

حل عددی معادلات انتگرال فازی ولترا-هامرشتاین غیرخطی تاخیری با استفاده از موجک‌های لژاندر

مهدی سبزواری*، مرتضی بیشه نیاسر

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده:

در این مقاله، یک روش عددی بر مبنای موجک‌های لژاندر برای حل معادلات انتگرال فازی ولترا-هامرشتاین تاخیری غیرخطی ارائه می‌دهیم. مدل ریاضی یک مسئله همه‌گیری، حالت خاصی از این دسته از معادلات انتگرال فازی است و این موضوع اهمیت این معادلات را دوجندان می‌نماید. در این مقاله پس از بیان تعاریف مقدماتی مرتبط با معادلات فازی و نیز ویژگی‌های اولیه موجک‌های لژاندر، فرم پارامتری معادلات انتگرال فازی ولترا-هامرشتاین تاخیری غیرخطی، که در واقع دستگاهی از معادلات انتگرال ولترای تاخیری غیرخطی در حالت غیرفازی است را معرفی می‌نماییم. سپس با استفاده از موجک‌های لژاندر به همراه روش هم‌مکانی و قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر، معادله انتگرال را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل و آن را حل می‌کنیم. علاوه بر آن، آنالیز هم‌گرایی روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دقت روش با چندین مثال عددی نشان داده می‌شود و نتایج حاصل با نتایج به دست آمده از روش موجک‌های برنولی و B-اسپلاین مقایسه می‌شود. این مقایسه‌ها دقت و کارآمدی روش ارائه شده را تایید می‌کنند.

کلمات کلیدی: معادله انتگرال ولترا-هامرشتاین؛ معادله انتگرال فازی تاخیری؛ روش هم‌مکانی؛ قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر؛ مسئله همه‌گیری.

۱ مقدمه

معادلات انتگرال یکی از ابزارهای قدرتمند برای مدل‌سازی مسائل متنوعی در مهندسی، فیزیک و علوم طبیعی هستند [۲۱]. با توجه به اینکه در بسیاری از موارد، حل تحلیلی معادلات انتگرال دشوار و یا حتی غیرممکن است، لذا استفاده از روش‌های عددی ضروری به نظر می‌رسد. این موضوع باعث شده است که در سال‌های اخیر، محققان انواع مختلفی از روش‌های عددی را برای حل انواع معادلات انتگرال ارائه دهند. این روش‌ها عمدتاً شامل رویکردهای مبتنی بر روش‌های گالرکین^۱، هم‌مکانی^۲، حداقل مربعات^۳، قواعد انتگرال‌گیری^۴ و روش‌های تکراری^۵ می‌باشند. به عنوان نمونه می‌توانیم به [۶]، [۱۰]، [۲۸] و [۲۹] اشاره نماییم. به عنوان حالت خاصی از معادلات انتگرال، می‌توان به معادلات انتگرال فازی اشاره کرد که در سال‌های اخیر معرفی و مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

معادلات انتگرال فازی حالت خاص و مهمی از معادلات انتگرال هستند که کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله پزشکی، اقتصاد، زیست‌شناسی، مهندسی الکترونیک و نظریه کنترل بهینه پیدا کرده‌اند. ادغام مفاهیم فازی در چارچوب معادلات انتگرال، امکان مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌ها و پدیده‌های پیچیده که با عدم قطعیت و ابهام ذاتی مشخص می‌شوند را فراهم آورده است. اهمیت این موضوع زمانی بیشتر می‌شود که بدانیم بسیاری از مسائل واقعی را نمی‌توان با رویکردهای غیرفازی سنتی به طور مناسب توصیف کرد.

¹ Galerkin

² collocation

³ least squares

⁴ quadrature rules

⁵ iterative schemes

مفهوم "فازی" برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پرفسور لطف علی رحیم اوغلو عسکرزاده مشهور به لطفی زاده به دنیای ریاضیات معرفی شد [۳۳]. این پیشرفت به سرعت کاربرد اصول فازی را از نظریه مجموعه‌ها فراتر برده و به سایر حوزه‌های ریاضی از جمله فضاهای متریک [۲۲]، معادلات دیفرانسیل [۲۳] و فضاهای توپولوژیک [۲۴] گسترش داد. این پیشرفت‌ها، زمینه را برای کاربرد گسترده منطق فازی و نظریه مجموعه‌های فازی در بسیاری از رشته‌های علوم پایه و مهندسی فراهم کرد.

مفهوم انتگرال فازی برای نخستین بار توسط دابویس^۶ و پرید^۷ در سال ۱۹۸۲ معرفی شد [۱۳]. این مفهوم، زمینه را برای تحقیقات بیشتر در مورد معادلات انتگرال فازی فراهم کرد، به گونه‌ای که در سال ۱۹۹۱، کانگ‌زین^۸ و مینگ^۹ برای نخستین بار معادلات انتگرال فرد هلم فازی نوع دوم را معرفی کردند [۱۱]. این دستاورد، زمینه‌ساز تعریف و بررسی انواع دیگری از معادلات انتگرال فازی، از جمله معادلات انتگرال فازی ولترا، تاخیری، هامرشتاین، منفرد و غیره شد و کاربردهای زیادی از آنها در علوم مختلف پدیدار گشت.

در سال‌های اخیر، انواع روش‌های عددی و تحلیلی مانند روش موجک‌های چپیشف [۳]، روش موجک‌های CAS [۴]، روش سری نیستروم [۵]، روش تجزیه آدومین [۸]، روش تکراری بر اساس فرمول کوادراتور [۱۴]، روش توابع بلاک-پالس [۱۷]، روش توابع بلاک-پالس آمیخته با چندجمله‌ای‌های برنشتاین [۲۵] و روش هموتوپي [۲۶] برای حل این گونه معادلات ارائه شده است.

در این مقاله معادلات انتگرال فازی ولترا-هامرشتاین غیرخطی با تاخیر ثابت به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \tilde{q}(t) + \int_{t-\tau}^t k(t, x) \tilde{G}(x, \tilde{y}(x)) dx, & t \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1.1)$$

که در آن T و τ ضرایب ثابت و مثبت هستند و $\tilde{q}$ ، $\tilde{G}$ و $\tilde{\phi}$ نمایانگر توابع فازی معلوم می‌باشند. $\tilde{y}$ تابع مجهول فازی است و $k(t, x)$ تابع مثبت حقیقی-مقدار معلوم است که در مستطیل $[0, T] \times [-\tau, T]$ تعریف شده است. اگر $k(t, x) = P(t - x)$ آنگاه این نوع از معادله انتگرال فازی تاخیری در مطالعه مدل‌های همه‌گیری ظاهر می‌شوند. در این حالت:

- $\tilde{y}(t)$ نمایانگر نسبت افراد عفونی در زمان t است.
- $\tilde{G}(\tilde{y}(t))$ نشان‌دهنده نرخ عفونت‌های جدید در واحد زمان است.
- $\tilde{q}(t)$ نشان‌دهنده نسبت افراد مبتلا است که در زمان t هنوز بیمار هستند.
- تابع $P(t)$ نشان‌دهنده احتمال تداوم عفونت برای حداقل t واحد زمانی است.

با مفروضات بالا می‌توان گسترش بیماری را توسط معادله انتگرال فازی تاخیری (۱,۱) توصیف نمود [۱۲]. بیکا^{۱۰} و پوپسکو^{۱۱} از روش تقریب متوالی برای حل معادله انتگرال تاخیری فازی غیرخطی ولترا-هامرشتاین (۱,۱) استفاده کرده‌اند [۹]. اخیراً نیز ساهو^{۱۲} و ری^{۱۳} با استفاده از موجک‌های برنولی به عنوان توابع پایه، یک روش عددی برای حل این دسته از معادلات انتگرال تاخیری فازی معرفی کرده‌اند [۳۰].

