



دانشگاه کاشان
University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



یک روش گرادیان مزدوج کارآمد برای بهینه‌سازی ناهموار و کاربرد آن در بازیابی تصویر^{*}

عاطفه بای¹، دانشجوی دکتری، زهره اکبری^{1*}، استادیار

¹ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

اطلاعات مقاله

چکیده

تاریخچه مقاله:

دریافت 4 آذر ماه 1403

پذیرش 8 اسفند ماه 1403

کلمات کلیدی:

روش گرادیان مزدوج

بهینه‌سازی ناهموار

منظم‌ساز مورا-یاشیدا

همگرایی سراسری

بازیابی تصویر

در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج کارآمد برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید ناهموار معرفی می‌شود. روش‌های گرادیان مزدوج به دلیل سادگی و نیاز به حافظه کم، از محبوب‌ترین روش‌ها برای حل مسائل بهینه‌سازی هموار به شمار می‌آیند؛ با این حال، کاربرد آنها در مسائل ناهموار کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در این راستا، ابتدا تابع هدف پیوسته لیپ‌شیتز با استفاده از تابع منظم‌ساز مورا-یاشیدا به یک تابع هموار تبدیل می‌گردد. سپس، یک جهت کاهشی جدید با ترکیب اطلاعات مشتق مرتبه اول تابع هموار شده و جهت کاهشی قبلی پیشنهاد می‌شود. با استفاده از تکنیک جستجوی خطی نادقیق، نشان داده می‌شود که جهت تولید شده شرط کاهش کافی را برآورده کرده و نقطه تکرار جدید در ناحیه اعتماد مناسبی نسبت به تکرار قبلی قرار می‌گیرد. همچنین، همگرایی سراسری روش پیشنهادی تحت فرضیات استاندارد تضمین می‌شود. در پایان، کارایی این روش در حوزه بازیابی تصویر مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج نشان‌دهنده برتری عملکرد آن نسبت به روش‌های موجود است.

© 1403 نویسنده‌گان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

1. مقدمه

مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \{f(x) \mid x \in R^n\}, \quad (1)$$

که در آن تابع $f: R^n \rightarrow R$ یک تابع محدب ناهموار است. بهینه‌سازی ناهموار در سال‌های اخیر به یکی از موضوعات مهم علوم ریاضی و محاسبات تبدیل شده است. این حوزه به دلیل کاربردهای گسترده در مسائل دنیای واقعی، به ویژه در پردازش تصویر و سیگنال، مورد توجه فراوانی قرار گرفته است. پردازش

* نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: a.bay01@umail.umz.ac.ir (بای)

z.akbari@umz.ac.ir (اکبری)

¹ Total variation

تصاویر افزایش داده است.

توسعه روش‌های کارآمدتر با همگرایی بهتر و کارایی محاسباتی بالاتر احساس می‌شود. در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج کارآمد با بهره‌گیری از منظم‌ساز مورا-یاشیدا برای حل مساله کمینه‌سازی رابطه (1) ارائه می‌دهیم که با تضمین همگرایی و بهبود کارایی محاسباتی، کاربرد موثری در بازیابی تصویر دارد. ساختار مقاله به شرح زیر است. در بخش 2، پس از مرور مختصر بهینه‌سازی ناهموار، روش جدید در بخش 3 معرفی شده و همگرایی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش 4، کاربرد الگوریتم در مساله بازیابی تصویر نشان داده می‌شود. در نهایت، در بخش 5 جمع‌بندی نهایی مقاله ارائه شده و پیشنهاداتی برای توسعه و بهبود الگوریتم در تحقیقات آینده بیان می‌شود.

2. مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی ناهموار

این بخش به مرور برخی تعاریف و نتایج اساسی مرتبط با بهینه‌سازی محدب و بیان روش گرادیان مزدوج کلاسیک می‌پردازد [11]-[13]. به طور کلی، تکرارهای گرادیان مزدوج برای مساله بهینه‌سازی رابطه (1) با تابع هدف به طور پیوسته مشتق‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

که در آن α_k طول گام و d_k جهت جستجو است که با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k, \quad (d_0 = -g_0)$$

در اینجا، $g_k = \nabla f(x_k)$ گرادیان تابع هدف $f(x)$ در نقطه x_k است و β_k به عنوان پارامتر گرادیان مزدوج شناخته می‌شود. انتخاب‌های مختلف β_k منجر به الگوریتم‌های گرادیان مزدوج متفاوت با عملکردهای گوناگون می‌شود [14]-[17].

