, 2018, dor: 20.1001.1.23223707.1396.6.2.6.0 [In Persian].
- [10] S. Khuller, B. Raghavachari, A. Rosenfeld, "Landmarks in graphs," *Discrete Appl. Math.*, vol. 70, pp. 217-229, 1996, doi: 10.1016/0166-218X(95)00106-2.
- [11] S. Prabhu, D. Sagaya Rani Jeba, S. Stephen, "Metric dimension of star fan graph," *Sci. Rep.*, vol. 15, p. 102, 2025, doi: 10.1038/s41598-024-83562-6.
- [12] S. Rasouli and F. Khaksar Haghami, "Maximal, prime and minimal prime filters in residuated lattices," *Soft Comput. J.*, vol. 11, no. 1, pp. 106-119, 2022, doi: 10.22052/scj.2023.243375.1032 [In Persian].
- vol. 72, no. 4, pp. 1130-1171, 2015, doi: 10.1007/978-3-642-34611-8_14.
- [5] F. Glover, "Tabu search-part I," *ORSA J. Comput.*, vol. 1, no. 3, pp. 190-206, 1989, doi: 10.1287/ijoc.1.3.190.
- [6] A. Ghalavand, M. A. Henning, and M. Tavakoli, "On a conjecture about the local metric dimension of graphs," *Graphs Combin.*, vol. 39, no. 5, 2023, doi: 10.1007/s00373-022-02601-z.
- [7] A. Ghalavand, M. Tavakoli, "Extremal unicyclic graphs relative to the sum of the k-power degrees of the graphs," *Soft Comput. J.*, vol. 12, no. 2, pp. 16-23, 2023, doi: 10.22052/scj.2023.248230.1092 [In Persian].
- [8] S. Klavžar, M. Tavakoli, "Edge metric dimensions via hierarchical product and integer linear programming", *Optim. Lett.*, vol. 15, pp. 1993-2003, 2021, doi: 10.1007/s11590-020-01669-x.