در این مقاله، یک روش عددی مبتنی بر موجک‌های لژاندر انتقال یافته دوبعدی برای حل معادلات انتگرال تاخیری فازی غیرخطی ولترا-هامرشتاین که در معادله (۱,۱) بیان شده است، ارائه می‌دهیم. این موجک‌ها با انعطاف‌پذیری مناسبی که دارند، روشی با دقت بالا در تقریب جواب معادله انتگرال فازی تاخیری ارائه می‌کنند. در این مقاله پس از بیان تعاریف مقدماتی مرتبط با معادلات فازی و نیز ویژگی‌های اولیه موجک‌های لژاندر، فرم پارامتری معادلات انتگرال فازی تاخیری (۱,۱)، که در واقع دستگاهی از معادلات انتگرال ولترا تاخیری غیرخطی در حالت غیرفازی است را معرفی می‌نماییم. سپس با استفاده از موجک‌های لژاندر انتقال یافته به همراه روش هم‌مکانی و قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر، معادله انتگرال

⁶ Dubois

⁷ Prade

⁸ Congxin

⁹ Ming

¹⁰ Bica

¹¹ Popescu

¹² Sahu

¹³ Ray

را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنیم. با حل این دستگاه، تقریبی از جواب معادله انتگرال فازی تاخیری (۱,۱) به دست می‌آید. همچنین، آنالیز هم‌گرایی روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای نشان دادن کارایی روش، چند مثال عددی ارائه کرده و نتایج حاصل را با نتایج به دست آمده از روش موجک‌های برنولی و B-اسپلاین مقایسه می‌کنیم. نتایج حاصل از روش ارائه شده در این مقاله، نسبت به نتایج حاصل از موجک‌های برنولی و B-اسپلاین دقیق‌تر هستند. همچنین در مثال‌های عددی نشان می‌دهیم که با افزایش پارامترهای k و M ، خطای مطلق به شکل قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد؛ و البته افزایش زمان اجرای برنامه نیز چشم‌گیر است.

۲ تعاریف مقدماتی

در این بخش، تعاریف و قضایای مقدماتی مربوط به اعداد و معادلات فازی که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲,۱ [۷] یک عدد فازی تابعی است مانند $u: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ که در شرایط زیر صدق کند:

۱. u نرمال است. در واقع $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که $u(x_0) = 1$.
۲. u مجموعه‌ای محدب است. در واقع برای هر $x, t \in \mathbb{R}$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)t) \geq \min\{u(x), u(t)\}.$$

۳. u از بالا نیمه پیوسته است. در واقع برای هر $x_0 \in \mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار است:

$$u(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} u(x).$$

۴. مجموعه $\overline{\{x \in \mathbb{R}: u(x) > 0\}}$ یک مجموعه فشرده است.

در ادامه این مقاله، مجموعه همه اعداد فازی را با $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲,۲ [۱۵] عدد دلخواه فازی u را به فرم پارامتری، به صورت زوج مرتب از توابع $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ نمایش می‌دهیم که $0 \leq r \leq 1$ و شرایط زیر را برآورده می‌کند:

۱. $\underline{u}(r)$ تابعی کراندار، از چپ پیوسته و غیرنزولی بر بازه $[0, 1]$ است.
۲. $\overline{u}(r)$ تابعی کراندار، از چپ پیوسته و غیرصعودی بر بازه $[0, 1]$ است.
۳. به ازای هر $0 \leq r \leq 1$ ، $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$ است.

تعریف ۲,۳ برای دو عدد فازی دلخواه $u = (\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ و $v = (\underline{v}(r), \overline{v}(r))$ و عدد حقیقی λ ، جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(u \oplus v)(r) = (\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \overline{u}(r) + \overline{v}(r)).$$

$$(\lambda \otimes u)(r) = \begin{cases} (\lambda \underline{u}(r), \lambda \overline{u}(r)), & \lambda \geq 0, \\ (\lambda \overline{u}(r), \lambda \underline{u}(r)), & \lambda < 0. \end{cases}$$

همچنین $u = v$ است اگر و فقط اگر $\underline{u}(r) = \underline{v}(r)$ و $\overline{u}(r) = \overline{v}(r)$.

تعریف ۲,۴ [۱۸] فاصله بین دو عدد فازی دلخواه $u = (\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ و $v = (\underline{v}(r), \overline{v}(r))$ به صورت

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq r \leq 1} \max\{|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\overline{u}(r) - \overline{v}(r)|\}, \quad (2.1)$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۲,۵ [۱۷] زوج مرتب $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ یک فضای متریک کامل با شرایط زیر است:

۱. به ازای هر $u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ داریم: $D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u, v)$.
۲. به ازای هر $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم: $D(\lambda \otimes u, \lambda \otimes v) = |\lambda|D(u, v)$.
۳. به ازای هر $u, v, w, e \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ داریم: $D(u \oplus v, w \oplus e) \leq D(u, w) + D(v, e)$.

تعریف ۲,۶ [۳۲] تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نقطه $x_0 \in [a, b]$ پیوسته گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای وجود داشته باشد به طوری که اگر $x \in [a, b]$ و $|x - x_0| < \varepsilon$ آن گاه $D(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. تابع f را روی بازه $[a, b]$ پیوسته فازی گوییم هرگاه به ازای هر $x \in [a, b]$ ، پیوسته باشد. فضای چنین توابعی را با $C_{\mathcal{F}}([a, b])$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲,۷ [۱۵] تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نظر بگیرید. برای هر افراز دلخواه $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ از $[a, b]$ و مقدار دلخواه $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ به ازای $1 \leq i \leq n$ ، فرض کنید

$$R_P = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}.$$

انتگرال تابع $f(t)$ در بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} R_P. \quad (2.2)$$

قضیه ۲,۸ [۱۸] اگر تابع فازی $f(t)$ در فضای متریک D پیوسته باشد آن گاه انتگرال تعریف شده در (۲,۲) وجود دارد و نیز،

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t, r)dt &= \int_a^b \underline{f}(t, r)dt, \\ \overline{\int_a^b f(t, r)dt} &= \int_a^b \overline{f}(t, r)dt. \end{aligned}$$

حال، بر اساس تعاریف و گزاره‌های فوق، معادله انتگرال فازی تاخیری ولترا-هامرشتاین غیرخطی (۱,۱) را می‌توان به صورت معادل به شکل زیر نمایش داد:

$$\tilde{y}(t, r) = \begin{cases} \tilde{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t k(t, x) \tilde{G}(x, \tilde{y}(x, r))dx, & r \in [0, 1], t \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t, r), & r \in [0, 1], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.3)$$

که در آن T و τ ضرایب ثابت و مثبت هستند و $\tilde{q}$ ، $\tilde{G}$ و $\tilde{\phi}$ نمایانگر توابع فازی معلوم می‌باشند. $\tilde{y}$ تابع مجهول فازی است و $k(t, x)$ تابع مثبت حقیقی-مقدار معلوم است که در مستطیل $[0, T] \times [-\tau, T]$ تعریف شده است. بر اساس تعریف ۲,۲، فرم پارامتری توابع فازی ظاهر شده در معادله (۲,۳) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t, r) &= (\underline{y}(t, r), \overline{y}(t, r)), \\ \tilde{q}(t, r) &= (\underline{q}(t, r), \overline{q}(t, r)), \\ \tilde{\phi}(t, r) &= (\underline{\phi}(t, r), \overline{\phi}(t, r)). \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن روابط فوق و همچنین توجه به این نکته که هسته $k(t, x)$ ظاهر شده در معادله انتگرال فازی تاخیری ولترا-هامرشتاین غیرخطی (۱,۱) تابعی حقیقی مقدار و همواره مثبت است، این معادله را می‌توان به صورت دستگاهی از معادلات انتگرال در حالت غیرفازی و به شکل زیر نمایش داد:

$$\underline{y}(t, r) = \begin{cases} \underline{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t k(t, x) G(x, \underline{y}(x, r))dx, & r \in [0, 1], t \in [0, T], \\ \underline{\phi}(t, r), & r \in [0, 1], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\bar{y}(t, r) = \begin{cases} \bar{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t k(t, x) G(x, \bar{y}(x, r)) dx, & r \in [0, 1], t \in [0, T], \\ \bar{\phi}(t, r), & r \in [0, 1], t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.5)$$

با توجه پیچیدگی ذاتی این معادلات، اغلب روش‌های عددی برای حل آنها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله، از موجک‌های لژاندر دو بعدی انتقال یافته برای حل این دستگاه معادلات استفاده می‌کنیم.

۳ موجک‌های لژاندر دو بعدی انتقال یافته

موجک‌ها یک خانواده از توابع هستند که از اتساع و انتقال تابعی به نام موجک مادر ψ ساخته می‌شوند. وقتی پارامتر اتساع a و پارامتر انتقال b به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند، خانواده‌ای از موجک‌های پیوسته به‌صورت زیر پدیدار می‌شوند [۱۹]:

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (3.1)$$

اگر پارامترهای a و b را به مقادیر گسسته

$$a = a_0^{-k}, \quad b = nb_0 a_0^{-k}, \quad a_0 > 1, b_0 > 0,$$

محدود کنیم، آن‌گاه خانواده‌ای از موجک‌های گسسته به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{\frac{k}{2}} \psi(a_0^k t - nb_0),$$

که در رابطه بالا n و k اعداد صحیح مثبت می‌باشند. با مفروضات فوق، $\{\psi_{k,n}(t)\}$ پایه‌ی موجک برای $L^2(\mathbb{R})$ خواهد بود. به‌صورت خاص اگر مقادیر $a_0 = 2$ و $b_0 = 1$ در نظر گرفته شوند، آنگاه $\{\psi_{k,n}(t)\}$ پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R})$ خواهد بود [۱۹].