زمانی که تابع هدف ناهموار است، ممکن است $\nabla f(x_k)$ در همه نقاط تعریف نشده باشد. این امر استفاده مستقیم از روش‌های گرادیان مزدوج کلاسیک را دشوار می‌سازد. برای مقابله با این چالش، از تکنیک منظم‌سازی مورا-یاشیدا استفاده می‌شود که با تقریب تابع ناهموار به یک تابع مشتق‌پذیر، امکان استفاده از الگوریتم‌های گرادیان را فراهم می‌کند. برای تابع محدب و

در سال‌های اخیر، تحقیقات متعددی در زمینه بهبود و کاربرد روش‌های گرادیان مزدوج ناهموار صورت گرفته است. چن و ژو¹ [4]، با ارائه الگوریتم گرادیان مزدوج ناهموار و تکنیک مناسبی برای به‌روزرسانی پارامتر هموارسازی، تضمین همگرایی سراسری را فراهم کردند. یوان² و همکاران [5]، با ترکیب الگوریتم تندترین کاهش و گرادیان مزدوج، الگوریتمی نوین برای حل مسائل ناهموار و نایکنوا ارائه دادند که عملکرد برجسته‌ای در بازیابی تصویر نشان داد. زیبتی³ و همکاران [6]، با بهره‌گیری از منظم‌سازی TV، نشان دادند که نسخه‌های اصلاح شده گرادیان مزدوج می‌توانند از نظر کیفیت و زمان محاسباتی، نتایج بهتری نسبت به روش‌های موجود ارائه دهند. هوانگ و لیو⁴ [7]، نیز با معرفی روشی جدید برای کاهش نویز در پردازش سیگنال و بازیابی تصویر، برتری آن را در شبیه‌سازی‌های عددی اثبات کردند. عبداللهی و فاطمی [8]، با استفاده از رویکرد منظم‌سازی مورا-یاشیدا، یک روش گرادیان مزدوج اصلاح شده جدید را با کاربرد در مسائل بازیابی تصویر پیشنهاد دادند. مالک⁵ و همکاران [9]، یک روش گرادیان مزدوج ترکیبی سه‌جمله‌ای جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید پیشنهاد دادند. جهت جستجوی آنها یک فرم ترکیبی سه‌جمله‌ای از ضرایب گرادیان مزدوج هستنز-استیفل⁶ و پولاک-ریبیر-پولیاک⁷ تحت جستجوی خطی ولف ضعیف است که به بهبود عملکرد الگوریتم منجر شده است. ژانگ و یانگ⁸ [10]، یک الگوریتم گرادیان مزدوج ترکیبی جدید ارائه کردند که می‌توان آن را به عنوان یک اصلاح از روش شبه‌نیوتن برویدون-فلچر-گلدفارب-شانو⁹ در نظر گرفت. آنها یک جهت گرادیان مزدوج ترکیبی جدید معرفی کردند که به بهبود همگرایی الگوریتم منجر شده است.

با وجود پیشرفت‌های قابل توجه در این زمینه، هنوز نیاز به

¹ Chen and Zhou

² Yuan

³ Zibetti

⁴ Huang and Liu

⁵ Malik

⁶ Hestenes and Stiefel

⁷ Polak, Ribiere and Polyak

⁸ Zhang and Yang

⁹ Brewedon-Fletcher-Goldfarb-Shanno

- طبق قضیه رادماخر¹ [19]، $g: R^n \rightarrow R$ تقریباً در همه جا مشتق‌پذیر است و مجموعه زیر نا تهی و فشرده است:

$$\partial_B g(x) = \{V \in R^{n \times n} \mid V = \lim_{x_k \rightarrow x} \nabla g(x_k), x_k \in D_g\},$$

که در آن $\{g\}$ در x مشتق‌پذیر است $D_g = \{x \in R^n \mid \dots\}$. از آنجایی که g گرادیان تابع محدب F است، هر $V \in \partial_B g(x)$ یک ماتریس متقارن و نیمه معین مثبت است [20].

برای محاسبه $F(x)$ و $g(x)$ ، نیاز به تقریب $p(x)$ داریم. روش‌های کارآمدی برای محاسبه $p(x)$ وجود دارد که علاقه‌مندان می‌توانند برای توضیحات بیشتر به منابع [21] - [23] مراجعه کنند.

روش گرادیان مزدوج هموار پیشنهاد شده توسط کائو² و همکاران [24]، به دلیل کارایی بالا، ایده‌ای کلیدی برای پیشنهاد یک الگوریتم گرادیان مزدوج موثر جهت حل مساله بهینه‌سازی ناهموار (1) است. در این روش پارامتر گرادیان مزدوج به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta_k = \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2} - \min \left\{ \frac{g_k^T (g_k - g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2}, \mu \frac{\|g_k - g_{k-1}\|^2 g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \right\},$$

که در آن $\mu > \frac{1}{4}$ و نشان داده شده که این روش کارآمد و دارای همگرایی سراسری است.