موجک‌های لژاندر بر بازه $(0, 1)$ همراه با چهار پارامتر و به‌صورت $\psi_{nm}(t) = \psi(k, n, m, t)$ نمایش داده می‌شوند که در آن k عددی صحیح و نامنفی است و $n = 1, 2, \dots, 2^k$. همچنین اگر M عدد صحیح مثبت و ثابتی باشد، آنگاه m درجه چندجمله‌ای لژاندر را نشان می‌دهد که در آن $m = 0, 1, \dots, M-1$. این موجک‌ها به شکل زیر تعریف می‌شوند [۲۰]:

$$\psi_{nm}(t) = \begin{cases} \sqrt{2m+1} 2^{\frac{k}{2}} L_m(2^{k+1}t - 2n + 1), & \frac{n-1}{2^k} \leq t < \frac{n}{2^k}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (3.2)$$

در رابطه بالا $m = 0, 1, \dots, M-1$ و $n = 1, 2, \dots, 2^k$. ضریب $\sqrt{2m+1}$ به منظور متعامد یکه بودن موجک‌ها ظاهر شده است. در اینجا پارامتر انتقال را برابر با $a = 2^{-k}$ و پارامتر اتساع را $b = (2n-1)2^{-k}$ اختیار کرده‌ایم. در رابطه بالا، $L_m(t)$ چندجمله‌ای‌های لژاندر از مرتبه m هستند که بر روی بازه $[-1, 1]$ از رابطه زیر که به فرمول بازگشتی بُیت^{۱۴} معروف است به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, \\ L_1(t) &= t, \\ L_j(t) &= \frac{2j-1}{j} t L_{j-1}(t) - \frac{j-1}{j} L_{j-2}(t), \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر نسبت به تابع وزن $\omega(t) = 1$ در بازه $[-1, 1]$ متعامد یکه هستند.

به طریق مشابه می‌توانیم موجک‌های لژاندر دوبعدی را بر روی مستطیل $(0, 1) \times (0, 1)$ به صورت زیر تعریف نماییم:

$$\psi_{n_1 m_1 n_2 m_2}(t, r) = \begin{cases} \Lambda_1 L_{m_1}(2^{k_1+1}t - 2n_1 + 1) L_{m_2}(2^{k_2+1}r - 2n_2 + 1), & t \in \left[\frac{n_1-1}{2^{k_1}}, \frac{n_1}{2^{k_1}}\right), \\ & r \in \left[\frac{n_2-1}{2^{k_2}}, \frac{n_2}{2^{k_2}}\right), \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (3.4)$$

در رابطه بالا $\Lambda_1 = \sqrt{(2m_1 + 1)(2m_2 + 1)} 2^{\frac{k_1+k_2}{2}}$. همچنین $m_1 = 0, 1, \dots, M_1 - 1$ و $m_2 = 0, 1, \dots, M_2 - 1$ و $n_1 = 1, 2, \dots, 2^{k_1}$ و $n_2 = 1, 2, \dots, 2^{k_2}$. در بسیاری از مقالات جهت ساده شدن روابط هنگام تقریب توابع، این پارامترها را به صورت $M_1 = M_2 = M$ و $k_1 = k_2 = k$ در نظر می‌گیرند. تقریبی از هر تابع $y(t, r) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$ را می‌توانیم با استفاده از این موجک‌های لژاندر دوبعدی با دقت مطلوب به دست آوریم. همان‌طور که از معادله (۲,۳) قابل مشاهده است، تابع $\tilde{y}(t, r)$ ظاهر شده در این معادله در دامنه $[-\tau, T] \times [0, 1]$ تعریف شده است. در نتیجه لازم است که موجک‌های لژاندر دو بعدی فوق را با این دامنه خاص تطبیق دهیم. برای دستیابی به این هدف، موجک‌های لژاندر دو بعدی انتقال یافته را با فرض $M_1 = M_2 = M$ و $k_1 = k_2 = k$ به صورت زیر معرفی می‌نماییم:

$$\psi_{n_1 m_1 n_2 m_2}(t, r) = \begin{cases} \Lambda_2 L_{m_1}(2^{k+1}t - 2n_1 + 1) L_{m_2}(2^{k+1}r - 2n_2 + 1), & (t, r) \in I_1 \times I_2, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (3.5)$$

که در آن $\Lambda_2 = \sqrt{(2m_1 + 1)(2m_2 + 1)} 2^k$ ، $I_1 = \left[\frac{(T+\tau)(n_1-1)}{2^k} - \tau, \frac{(T+\tau)n_1}{2^k} - \tau\right)$ و $I_2 = \left[\frac{n_2-1}{2^k}, \frac{n_2}{2^k}\right)$. همچنین، $m_1, m_2 = 0, 1, \dots, M - 1$ و $n_1, n_2 = 1, 2, \dots, 2^k$. با استفاده از موجک‌های لژاندر دو بعدی انتقال یافته، هر تابع دومتغیره دلخواه مانند $f(t, r) \in L^2([-\tau, T] \times [0, 1])$ را می‌توان با دقت مطلوب تقریب زد.

۳,۱ تقریب توابع

$\{\psi_{nm}\}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2[0, 1]$ است. بنابراین تابع دلخواه $y(t) \in L^2[0, 1]$ را می‌توان توسط موجک‌های لژاندر تعریف شده در رابطه (۳,۲) به صورت زیر بسط داد:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm} \psi_{nm}(t), \quad (3.6)$$

که در رابطه بالا $y_{nm} = \langle f(t), \psi_{nm}(t) \rangle$ است و $\langle ., . \rangle$ نمایانگر ضرب داخلی در فضای $L^2[0, 1]$ است. اگر سری (۳,۶) را از جایی به بعد قطع کنیم، تقریبی از تابع $y(t)$ به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{2^k} \sum_{m=0}^{M-1} y_{nm} \psi_{nm}(t) = Y^T \Psi(t). \quad (3.7)$$

در رابطه بالا، Y و $\Psi(t)$ بردارهای از مرتبه $2^k M \times 1$ هستند.

به طریق مشابه، تابع دو متغیره $y(t, r) \in L^2([-\tau, T] \times [0, 1])$ را می‌توان توسط موجک‌های لژاندر دو بعدی انتقال یافته که در رابطه (۳,۵) تعریف شده‌اند به صورت زیر تقریب زد:

$$y(t, r) \simeq \sum_{n_1=1}^{2^k} \sum_{m_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=1}^{2^k} \sum_{m_2=0}^{M-1} y_{n_1 m_1 n_2 m_2} \psi_{n_1 m_1 n_2 m_2}(t, r) = Y^T \Psi(t, r), \quad (3.9)$$

که در رابطه بالا Y و $\Psi(t, r)$ بردارهایی از مرتبه $(2^k M)^2$ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Y = [y_{1010}, \dots, y_{101(M-1)}, y_{1020}, \dots, y_{102(M-1)}, \dots, y_{2^k(M-1)2^k 0}, \dots, y_{2^k(M-1)2^k(M-1)}]^T, \quad (3.10)$$

$$\Psi(t, r) = [\psi_{1010}(t, r), \dots, \psi_{101(M-1)}(t, r), \psi_{1020}(t, r), \dots, \psi_{102(M-1)}(t, r),$$

$$\dots, \psi_{2^k(M-1)2^k 0}(t, r), \dots, \psi_{2^k(M-1)2^k(M-1)}(t, r) \Big]^T. \quad (3.11)$$

با استفاده از این بردارها، می‌توانیم تقریبی از جواب معادله انتگرال فازی (۲،۳) را با دقت بالا با استفاده از ویژگی‌های موجک‌های انتقال یافته به‌دست آوریم.