3. الگوریتم گرادیان مزدوج جدید و ویژگی‌های آن

ویژگی‌های خوب روش ارائه شده در مرجع [24] ما را برانگیخت تا آن را برای حل مسائل ناهموار اصلاح کنیم. با در نظر گرفتن $g_k = \nabla F(x_k)$ ، داریم:

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k = 0 \\ -g_k + \beta_k^N \left(\frac{d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2} g_k}{\gamma_k} \right), & k \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

ناهموار f در مساله (1)، تابع منظم‌ساز مورا-یاشیدا $F: R^n \rightarrow R$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F(x) = \min_{z \in R^n} \{f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2\},$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی و λ یک پارامتر مثبت است. لازم به ذکر است که تابع F یک تابع محدب مشتق‌پذیر است، حتی زمانی که تابع f مشتق‌پذیر نباشد. از آنجایی که مجموعه کمینه‌کننده‌های تابع هدف مساله رابطه (1) با مجموعه کمینه‌کننده‌های تابع $F(x)$ منطبق است [18]، به جای حل مساله (1) که مساله‌ای ناهموار است، مساله بهینه‌سازی محدب و هموار زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\min_{x \in R^n} F(x).$$

برای بررسی ویژگی‌های کلیدی منظم‌ساز مورا-یاشیدا، با بیان قضیه زیر آغاز می‌کنیم

قضیه 1 [13]: فرض کنید $\omega(z)$ یک تابع محدب قوی به صورت زیر باشد:

$$\omega(x) = f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2.$$

آنگاه جواب $p(x) = \arg \min_{z \in R^n} \omega(z)$ خوش تعریف و منحصر بفرد است.

با توجه به قضیه 1، تابع $F(x)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F(x) = f(p(x)) + \frac{1}{2\lambda} \|p(x) - x\|^2.$$

این تابع دارای چندین ویژگی مهم است:

- یک تابع محدب، مشتق‌پذیر و کراندار است و گرادیان آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g(x) = \nabla F(x) = \frac{x - p(x)}{\lambda}.$$

- نگاهت گرادیان $g: R^n \rightarrow R$ پیوسته‌ی لیپ‌شیتز سراسری با ثابت $\frac{1}{\lambda}$ است، یعنی:

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x - y\|, \quad x, y \in R^n.$$

- جواب بهینه مساله (1) است اگر و تنها اگر $g(x) = 0$ یا به عبارت دیگر $p(x) = x$.

¹ Rademacher

² Cao

نظر بگیرید. آنگاه برای هر $k \geq 0$ داریم:

$$d_k^T g_k = -\|g_k\|^2, \quad (5)$$

$$\|d_k\| \leq 3\|g_k\|. \quad (6)$$

اثبات: با توجه به رابطه (2) داریم:

$$\begin{aligned} g_k^T d_k &= g_k^T \left[-g_k + \frac{\beta_k^N}{\gamma_k} \left(d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2} g_k \right) \right] \\ &= -g_k^T g_k + \frac{\beta_k^N g_k^T}{\gamma_k} \left(d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2} g_k \right) \\ &= -\|g_k\|^2 + \frac{\beta_k^N g_k^T d_{k-1} - \beta_k^N d_{k-1}^T g_k}{\gamma_k} \\ &= -\|g_k\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین رابطه (5) برقرار است. حال، با استفاده از رابطه (3) و نامساوی مثلثی داریم:

$$\begin{aligned} \|d_k\| &= \left\| -g_k + \frac{\beta_k^N}{\gamma_k} \left(d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2} g_k \right) \right\| \\ &\leq \|g_k\| + \frac{|\beta_k^N|}{\gamma_k} \left(\|d_{k-1}\| + \frac{\|d_{k-1}\| \|g_k\|}{\|g_k\|^2} \|g_k\| \right) \\ &\leq \|g_k\| + \frac{|\beta_k^N|}{\frac{|\beta_k^N| \|d_{k-1}\|}{\|g_k\|}} (2\|d_{k-1}\|) \\ &= \|g_k\| + \frac{2|\beta_k^N| \|d_{k-1}\|}{\frac{|\beta_k^N| \|d_{k-1}\|}{\|g_k\|}} \\ &= 3\|g_k\|, \end{aligned}$$

■ در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

در لم زیر نشان داده می‌شود که طول گام به دست آمده در گام 2 الگوریتم (1) دارای کران پایین است.

لم 2: فرض کنید فرضیات (1) تا (3) برقرار است و دنباله‌های $\{x_k\}$ و $\{\alpha_k\}$ توسط الگوریتم (1) تولید شده‌اند. در این صورت داریم:

$$\alpha_k \geq \frac{1}{2} (1 - \delta) O\left(\frac{1}{9}\right), \quad \forall k,$$

اثبات: برای اثبات کران پایین طول گام، فرض کنید α_k در گام 2 الگوریتم (1) با استفاده از جستجوی خطی بازگشتی تولید شده است. در این صورت شرط آرمیجو در رابطه (4) برای $\alpha_k^* = 2\alpha_k$ برقرار نیست. بنابراین، داریم:

که در آن $\gamma_k = \frac{|\beta_k^N| \|d_{k-1}\|}{\|g_k\|}$ و

$$\begin{aligned} \beta_k^N &= \frac{1}{\|g_{k-1}\|^2} (g_k^T (g_k - g_{k-1}) \\ &\quad - \min\{g_k^T (g_k - g_{k-1}), \mu \|g_k - g_{k-1}\|^2 g_k^T d_{k-1}\}). \end{aligned} \quad (3)$$

در ادامه، الگوریتم پیشنهادی برای حل مساله (1) ارائه می‌شود:

الگوریتم (1): الگوریتم گرادیان مزدوج پیشنهادی

گام 1: نقطه شروع $x_0 \in R^n$ و پارامترهای مثبت μ, δ, c, λ را تعیین کنید. $0 < \delta < 1$ و $0 < \epsilon < 1$ را انتخاب کنید. $g_0 = \nabla F(x_0)$ و قرار دهید $k = 0$ و $d_0 = -g_0$.

گام 2: اگر $\|g_k\| < \epsilon$ ، متوقف شوید. در غیر این صورت، طول گام α_k را با استفاده از جستجوی خطی آرمیجو زیر به دست آورید:

$$F(x_k + \alpha_k d_k) - F(x_k) \leq \delta \alpha_k g_k^T d_k \quad (4)$$

که در آن $\alpha_k = \delta_0 \times 2^{-i_k}$ و $i_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

گام 3: قرار دهید $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ و $g_{k+1} = \nabla F(x_{k+1})$.

گام 4: پارامتر β_k^N را از رابطه (3) محاسبه کنید و d_{k+1} را از رابطه (2) به دست آورید. قرار دهید $k := k + 1$ و به گام 2 بروید.

1.3 همگرایی سراسری

برای دستیابی به همگرایی سراسری الگوریتم جدید، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

فرض 1: مجموعه تراز $\Gamma = \{x \in R^n | F(x) \leq F(x_0)\}$ کراندار است.

فرض 2: تابع F از پایین کراندار است.

فرض 3: دنباله $\{V_k\}$ کراندار است، یعنی یک ثابت L وجود دارد به طوری که:

$$\|V_k\| \leq L, \quad \forall k \geq 0.$$

که در آن $V_k \in \partial_B g(x_k)$ و $\|\cdot\|$ نرم ماتریسی است.

حال نشان می‌دهیم که جهت جدید تعریف شده توسط رابطه (2) دارای ویژگی کاهش کافی و ویژگی ناحیه اعتماد است.

لم 1: جهت جستجوی تولید شده در گام 2 الگوریتم (1) را در

و از لم (2) می‌دانیم که $\alpha_k \rightarrow 0$ بنا براین:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|^2 = 0,$$

■

در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

4. نتایج عددی

در این بخش، عملکرد روش پیشنهادی (الگوریتم (1)) در بازیابی تصویر مورد بررسی قرار گرفته و با دو روش دیگر مقایسه می‌شود: الگوریتم گرادیان مزدوج کلاسیک فلچر-ریوز که یک الگوریتم برجسته در بهینه‌سازی است و الگوریتم گرادیان مزدوج عبداللهی و همکاران که به عنوان یکی از روش‌های کاربردی در حوزه بازیابی تصویر شناخته می‌شود [8]، [25]. آزمایش‌های عددی در محیط MATLAB 2022 و بر روی رایانه شخصی با پردازنده 4/70 گیگاهرتز و 16 گیگابایت رم اجرا شده‌اند. برای انجام این آزمایش، مساله بهینه‌سازی زیر در نظر گرفته شده است:

$$\min_{x \in R^{m \times n}} \|Ax - b\|^2 + \rho \phi(x),$$

که در آن ρ پارامتر منظم‌ساز است که تعادل بین دقت داده‌ها و منظم‌سازی تصویر را برقرار می‌کند. عبارت $\|Ax - b\|^2$ تفاوت بین تصویر مشاهده شده $b \in R^{m \times n}$ و تصویر نویزی Ax را اندازه‌گیری می‌کند که در آن $A \in R^{m \times m}$ است. همچنین تابع $\phi(x)$ به عنوان منظم‌ساز عمل کرده و به منظور کنترل ویژگی‌های تصویر بازسازی شده بکار می‌رود. در اینجا، سه تابع برای $\phi(x)$ بررسی شده‌اند:

- تابع تغییرات کلی TV که میزان تغییرات گرادیان تصویر x را نشان می‌دهد:

$$TV(x) = \sum_{i,j} (|x_{i+1,j} - x_{i,j}| + |x_{i,j+1} - x_{i,j}|),$$

- تابع L_1 -نرم:

$$TV_{L_1}(x) = \|x\|_1,$$

- تابع L_2 -نرم:

$$TV_{L_2}(x) = \|x\|_2.$$

در این آزمایش، تصاویر استاندارد «هوایما»، «خانه» و «درخت»

$$F(x_k + \alpha_k^* d_k) - F_k > \delta \alpha_k^* d_k^T g_k. \quad (7)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه مقدار میانگین و رابطه (5) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} F(x_k + 2\alpha_k d_k) - F_k &= 2\alpha_k d_k^T g_k + (2\alpha_k)^2 O(\|d_k\|^2) \\ &= -2\alpha_k \|g_k\|^2 + 4\alpha_k^2 O(\|d_k\|^2), \end{aligned}$$

از رابطه (7) نتیجه می‌شود که:

$$-2\alpha_k \|g_k\|^2 + 4\alpha_k^2 O(\|d_k\|^2) > -\delta 2\alpha_k \|g_k\|^2,$$

با ساده‌سازی و استفاده از رابطه (6)، نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha_k > \frac{(1-\delta)\|g_k\|^2}{2O(\|d_k\|^2)} \geq \frac{1}{2}(1-\delta)O\left(\frac{1}{9}\right).$$

■

قضیه زیر همگرایی سراسری الگوریتم (1) را نشان می‌دهد. دلیل اصلی ساده بودن فرآیند اثبات، استفاده از جهت پیشنهادی در رابطه (2) است که دارای دو ویژگی اساسی (5) و (6) می‌باشد. **قضیه 2:** فرض کنید شرایط در لم (1) برقرار است. آنگاه داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

همچنین هر نقطه حدی x_k جواب بهینه مساله (1) است.

اثبات: با توجه به روابط (4) و (5) داریم:

$$\begin{aligned} F(x_k + \alpha_k d_k) &\leq F(x_k) + \delta \alpha_k g_k^T d_k \\ &= F(x_k) - \delta \alpha_k \|g_k\|^2, \end{aligned}$$

این بدان معناست که دنباله $\{F_k\}$ کاهشی است و نابرابری زیر برقرار است:

$$\delta \alpha_k \|g_k\|^2 \leq F(x_k) - F(x_k + \alpha_k d_k),$$

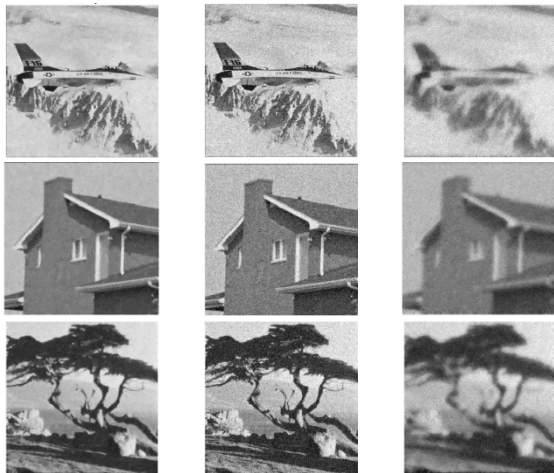
با جمع نابرابری‌های بالا برای $k = 0$ تا m و با توجه به فرض (1) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \delta \alpha_k \|g_k\|^2 &\leq \sum_{k=0}^m F(x_k) - F(x_k + \alpha_k d_k) \\ &= (F(x_0) - F(x_1)) + \dots \\ &\quad + (F(x_m) - F(x_{m+1})) \\ &= F(x_0) - F(x_{m+1}) < +\infty. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به فرض (2) و با گرفتن حد $m \rightarrow +\infty$ داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \|g_k\|^2 = 0,$$

طول تکرارها نمایش داده شده است. همچنین، شکل (4) مقدار نهایی PSNR هر الگوریتم را نشان می‌دهد. در نهایت زمان محاسبه CPU برای هر سه الگوریتم مورد مقایسه، در جدول (1) گزارش شده است.



بازیابی توسط
الگوریتم پیشنهادی

بازیابی توسط
الگوریتم عبداللهی

بازیابی توسط
الگوریتم گرادیان
مزدوج کلاسیک

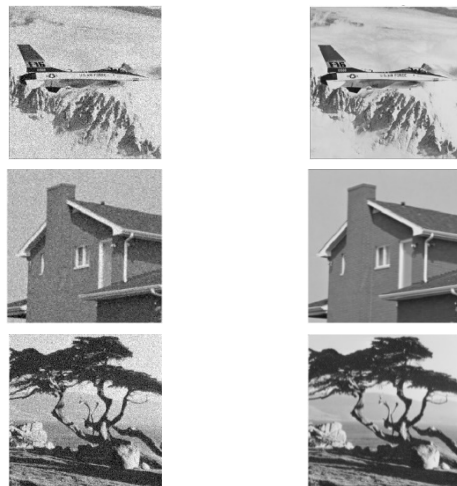
شکل (2): تصاویر بازیابی شده با سه الگوریتم گرادیان مزدوج کلاسیک [20]، الگوریتم گرادیان مزدوج عبداللهی [5] و الگوریتم پیشنهادی