۴ ارائه روش

در این بخش، یک روش عددی مبتنی بر موجک‌های لژاندر دو بعدی انتقال یافته برای حل معادلات انتگرال فازی تاخیری غیرخطی ولتر-هامرشتاین که در معادله (۲،۳) آمده است ارائه می‌دهیم. این معادلات به شکل زیر هستند:

$$\tilde{y}(t, r) = \begin{cases} \tilde{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t k(t, x) \tilde{G}(x, \tilde{y}(x, r)) dx, & r \in [0, 1], t \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t, r), & r \in [0, 1], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (4.1)$$

که در آن τ و T ضرایب ثابت و مثبت هستند و $\tilde{q}$ ، $\tilde{G}$ و $\tilde{\phi}$ نمایانگر توابع فازی معلوم می‌باشند. $\tilde{y}$ تابع مجهول فازی است و $k(t, x)$ تابع مثبت حقیقی-مقدار معلوم است که در مستطیل $[0, T] \times [-\tau, T]$ تعریف شده است. برای حل عددی معادله (۴،۱)، تابع مجهول $\tilde{y}(t, r)$ ظاهر شده در این معادله را با استفاده از موجک‌های لژاندر دو بعدی انتقال یافته، همان‌گونه که در معادله (۳،۹) بیان شده است، تقریب می‌زنیم. این تقریب معادله انتگرال فازی (۴،۱) را به فرم زیر تبدیل می‌نماید:

$$Y^T \Psi(t, r) = \begin{cases} \tilde{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t k(t, x) \tilde{G}(x, Y^T \Psi(x, r)) dx, & t \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t, r), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4.2)$$

حال با قرار دادن نقاط هم‌مکانی

$$t_i = \frac{(2i-1)(T+\tau)}{2^{k+1}M} - \tau, \quad i = 1, 2, \dots, 2^k M,$$

$$r_j = \frac{2j-1}{2^{k+1}M}, \quad j = 1, 2, \dots, 2^k M,$$

در معادله بالا، $(2^k M)^2$ معادله زیر به ازای $i, j = 1, 2, \dots, 2^k M$ به‌دست می‌آید:

$$Y^T \Psi(t_i, r_j) = \begin{cases} \tilde{q}(t_i, r_j) + \int_{t_i-\tau}^{t_i} k(t_i, x) \tilde{G}(x, Y^T \Psi(x, r_j)) dx, & t_i \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t_i, r_j), & t_i \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (4.3)$$

برای محاسبه انتگرال معین ظاهر شده در معادله (۴،۳) از قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر استفاده می‌کنیم. بدین منظور می‌بایست حدود انتگرال را از $[t_i - \tau, t_i]$ به $[-1, 1]$ تغییر دهیم. لذا با استفاده از جایگزینی $x = \frac{\tau(z-1)+2t_i}{2}$ در رابطه بالا داریم:

$$Y^T \Psi(t_i, r_j) = \begin{cases} \tilde{q}(t_i, r_j) + \frac{\tau}{2} \int_{-1}^1 k(t_i, \frac{\tau(z-1)+2t_i}{2}) \times \\ \quad \tilde{G}(\frac{\tau(z-1)+2t_i}{2}, Y^T \Psi(\frac{\tau(z-1)+2t_i}{2}, r_j)) dz, & t_i \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t_i, r_j), & t_i \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

در این مرحله، قاعده انتگرال‌گیری p -نقطه‌ای گاوس-لژاندر را بر روی انتگرال ظاهر شده در معادله بالا اعمال می‌کنیم. بنابراین تبدیل زیر حاصل می‌شود:

$$Y^T \Psi(t_i, r_j) = \begin{cases} \tilde{q}(t_i, r_j) + \frac{\tau}{2} \sum_{\ell=1}^p \omega_{\ell} k(t_i, \frac{\tau(z_{\ell}-1)+2t_i}{2}) \times \\ \quad \tilde{G}(\frac{\tau(z_{\ell}-1)+2t_i}{2}, Y^T \Psi(\frac{\tau(z_{\ell}-1)+2t_i}{2}, r_j)), & t_i \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t_i, r_j), & t_i \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (4.4)$$

که در آن z_{ℓ} به ازای $\ell = 1, 2, \dots, p$ نقاط گاوس-لژاندر هستند، که در واقع ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف مرتبه p می‌باشند. همچنین ω_{ℓ} وزن‌های متناظر می‌باشند.

معادله (۴،۴) یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی با $(M^k)^2$ معادله و همان تعداد مجهول موجود در بردار Y را نمایش می دهد. با حل این دستگاه غیرخطی، درایه های بردار Y محاسبه شده و سپس جواب معادله انتگرال فازی تاخیری غیرخطی ولتر-هامرشتاین (۴،۱) را با استفاده از معادله (۳،۹) به دست می آید.

۵ آنالیز همگرایی

قضیه ۵،۱ به کارگیری موجک های لژاندر، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} y_{nm} \psi_{nm}(t)$ تعریف شده در رابطه (۳، ۷) به تابع $y(t)$ همگراست.

اثبات: به مرجع [۳۱] مراجعه نمایید.

حال فرض کنید $(C(I), \|\cdot\|)$ فضای باناخ متشکل از همه توابع پیوسته روی مستطیل $I = [0,1) \times [0,1)$ همراه با نرم

$$\|\tilde{y}(t, r)\|_{\infty} = \max_{(t,r) \in I} |\tilde{y}(t, r)|,$$

باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{y}(t, r)$ و $\tilde{y}_{km}(t, r)$ به ترتیب نشان دهنده جواب تقریبی و جواب دقیق معادله انتگرال فازی تاخیری (۲،۳) باشند. فرض کنید $\alpha = \sup_{(t,x) \in I} |k(t, x)|$ و همچنین بخش غیرخطی $\tilde{G}$ در شرط لیپ شیتز نسبت به متغیر دوم خود صدق کند. این بدان معناست که ثابت $\beta > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in [-\tau, T]$ و $r \in [0,1]$

$$|\tilde{G}(x, \tilde{y}_{km}(x, r)) - \tilde{G}(x, \tilde{y}(x, r))| \leq \beta |\tilde{y}_{km}(x, r) - \tilde{y}(x, r)|.$$

بر اساس فرضیات بالا، داریم:

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}_{km}(t, r) - \tilde{y}(t, r)\|_{\infty} &= \max_{(t,r) \in I} |\tilde{y}_{km}(t, r) - \tilde{y}(t, r)| \\ &= \max_{(t,r) \in I} \left| \tilde{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t k(t, x) \tilde{G}(x, \tilde{y}_{km}(x, r)) dx \right. \\ &\quad \left. - \tilde{q}(t, r) - \int_{t-\tau}^t k(t, x) \tilde{G}(x, \tilde{y}(x, r)) dx \right| \\ &\leq \int_{t-\tau}^t \max_{(t,r) \in I} |k(t, x)| |\tilde{G}(x, \tilde{y}_{km}(x, r)) - \tilde{G}(x, \tilde{y}(x, r))| dx \\ &\leq \alpha \beta \int_{t-\tau}^t \max_{(t,r) \in I} |\tilde{y}_{km}(x, r) - \tilde{y}(x, r)| dx \\ &= \alpha \beta \tau \|\tilde{y}_{km}(t, r) - \tilde{y}(t, r)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

این بدان معناست که $\|\tilde{y}_{km}(t, r) - \tilde{y}(t, r)\|_{\infty} \leq 0$ (با فرض $0 < \alpha \beta \tau < 1$). بنابراین، می توان گفت اگر $k, M \rightarrow \infty$ آنگاه $|\tilde{y}_{km}(t, r) - \tilde{y}(t, r)| \rightarrow 0$. این نشان می دهد که تحت فرضیات فوق، زمانی که پارامترهای k و M افزایش می یابند، جواب تقریبی $\tilde{y}_{km}(t, r)$ به جواب دقیق $\tilde{y}(t, r)$ همگرا می شود.

۶ نتایج عددی

در این بخش، چهار مثال عددی جهت بررسی دقت و کارایی روش ارائه شده در بخش ۴ ارائه می دهیم. برای هر مثال، از موجک های لژاندر دو بعدی انتقال یافته به ازای پارامترهای مناسب k و M استفاده می کنیم. مقادیر و نمودارهای خطای مطلق هر مثال در جداول و شکل های مربوطه ارائه شده اند. در مثال های ۱، ۲ و ۳، نتایج حاصل را با نتایج به دست آمده از روش های موجک برنولی و موجک B-اسپلاین [۳۰] مقایسه می کنیم. این مقایسه ها دقت بالای روش روش ارائه شده در این مقاله نسبت به سایر روش ها را نشان می دهند. برای همه مثال ها، از قاعده انتگرال گیری سه نقطه ای گاوس-لژاندر استفاده کرده ایم و همه محاسبات با استفاده از نرم افزار میپل ۱۷ انجام شده اند.

مثال ۱، ۲، ۳ معادله انتگرال فازی تاخیری ولتر-هامرشتاین زیر را در نظر بگیرید [۳۰]:

$$\tilde{y}(t, r) = \begin{cases} \tilde{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t \tilde{y}(x, r) dx, & r \in [0, 1], t \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t, r), & r \in [0, 1], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (6.1)$$

که در آن، $T = \frac{1}{2}$ ، $\tau = \frac{1}{2}$ و $\tilde{\phi}(t, r) = \left(e^t, e^t + \frac{3}{10}(1-r)\right)$ و $\tilde{q}(t, r) = \left(e^{t-\tau}, e^{t-\tau} + \frac{3}{20}(1-r)\right)$ جواب دقیق این معادله به صورت زیر است:

$$\tilde{y}(t, r) = \left(e^t, e^t + \frac{3}{10}(1-r)\right).$$

برای حل معادله انتگرال فازی (۶، ۱)، از موجک‌های لژاندر دو بعدی انتقال یافته و روش ارائه شده در بخش ۴ استفاده می‌کنیم. خطای مطلق را از رابطه $e_r = |\tilde{y}_{\text{exact}}(t, r) - \tilde{y}_{\text{approximate}}(t, r)|$ به ازای مقادیر $r = 0.25, 0.75$ محاسبه می‌نمایم.

نتایج به دست آمده از روش ارائه شده در این مقاله به ازای $k = 2$ و $M = 4$ با نتایج حاصل از روش موجک برنولی (به ازای $k = 2$ و $M = 4$) و روش موجک B-اسپلاین (به ازای $m = 4$) مقایسه شده است [۳۰]. این مقایسه‌ها در جداول ۱ و ۲ به ترتیب برای کران پایین $\underline{y}(t, r)$ و کران بالای $\bar{y}(t, r)$ گزارش شده‌اند.

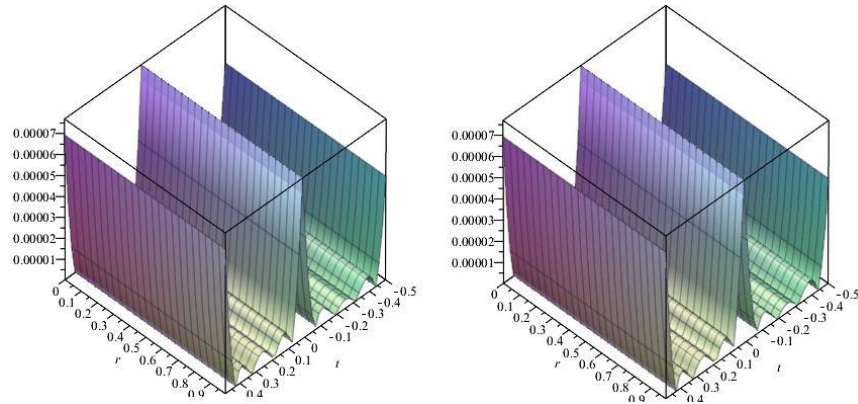
همچنین نمودار خطای مطلق $\underline{y}(t, r)$ و $\bar{y}(t, r)$ به دست آمده از روش حاضر به ازای $k = 1$ و $M = 4$ در شکل ۱، و به ازای $k = 2$ و $M = 6$ در شکل ۲ نشان داده شده است. زمان اجرای برنامه در حالت اول ۲.۸۴ ثانیه و در حالت دوم ۲۳۰.۸۱ ثانیه گزارش شده است. این تصویرسازی، بینش‌های مفیدی در مورد توزیع خطا در سرتاسر دامنه تابع را ارائه می‌دهد. همچنین نشان می‌دهد که با افزایش پارامترهای M و k ، خطای مطلق به شکل قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد؛ و البته افزایش زمان اجرای برنامه نیز چشم‌گیر است.

جدول ۱: مقادیر خطای مطلق $\underline{y}(t, r)$ در مثال ۶، ۱

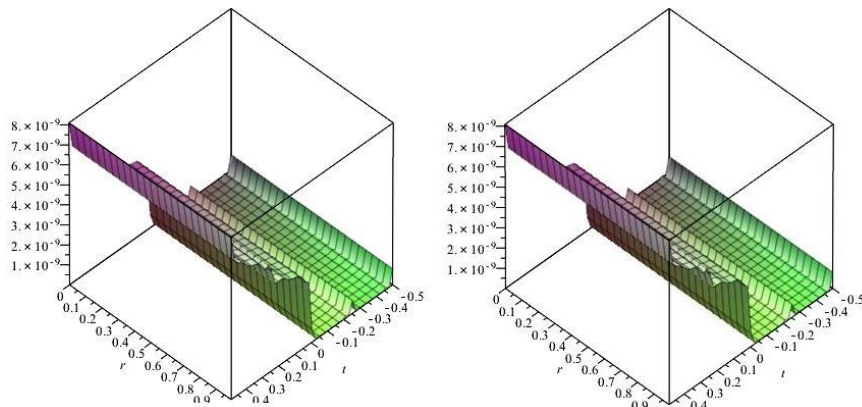
t	روش حاضر به ازای $k = 2$ و $M = 4$		روش موجک برنولی به ازای $k = 2$ و $M = 4$		روش موجک B-اسپلاین به ازای $m = 4$	
	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$
0.1	$1.05e - 7$	$1.05e - 7$	$1.05e - 5$	$1.05e - 5$	$5.39e - 5$	$5.39e - 5$
0.2	$6.84e - 7$	$6.84e - 7$	$4.15e - 6$	$4.15e - 6$	$6.74e - 5$	$6.74e - 5$
0.3	$8.58e - 7$	$8.58e - 7$	$5.17e - 6$	$5.17e - 6$	$4.03e - 5$	$4.03e - 5$
0.4	$1.49e - 7$	$1.49e - 7$	$9.76e - 6$	$9.76e - 6$	$4.88e - 5$	$4.88e - 5$
0.5	$6.00e - 6$	$6.00e - 6$	$9.22e - 5$	$9.22e - 5$	$2.07e - 4$	$2.07e - 4$

جدول ۲: مقادیر خطای مطلق $\bar{y}(t, r)$ در مثال ۶، ۱

t	روش حاضر به ازای $k = 2$ و $M = 4$		روش موجک برنولی به ازای $k = 2$ و $M = 4$		روش موجک B-اسپلاین به ازای $m = 4$	
	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$
0.1	$1.05e - 7$	$1.05e - 7$	$1.05e - 5$	$1.05e - 5$	$5.39e - 5$	$5.39e - 5$
0.2	$6.84e - 7$	$6.84e - 7$	$4.15e - 6$	$4.15e - 6$	$6.74e - 5$	$6.74e - 5$
0.3	$8.58e - 7$	$8.58e - 7$	$5.17e - 6$	$5.17e - 6$	$4.03e - 5$	$4.03e - 5$
0.4	$1.49e - 7$	$1.49e - 7$	$9.76e - 6$	$9.76e - 6$	$4.88e - 5$	$4.88e - 5$
0.5	$6.00e - 6$	$6.00e - 6$	$9.22e - 5$	$9.22e - 5$	$2.07e - 4$	$2.07e - 4$



شکل ۱: نمودار خطای مطلق توابع $\bar{y}(t, r)$ و $y(t, r)$ در مثال ۱، به ازای $k = 1$ و $M = 4$



شکل ۲: نمودار خطای مطلق توابع $\bar{y}(t, r)$ و $y(t, r)$ در مثال ۱، به ازای $k = 2$ و $M = 6$

مثال ۱،۲ معادله انتگرال فازی تاخیری ولترا-هامرشتاین زیر را در نظر بگیرید [۳۰]:

$$\tilde{y}(t, r) = \begin{cases} \tilde{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t e^{-(t-x)} \tilde{y}(x, r) dx, & r \in [0, 1], t \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t, r), & r \in [0, 1], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (6.2)$$

که در آن، $T = \frac{1}{2}$ ، $\tau = \frac{1}{2}$

$$\tilde{q}(t, r) = \left(\frac{1}{2} e^{-t} - 0.121306(1-r), \frac{1}{2} e^{-t} + 0.121306(1-r) \right),$$

$$\tilde{\phi}(t, r) = \left(e^{-t} - \frac{1}{5}(1-r), e^{-t} + \frac{1}{5}(1-r) \right).$$

جواب دقیق این معادله به صورت $\tilde{y}(t, r) = \left(e^{-t} - \frac{1}{5}(1-r), e^{-t} + \frac{1}{5}(1-r) \right)$ است. این معادله انتگرال

فازی یک مدل ریاضی از مسئله همه گیری بیماری است که در آن $k(t, x) = P(t - x) = e^{-(t-x)}$.

برای حل معادله انتگرال فازی (۱،۲)، از موجک های لژاندر دو بعدی انتقال یافته و روش ارائه شده در بخش ۴ استفاده می کنیم. نتایج به دست آمده از روش ارائه شده در این مقاله به ازای $k = 2$ و $M = 4$ با نتایج حاصل از روش موجک برنولی (به ازای $k = 2$ و $M = 4$) و روش موجک B-اسپلاین (به ازای $m = 4$) مقایسه شده است. این مقایسه ها در جداول ۳ و ۴ به ترتیب برای کران پایین $y(t, r)$ و کران بالای $\bar{y}(t, r)$ گزارش شده اند.