با توجه به نتایج به دست آمده و بر اساس شکل‌های (3) و (4) که تغییرات PSNR را نمایش می‌دهند، مشاهده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با دو روش دیگر، PSNR بالاتری را ارائه می‌دهد. این امر نشان‌دهنده بهبود کیفیت تصاویر بازیابی شده است. همچنین، شکل (2) که تصاویر بازیابی شده توسط هر الگوریتم را نشان می‌دهد، به وضوح بیانگر برتری کیفیتی الگوریتم پیشنهادی می‌باشد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم پیشنهادی با ارائه کیفیت بالاتر در بازیابی تصویر، عملکرد بهتری نسبت به روش‌های موجود دارد.

جدول (1): مقایسه زمان محاسبات CPU برای هر الگوریتم

الگوریتم پیشنهادی	الگوریتم عبداللهی [5]	الگوریتم گرادیان مزدوج کلاسیک [20]	
2/10	2/08	3/22	هوایما
1/95	1/82	2/92	خانه
1/97	1/83	3/07	درخت

با مقیاس خاکستری و محدوده شدت 0 تا 1، به عنوان داده‌های آزمایشی انتخاب شده‌اند. اندازه تصاویر 256×256 پیکسل بوده و ماتریس A به صورت همانی ($A = I$) در نظر گرفته شده است. همچنین، نویز گاوسی با انحراف معیار 20 به تصاویر اضافه شده است. تصاویر اصلی و نویزدار در شکل (1) نشان داده شده‌اند.



تصاویر نویزدار

تصاویر اصلی

شکل (1): تصاویر اصلی و نویزدار

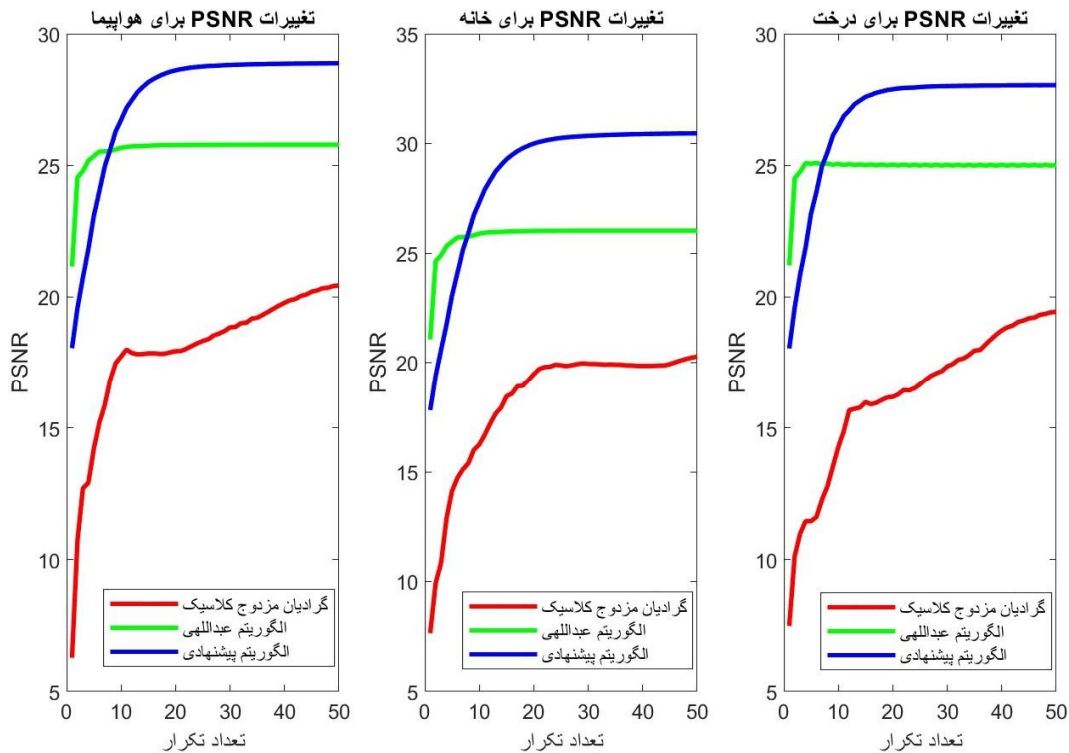
هدف این مساله بازیابی تصویر اصلی از تصویر تخریب شده است. نقطه اولیه در هر سه روش یکسان و به صورت تصادفی انتخاب شده است. الگوریتم‌ها تا زمان برقراری شرط توقف یا حداکثر تا 50 تکرار اجرا شده‌اند. پارامترهای مساله به صورت $\lambda = 0.05$ ، $c = 0.8$ ، $\delta_0 = 1$ ، $\epsilon = 10^{-6}$ ، $\delta = 0.05$ و μ برابر با 0/5 مقداردهی شده‌اند. در اینجا مقایسه‌ای بین الگوریتم پیشنهادی، الگوریتم گرادیان مزدوج عبداللهی و الگوریتم گرادیان مزدوج کلاسیک برای سه تصویر انجام شده است. شکل (2)، این مقایسه را نشان می‌دهد.