همچنین نمودار خطای مطلق $y(t, r)$ و $\bar{y}(t, r)$ به دست آمده از روش حاضر به ازای $k = 1$ و $M = 4$ در شکل ۳، و به ازای $k = 2$ و $M = 6$ در شکل ۴ نشان داده شده است. زمان اجرای برنامه در حالت اول ۲.۸۳ ثانیه و در

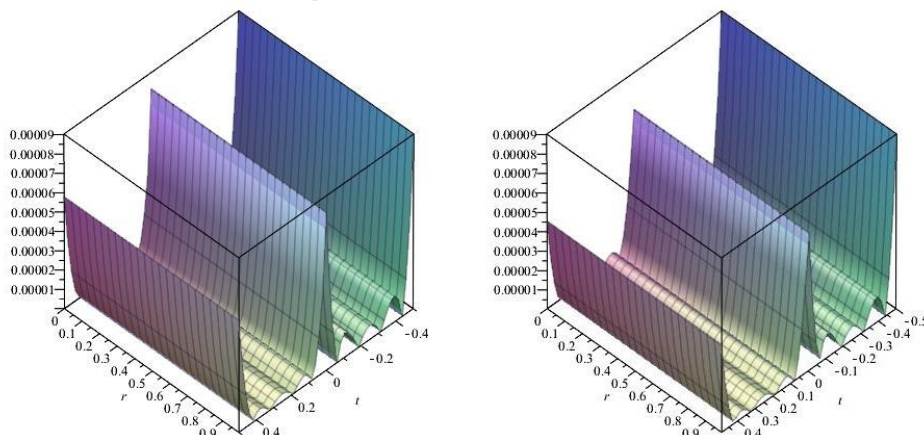
حالت دوم ۲۲۰.۸۰ ثانیه گزارش شده است. در اینجا نیز با افزایش پارامترهای k و M ، خطای مطلق به شکل قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد؛ و البته افزایش زمان اجرای برنامه نیز چشم‌گیر است.

جدول ۳: مقادیر خطای مطلق $y(t, r)$ در مثال ۶,۲

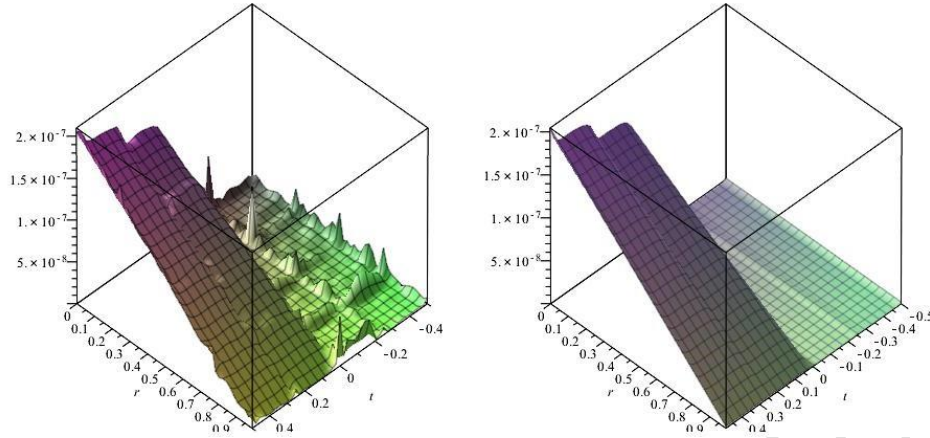
t	روش حاضر به ازای $k = 2$ و $M = 4$		روش موجک برنولی به ازای $k = 2$ و $M = 4$		روش موجک B-اسپلین به ازای $m = 4$	
	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$
0.1	$4.83e-8$	$2.73e-8$	$5.70e-6$	$5.77e-6$	$4.34e-5$	$4.34e-5$
0.2	$5.68e-7$	$6.44e-7$	$3.39e-6$	$3.31e-6$	$4.64e-5$	$4.64e-5$
0.3	$4.45e-7$	$5.35e-7$	$3.05e-6$	$2.96e-6$	$2.57e-5$	$2.57e-5$
0.4	$7.15e-9$	$8.41e-8$	$5.80e-6$	$5.90e-6$	$1.81e-5$	$1.80e-5$
0.5	$1.54e-6$	$1.44e-6$	$5.19e-5$	$5.18e-5$	$7.41e-5$	$7.40e-5$

جدول ۴: مقادیر خطای مطلق $\bar{y}(t, r)$ در مثال ۶,۲

t	روش حاضر به ازای $k = 2$ و $M = 4$		روش موجک برنولی به ازای $k = 2$ و $M = 4$		روش موجک B-اسپلین به ازای $m = 4$	
	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.25}$
0.1	$1.24e-7$	$1.99e-7$	$5.63e-6$	$5.56e-6$	$4.33e-5$	$4.32e-5$
0.2	$4.92e-7$	$4.16e-7$	$3.47e-6$	$3.55e-6$	$4.63e-5$	$4.62e-5$
0.3	$3.56e-7$	$2.66e-7$	$3.13e-6$	$3.22e-6$	$2.56e-5$	$2.55e-5$
0.4	$9.84e-8$	$1.90e-7$	$5.71e-6$	$5.62e-6$	$1.82e-5$	$1.83e-5$
0.5	$1.64e-6$	$1.74e-6$	$5.20e-5$	$5.21e-5$	$7.42e-5$	$7.43e-5$



شکل ۳: نمودار خطای مطلق توابع $y(t, r)$ و $\bar{y}(t, r)$ در مثال ۶,۲ به ازای $k = 1$ و $M = 4$



شکل ۴: نمودار خطای مطلق توابع $\bar{y}(t, r)$ و $y(t, r)$ در مثال ۶,۲ به ازای $k = 2$ و $M = 6$

مثال ۶,۳ معادله انتگرال فازی تاخیری غیرخطی ولتر-هامرشتاین زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{y}(t, r) = \begin{cases} \tilde{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t tx^2 \tilde{y}^2(x, r) dx, & r \in [0, 1], t \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t, r), & r \in [0, 1], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (6.3)$$

که در آن، $T = 1$ ، $\tau = \frac{1}{2}$

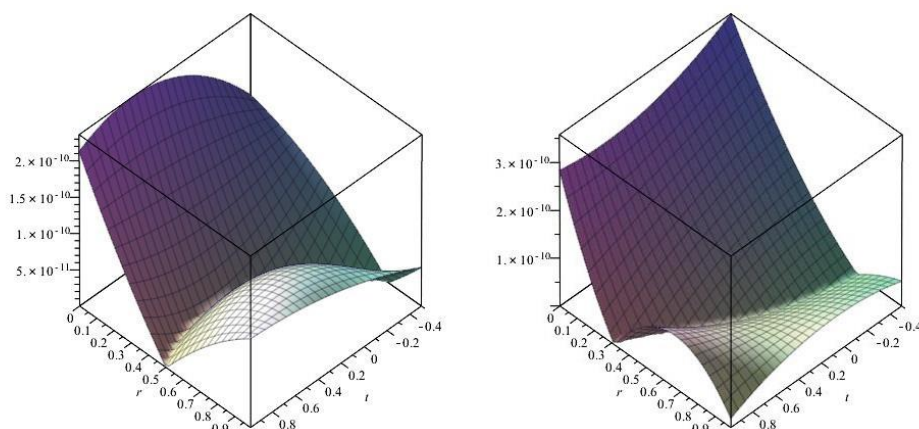
$$\tilde{q}(t, r) = \left(tr - \frac{1}{5} tr^2 (t^5 - (t - \frac{1}{2})^5), tr^2 - \frac{1}{5} tr^4 (t^5 - (t - \frac{1}{2})^5) \right),$$

و $\tilde{\phi}(t, r) = (tr, tr^2)$ جواب دقیق این معادله به صورت $\tilde{y}(t, r) = (tr, tr^2)$ است.

معادله انتگرال فازی غیرخطی (۶,۳) را با استفاده از موجک‌های لژاندر دوبعدی انتقال یافته حل کردیم. به ازای $k = 0$ و $M = 3$ ، نتایج به دست آمده از روش ارائه شده در جدول ۵ گزارش شده، و نمودارهای خطای مطلق برای $\bar{y}(t, r)$ و $y(t, r)$ در شکل ۵ رسم شده است. زمان اجرای برنامه در این حالت ۰.۸۱ ثانیه گزارش شده است.