معیار مقایسه برای تصاویر بازیابی شده، نسبت سیگنال به نویز (PSNR) است که با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$PSNR = -10 * \log_{10} \frac{\|x_k - x_{orig}\|^2}{mn}$$

که در آن تصویر اصلی، m و n به ترتیب تعداد سطرها و ستون‌های تصویر هستند. در شکل (3) روند تغییرات PSNR در

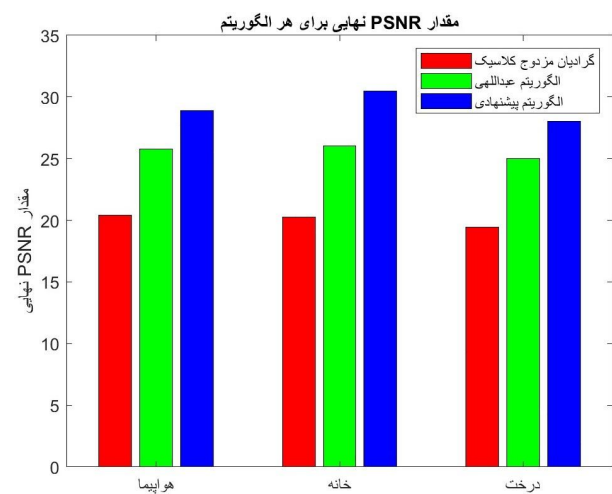
¹ Peak Signal-to-Noise Ratio



شکل (3): روند تغییرات PSNR در هر تکرار برای هر تصویر

جدید، الگوریتم بهبود یافت و اثبات شد که این جهت کاهش در کنار جستجوی خطی نادقیق، شرایط کاهش کافی را تأمین می‌کند و تکرارهای الگوریتم در ناحیه اعتماد مناسب باقی می‌مانند. همچنین، با فرضیات استاندارد، همگرایی سراسری این روش تضمین شد. در بخش نتایج عددی، عملکرد روش پیشنهادی در بازسازی تصویر با دو روش گرادیان مزدوج مقایسه شد. نتایج حاکی از آن است که روش پیشنهادی از نظر دقت بازسازی و کارایی محاسباتی، عملکرد بهتری نسبت به روش‌های مرجع دارد. این نتایج نشان‌دهنده اثربخشی و کارایی بالای الگوریتم در بازیابی تصاویر با کیفیت بالا است. با توجه به نتایج مطلوب حاصله، در کارهای آینده می‌توان با بهینه‌سازی بیشتر الگوریتم و بررسی تکنیک‌های منظم‌سازی پیشرفته، دقت و کارایی آن را افزایش داد و به بررسی کاربرد این روش در حوزه‌های تخصصی مانند پردازش تصاویر پزشکی پرداخت.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافعی ندارند.



شکل (4): نمودار مقایسه PSNR نهایی هر الگوریتم

5. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج جدید و کارآمد برای حل مسائل بهینه‌سازی ناهموار توسعه داده شده است. ابتدا با استفاده از منظم‌ساز مورا-یاشیدا، تابع هدف ناهموار به یک تابع هموار تبدیل شد که این امر امکان استفاده از الگوریتم‌های گرادیان مزدوج را فراهم کرد. سپس، با ارائه یک جهت کاهش