جدول ۵: مقادیر خطای مطلق به ازای $k = 0$ و $M = 3$ در مثال ۶,۳

$\bar{y}(t, r)$			$y(t, r)$			t
$e_{0.75}$	$e_{0.5}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.5}$	$e_{0.25}$	
$2.4e - 11$	$5.0e - 11$	$5.8e - 11$	$4.1e - 11$	$4.8e - 12$	$9.4e - 11$	0.1
$3.6e - 11$	$3.0e - 11$	$1.2e - 10$	$9.8e - 11$	$3.6e - 12$	$7.9e - 12$	0.2
$4.1e - 11$	$1.0e - 11$	$8.9e - 11$	$9.2e - 11$	$3.2e - 11$	$9.0e - 11$	0.3
$2.5e - 11$	$2.0e - 12$	$6.5e - 11$	$8.5e - 11$	$4.1e - 11$	$1.0e - 11$	0.4
$7.0e - 11$	0	$1.3e - 10$	$1.2e - 10$	$3.5e - 11$	$9.0e - 11$	0.5
$5.0e - 12$	$2.0e - 12$	$8.5e - 11$	$1.4e - 11$	$1.9e - 11$	$6.0e - 11$	0.6
$4.9e - 11$	$1.0e - 11$	$8.1e - 11$	$1.1e - 10$	$2.4e - 12$	$7.2e - 11$	0.7
$8.4e - 11$	$3.0e - 11$	$5.6e - 11$	$5.7e - 12$	$3.6e - 12$	$8.4e - 11$	0.8
$1.8e - 11$	$5.0e - 11$	$6.2e - 11$	$9.8e - 11$	$4.8e - 12$	$3.7e - 11$	0.9
$1.2e - 10$	$6.0e - 11$	$6.0e - 11$	$1.1e - 10$	$1.1e - 10$	$2.0e - 10$	1



شکل ۵: نمودار خطای مطلق توابع $\bar{y}(t, r)$ و $y(t, r)$ در مثال ۳، به ازای $k = 0$ و $M = 3$

مثال ۴، ۶: معادله انتگرال فازی تاخیری غیرخطی ولتر-هامرشتاین زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{y}(t, r) = \begin{cases} \tilde{q}(t, r) + \int_{t-\tau}^t \tilde{y}^2(x, r) dx, & r \in [0, 1], t \in [0, T], \\ \tilde{\phi}(t, r), & r \in [0, 1], t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (6.4)$$

که در آن، $T = 1$ ، $\tau = \frac{1}{2}$

$$\tilde{q}(t, r) = (\sin(2\pi r)\cos(2\pi t) - \frac{1}{4}\sin^2(2\pi r), \sin(2\pi t)\cos(2\pi r) - \frac{1}{4}\cos^2(2\pi r)),$$

$$\tilde{\phi}(t, r) = (\sin(2\pi r)\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\cos(2\pi r)).$$

جواب دقیق این معادله به صورت $\tilde{y}(t, r) = (\sin(2\pi r)\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\cos(2\pi r))$ است.

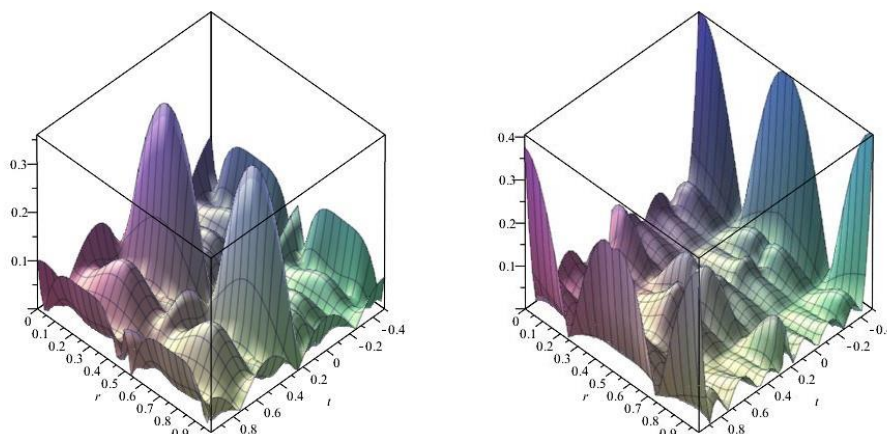
معادله انتگرال فازی غیرخطی (۶، ۴) را با استفاده از موجک‌های لژاندر دوبعدی انتقال یافته حل کردیم. به ازای $k = 2$ و $M = 4$ ، نتایج به دست آمده از روش ارائه شده در جدول ۶ گزارش شده است.

همچنین نمودار خطای مطلق $\bar{y}(t, r)$ و $y(t, r)$ به دست آمده از روش حاضر به ازای $k = 1$ و $M = 4$ در شکل

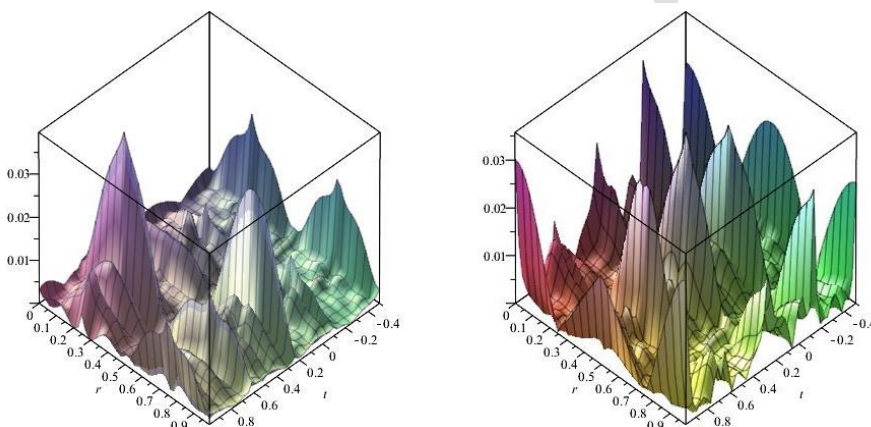
۶، و به ازای $k = 2$ و $M = 4$ در شکل ۷ رسم شده‌اند. زمان اجرای برنامه در حالت اول ۶.۷۹ ثانیه و در حالت دوم ۱۵۵.۳۹ ثانیه گزارش شده است.

جدول ۶: مقادیر خطای مطلق به ازای $k = 2$ و $M = 4$ در مثال ۴، ۶

$\bar{y}(t, r)$			$y(t, r)$			t
$e_{0.75}$	$e_{0.5}$	$e_{0.25}$	$e_{0.75}$	$e_{0.5}$	$e_{0.25}$	
$2.23e-3$	$6.42e-4$	$2.11e-3$	$4.17e-3$	$3.07e-3$	$7.69e-3$	0.1
$3.86e-3$	$2.74e-3$	$3.75e-3$	$7.97e-3$	$1.29e-3$	$4.97e-3$	0.2
$3.71e-3$	$9.17e-3$	$3.01e-3$	$4.30e-3$	$9.97e-4$	$3.09e-3$	0.3
$2.64e-3$	$8.37e-3$	$2.47e-3$	$3.76e-3$	$2.95e-3$	$4.58e-3$	0.4
$1.54e-5$	$6.15e-3$	$6.86e-4$	$1.14e-2$	$3.89e-3$	$3.91e-3$	0.5
$1.39e-3$	$1.62e-2$	$1.11e-3$	$1.03e-2$	$3.06e-3$	$2.05e-2$	0.6
$3.42e-3$	$5.72e-3$	$3.77e-3$	$1.57e-4$	$1.27e-3$	$9.20e-3$	0.7
$3.53e-3$	$8.45e-3$	$3.39e-3$	$4.83e-3$	$1.09e-3$	$1.64e-3$	0.8
$2.53e-3$	$8.76e-3$	$1.46e-3$	$3.22e-3$	$3.16e-3$	$1.40e-2$	0.9
$1.98e-4$	$1.89e-2$	$1.51e-3$	$1.84e-2$	$3.06e-3$	$5.31e-3$	1



شکل ۶: نمودار خطای مطلق توابع $\bar{y}(t,r)$ و $y(t,r)$ در مثال ۶,۴ به ازای $k = 1$ و $M = 4$



شکل ۷: نمودار خطای مطلق توابع $\bar{y}(t,r)$ و $y(t,r)$ در مثال ۶,۴ به ازای $k = 2$ و $M = 4$

۷ نتیجه گیری

در این مقاله، کاربردی از موجک‌های لژاندر در حل عددی معادلات انتگرال فازی تاخیری غیرخطی ولترا-هامرشتاین ارائه کردیم. این دسته از معادلات انتگرالی فازی کاربردهای مهمی در زمینه‌های مختلف، از جمله مسائل همه‌گیری دارند. در واقع این معادلات می‌توانند برای مدل‌سازی دینامیک ریاضی یک مسئله همه‌گیری مورد استفاده قرار گیرند. در این مقاله، پس از ارائه تعاریف و گزاره‌های مقدماتی در مورد اعداد فازی، توابع فازی و ویژگی‌های آنها، موجک‌های لژاندر دوبعدی انتقال یافته را معرفی کردیم. با به کارگیری این موجک‌ها به همراه روش هم‌ممکنی و قاعده انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر، معادله انتگرال فازی تاخیری را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل کردیم، که به طور چشمگیری مساله را ساده‌سازی کرد. آنالیز خطای روش ارائه شده مورد بررسی قرار گرفت و سپس از طریق مثال‌های عددی (مثال‌های ۶,۴-۶,۱)، کارآمدی و دقت روش پیشنهادی را نشان دادیم. هر مثال به ازای پارامترهای مختلف k و M اجرا و نتایج گزارش شدند. با افزایش این پارامترها، خطای مطلق به شکل قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد؛ و البته افزایش زمان اجرای برنامه نیز چشم‌گیر است. مقایسه نتایج به‌دست آمده از روش حاضر با روش موجک‌های برنولی و B-اسپلاین نشان داد که موجک‌های لژاندر دقت بالاتری در حل این معادلات انتگرالی فازی تاخیری غیرخطی ولترا-هامرشتاین دارند.