- [1] S. Motamed, "Automatic License Plate Recognition Using Improved Deep Learning," *Soft Comput. J.*, vol. 12, no. 1, pp. 41-48, 2023, doi: 10.22052/scj.2024.253175.1163.
- [2] M. Jafari, "Isolation of Vessels in Retinal Color Images," *Soft Comput. J.*, vol. 12, no. 1, pp. 17-21, 2023, doi: 10.22052/scj.2022.246288.1060.
- [3] M. Eftekharian and A. Nodehi, "Breast Cancer Diagnosis and Classification Improvement Based on Deep Learning and Image Processing," *Soft Comput. J.*, vol. 12, no. 1, pp. 22-26, 2023, doi: 10.22052/scj.2023.246416.1067.
- [4] X. Chen and W. Zhou, "Smoothing Nonlinear Conjugate Gradient Method for Image Restoration Using Nonsmooth Nonconvex Minimization," *SIAM J. Imag. Sci.*, vol. 3, no. 4, pp. 765-790, 2010, doi: 10.1137/080740167.
- [5] G. Yuan, T. Li, and W. Hu, "A Conjugate Gradient Algorithm and Its Application in Large-Scale Optimization Problems and Image Restoration," *J. Inequalities Appl.*, vol. 2019, p. 247, 2019, doi: 10.1186/s13660-019-2192-6.
- [6] M. V. W. Zibetti, C. Lin, and G. T. Herman, "Total Variation Superiorized Conjugate Gradient Method for Image Reconstruction," *Inverse Probl.*, vol. 34, no. 3, p. 034001, 2018, doi: 10.1088/1361-6420/aaa49b.
- [7] P. Huang and K. Liu, "A New Conjugate Gradient Algorithm for Noise Reduction in Signal Processing and Image Restoration," *Front. Phys.*, vol. 10, p. 1053353, 2022, doi: 10.3389/fphy.2022.1053353.
- [8] F. Abdollahi and M. Fatemi, "An Efficient Conjugate Gradient Method with Strong Convergence Properties for Non-Smooth Optimization," *J. Math. Model.*, vol. 9, no. 3, pp. 375-390, 2021, doi: 10.22124/jmm.2020.16747.1452.
- [9] M. Malik, I. M. Sulaiman, A. B. Abubakar, G. Ardaneswari, and Sukono, "A New Family of Hybrid Three-Term Conjugate Gradient Method for Unconstrained Optimization with Application to Image Restoration and Portfolio Selection," *AIMS Math.*, vol. 8, no. 1, pp. 1-28, 2023, doi: 10.3934/math.2023001.
- [10] X. Zhang and Y. Yang, "A New Hybrid Conjugate Gradient Method Close to the Memoryless BFGS Quasi-Newton Method and Its Application in Image Restoration and Machine Learning," *AIMS Math.*, vol. 9, no. 10, pp. 27535-27556, 2024, doi: 10.3934/math.20241337.
- [11] A. Bagirov, N. Karimitsa, and M. M. Makela, *Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software*. Cham, Switzerland: Springer, 2014, doi: 10.1007/978-3-319-08114-4.
- [12] J. B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms II: Advanced Theory and Bundle Methods*. Berlin, Germany: Springer, 1993, doi: 10.1007/978-3-662-06409-2.
- [13] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 2004, doi: 10.1017/CBO9780511804441.
- [14] W. W. Hager and H. Zhang, "A New Conjugate Gradient Method with Guaranteed Descent and an Efficient Line Search," *SIAM J. Optim.*, vol. 16, no. 1, pp. 170-192, 2005, doi: 10.1137/030601880.
- [15] Y. H. Dai and Y. Yuan, "A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property," *SIAM J. Optim.*, vol. 10, no. 1, pp. 177-182, 1999, doi: 10.1137/S1052623497318992.
- [16] H. Zhang and W. W. Hager, "A Nonlinear Conjugate Gradient Method with Linear Time Complexity," *SIAM J. Optim.*, vol. 18, no. 3, pp. 875-898, 2007, doi: 10.1137/060670010.
- [17] M. Andrei, "An Unconstrained Optimization Test Functions Collection," *Adv. Model. Optim.*, vol. 10, no. 1, pp. 147-161, 2008.
- [18] N. Parikh and S. Boyd, "Proximal Algorithms," *Found. Trends Optim.*, vol. 1, no. 3, pp. 123-231, 2014, doi: 10.1561/2400000003.
- [19] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2010.
- [20] G. Yuan, Z. Wei, and G. Li, "A Modified Polak-Ribiere-Polyak Conjugate Gradient Algorithm for Nonsmooth Convex Programs," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 255, pp. 86-96, 2014, doi: 10.1016/j.cam.2013.05.027.
- [21] A. R. Conn, N. I. Gould, and P. L. Toint, *Trust Region Methods*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2000, doi: 10.1137/1.9780898719857.
- [22] R. Correa and C. Lemarechal, "Convergence of Some Algorithms for Convex Minimization," *Math. Program.*, vol. 62, pp. 261-275, 1993, doi: 10.1007/BF01585171.
- [23] M. Fukushima, "A Descent Algorithm for Nonsmooth Convex Optimization," *Math. Program.*, vol. 30, pp. 163-175, 1984, doi: 10.1007/BF01580257.
- [24] J. Cao and J. Wu, "A Conjugate Gradient Algorithm and Its Applications in Image Restoration," *Appl. Numer. Math.*, vol. 156, pp. 243-252, 2020, doi: 10.1016/j.apnum.2019.12.002.
- [25] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function Minimization by Conjugate Gradients," *Comput. J.*, vol. 7, no. 2, pp. 149-154, 1964, doi: 10.1093/comjnl/7.2.149.