References

- [1] بیشه نیاسر، م.، مهدی پور، ع.ر. "یک روش بلوکی هیبریدی شبکه تطبیقی برای حل معادلات دیفرانسیل آشفته تکین غیرخطی" مجله محاسبات نرم، جلد ۱۱ شماره ۱، صص. ۱۴۰ تا ۱۵۰ (۱۴۰۱).
<https://doi.org/10.22052/scj.2023.248415.1105>
- [2] چه لای، م. "جواب های مدل ریاضی عملکرد کبد انسان با داده های فازی تحت مفهوم مشتق پذیری ها کوه های توسعه یافته" مجله محاسبات نرم، آماده انتشار.
<https://doi.org/10.22052/scj.2024.253988.1203>
- [3] سبزواری، م.، سعادت مندی، ع. "به کارگیری موجک چبیشف نوع دوم در حل عددی معادلات انتگرال فرد هلم خطی فازی نوع دوم" موجک ها و جبر خطی، شماره ۶، صص. ۱ تا ۱۸ (۱۳۹۸).
<https://doi.org/10.22072/wala.2019.88855.1180>
- [4] مهموم سالکویه، م.، سبزواری، م. "حل عددی معادلات انتگرال فرد هلم فازی نوع دوم با به کارگیری موجک های CAS" موجک ها و جبر خطی، شماره ۸، صص ۱ تا ۱۶ (۱۴۰۱).
<https://doi.org/10.22072/wala.2020.121687.1272>
- [5] Abbasbandy S., Babolian E., and Alavi M., "Numerical method for solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind" *Chaos Solitons & Fractals* 11 (31): 138–146 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.09.036>
- [6] Akrami Arani M., Sabzevari M., "Numerical solution of system of nonlinear Fredholm integro-differential equations using CAS wavelets" *J. Math. Model.* 11: 587–602 (2023). <https://doi.org/10.22124/jmm.2023.24341.2179>
- [7] Anastassiou G.A., Gal S.G., "On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weirstrass-type" *Journal of Fuzzy Mathematics* 9 (3): 701–708 (2001).
https://doi.org/10.1007/978-3-642-11220-1_5
- [8] Babolian E., Sadeghi Goghary H., and Abbasbandy S., "Numerical solution of linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind by Adomian method" *Appl. Math. Comput.* 161: 733–744 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.071>
- [9] Bica A.M., Popescu C., "Numerical solutions of the nonlinear fuzzy Hammerstein-Volterra delay integral equations" *Inf. Sci.* 223: 236–255 (2013).
<https://doi.org/10.1016/j.ins.2012.10.022>

[10] Bisheh-Niasar M., Saadatmandi A., and Akrami-Arani M., "A new family of high-order difference schemes for the solution of second order boundary value problems" *Iranian J. Math. Chem.* 9: 187–199 (2018). <https://doi.org/10.22052/ijmc.2018.94933.1306>

[11] Cong-Xin W., Ming M., "Embedding problem of fuzzy number space: Part I." *Fuzzy Sets and Systems* 44: 33–38 (1991). [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(91\)90030-T](https://doi.org/10.1016/0165-0114(91)90030-T)

[12] Cooke K.L., "An epidemic equation with immigration" *Math. Biosci.* 29: 135–158 (1976). [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(76\)90033-X](https://doi.org/10.1016/0025-5564(76)90033-X)

[13] Dubois D., Prade H., "Towards fuzzy differential calculus part 1: Integration of fuzzy mappings" *Fuzzy Sets and Systems* 8: 1–7 (1982). [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(82\)90025-2](https://doi.org/10.1016/0165-0114(82)90025-2)

[14] Ezzati R., Ziari S., "Numerical solution of nonlinear fuzzy Fredholm integral equations using iterative method" *Applied Mathematics and Computation* 225: 33–42 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.09.020>

[15] Friedman M., Ma M., and Kandel A., "Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations" *Fuzzy Sets and Systems* 106: 35–48 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00355-8](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00355-8)

[16] Gal S., "Approximation theory in fuzzy setting, In Handbook of analytic–computational methods in applied mathematics" Boca Raton, New York. Chapman CRC., 2000.

[17] Ghanbari M., Tousemalni R., and Kamrani E., "Numerical Solution of Linear Fredholm Fuzzy Integral Equation of the Second Kind by Block-pulse Functions" *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* 3: 2637-2642 (2009).

[18] Goetschel R., Vaxman W., "Elementary Fuzzy calculus" *Fuzzy Sets Syst.* 18: 31–43 (1986). [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(86\)90026-6](https://doi.org/10.1016/0165-0114(86)90026-6)

[19] Gu J.S., Jiang W.S., "The Haar wavelets operational matrix of integration" *Int. J. Syst. Sci.* 27: 623–628 (1996). <https://doi.org/10.1080/00207729608929258>

- [20] Hosseini M., Heydari M.H., Avazzadeh Z., and Maalek Ghaini F.M., "Two-dimensional Legendre wavelets for solving variable-order fractional nonlinear advection-diffusion equation with variable coefficients" *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 19: 793–802 (2018). <https://doi.org/10.1515/ijnsns-2018-0168>
- [21] Jerri A.J., "Introduction to Integral Equations with Applications" *John Wiley & Sons* 1999.
- [22] Kaleva O., Seikkala S., "On fuzzy metric spaces" *Fuzzy Sets and Systems* 12: 215-229 (1984). [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(84\)90069-1](https://doi.org/10.1016/0165-0114(84)90069-1)
- [23] Kaleva O., "Fuzzy differential equations" *Fuzzy Sets Syst* 24: 301–317 (1987). [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(87\)90029-7](https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90029-7)
- [24] Lowen R., "Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness" *J. Math. Anal. Appl.* 56: 621–633 (1976). [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(76\)90029-9](https://doi.org/10.1016/0022-247X(76)90029-9)
- [25] Mirzaee F., Komak Yari M., and Hoseini S.F., "A computational method based on hybrid of Bernstein and block-pulse functions for solving linear fuzzy Fredholm integral equations system" *Journal of Taibah University for Science* 9: 252-263 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.jtusci.2014.07.008>
- [26] Molabahrami A., Shidfar A., and Ghyasi A., "An analytical method for solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind" *Computers and Mathematics with Applications* 61: 2754–2761 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.034>
- [27] Parsamanesh M., Akrami A., "Sensitivity analysis of a mathematical fuzzy epidemic model for COVID-19" *Soft Computing Journal* 12: 34-37 (2023). <https://doi.org/10.22052/scj.2023.248364.1100>
- [28] Saadatmandi A., Dehghan M., "A Legendre collocation method for fractional integro-differential equations" *Journal of Vibration and Control* 17: 2050–2058 (2011). <https://doi.org/10.1177/1077546310395977>
- [29] Sabzevari M., Molaei F., "Numerical solution of system of nonlinear integro-

differential equations using hybrid of Legendre polynomials and block-pulse functions" *Math. Interdisc. Res.* 5: 225–238 (2020). <https://doi.org/10.22052/mir.2019.173293.1119>

[30] Sahu P.K., Saha Ray S., "A new Bernoulli wavelet method for accurate solutions of nonlinear fuzzy Hammerstein–Volterra delay integral equations" *Fuzzy Sets and Systems* 309: 131-144 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.fss.2016.04.004>

[31] Sahu P.K., Saha Ray S., "Legendre wavelets operational method for the numerical solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations system" *Applied Mathematics and Computation* 256: 715-723 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.01.063>

[32] Wu H.C., "The fuzzy Riemann integral and numerical integration" *Fuzzy Sets Syst.* 110: 1–25 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(97\)00353-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00353-9)

[33] Zadeh L.A., "Fuzzy sets", *Inf. Control* 8: 338–353 (1965). [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)