

## یک روش گرادیان مزدوج کارآمد برای بهینه‌سازی ناهموار و کاربرد آن در بازیابی تصویر

عاطفه بای<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری، زهره اکبری<sup>۲\*</sup>، استادیار

<sup>۱</sup> گروه ریاضی کاربردی - دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه مازندران - بابلسر - ایران - a.bay01@umail.umz.ac.ir

<sup>۲</sup> گروه ریاضی کاربردی - دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه مازندران - بابلسر - ایران - z.akbari@umz.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج کارآمد برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید ناهموار معرفی می‌شود. روش‌های گرادیان مزدوج به دلیل سادگی و نیاز به حافظه‌ی کم، از محبوب‌ترین روش‌ها برای حل مسائل بهینه‌سازی هموار به شمار می‌آیند؛ با این حال، کاربرد آن‌ها در مسائل ناهموار کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در این راستا، ابتدا تابع هدف پیوسته لیپ‌شیتز با استفاده از تابع منظم‌ساز مورا-یاشیدا به یک تابع هموار تبدیل می‌گردد. سپس، یک جهت کاهشی جدید با ترکیب اطلاعات مشتق مرتبه اول تابع هموار شده و جهت کاهشی قبلی پیشنهاد می‌شود. با استفاده از تکنیک جستجوی خطی نادقیق، نشان داده می‌شود که جهت تولید شده شرط کاهش کافی را برآورده کرده و نقطه تکرار جدید در ناحیه اعتماد مناسبی نسبت به تکرار قبلی قرار می‌گیرد. همچنین، همگرایی سراسری روش پیشنهادی تحت فرضیات استاندارد تضمین می‌شود. در پایان، کارایی این روش در حوزه بازیابی تصویر مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج نشان‌دهنده‌ی برتری عملکرد آن نسبت به روش‌های موجود است.

**واژه‌های کلیدی:** روش گرادیان مزدوج، بهینه‌سازی ناهموار، منظم‌ساز مورا-یاشیدا، همگرایی سراسری، بازیابی تصویر.

\* زهره اکبری، z.akbari@umz.ac.ir

## An efficient conjugate gradient method for nonsmooth optimization problems and its application in image restoration

Atefe Bay <sup>1</sup>, Ph.D. Student, Zohreh Akbari <sup>2\*</sup>, Assistant Professor.

<sup>1</sup> Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandran, Babolsar, Iran,  
a.bay01@umail.umz.ac.ir

<sup>2\*</sup> Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandran, Babolsar, Iran,  
z.akbari@umz.ac.ir

**Abstract:** In this paper, an efficient conjugate gradient method is introduced for solving unconstrained nonsmooth optimization problems. Conjugate gradient methods are among the most popular methods for solving smooth optimization problems due to their simplicity and low memory requirements; however, their application to nonsmooth problems has received less attention. Therefore, the Lipschitz continuous objective function is first smoothed using the Moreau–Yosida regularization function. A new descent direction is then proposed by combining the first-order derivative information of the smoothed function with the previous descent direction. Using an inexact line search technique, we show that the generated direction satisfies the sufficient decrease condition and that the new iterate remains within a suitable trust region relative to the previous iterate. Moreover, the global convergence of the proposed method is guaranteed under standard assumptions. Finally, the effectiveness of this method is evaluated in the field of image recovery, and the results demonstrate its superior performance compared to existing methods.

**Keywords:** Conjugate gradient method, Nonsmooth optimization, Moreau–Yosida regularization, Global convergence, Image restoration.

\* Zohreh Akbari, z.akbari@umz.ac.ir

## ۱. مقدمه

مسئله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min \{f(x) \mid x \in R^n\}, \quad (1)$$

که در آن تابع  $f: R^n \rightarrow R$  یک تابع محدب ناهموار است. بهینه‌سازی ناهموار در سال‌های اخیر به یکی از موضوعات مهم علوم ریاضی و محاسبات تبدیل شده است. این حوزه به دلیل کاربردهای گسترده در مسائل دنیای واقعی، به‌ویژه در پردازش تصویر و سیگنال، مورد توجه فراوانی قرار گرفته است. پردازش تصویر به عنوان یکی از حوزه‌های مهم تحقیقاتی، کاربردهای متعددی در علوم مختلف دارد [۱]–[۳]. مسئله بازیابی تصویر، به عنوان یکی از چالش‌های اساسی در پردازش تصویر، به‌منظور کاهش نویز و بهبود کیفیت تصاویر، به صورت یک مسئله بهینه‌سازی ناهموار مدل‌سازی می‌شود. این مسئله به دلیل بدو وضعی و پیچیدگی، نیازمند روش‌های کارآمد و مطمئن است. روش‌های گرادیان مزدوج به دلیل ویژگی‌هایی نظیر سرعت همگرایی بالا و کارایی محاسباتی، به عنوان ابزارهای قدرتمندی برای حل مسائل بهینه‌سازی ناهموار مورد استفاده قرار می‌گیرند. ترکیب این روش‌ها با تکنیک‌های منظم‌سازی مانند تغییرات کل<sup>۱</sup> (TV)، اثربخشی آن‌ها را در کاهش نویز و بهبود وضوح تصاویر افزایش داده است.

در سال‌های اخیر، تحقیقات متعددی در زمینه بهبود و کاربرد روش‌های گرادیان مزدوج ناهموار صورت گرفته است. چن و ژو<sup>۲</sup> در [۴] با ارائه الگوریتم گرادیان مزدوج ناهموار و تکنیک مناسبی برای به‌روزرسانی پارامتر هموارسازی، تضمین همگرایی سراسری را فراهم کردند. یوان<sup>۳</sup> و همکاران در [۵] با ترکیب

الگوریتم تندترین کاهش و گرادیان مزدوج، الگوریتمی نوین برای حل مسائل ناهموار و نایک‌نوا ارائه دادند که عملکرد برجسته‌ای در بازیابی تصویر نشان داد. زبیتی<sup>۴</sup> و همکاران در [۶] با بهره‌گیری از منظم‌سازی TV، نشان دادند که نسخه‌های اصلاح‌شده گرادیان مزدوج می‌توانند از نظر کیفیت و زمان محاسباتی، نتایج بهتری نسبت به روش‌های موجود ارائه دهند. هوانگ و لیو<sup>۵</sup> در [۷] نیز با معرفی روشی جدید برای کاهش نویز در پردازش سیگنال و بازیابی تصویر، برتری آن را در شبیه‌سازی‌های عددی اثبات کردند. عبداللهی و فاطمی در [۸] با استفاده از رویکرد منظم‌سازی مورا-باشیدا، یک روش گرادیان مزدوج اصلاح‌شده جدید را با کاربرد در مسائل بازیابی تصویر پیشنهاد دادند. مالک<sup>۶</sup> و همکاران در [۹] یک روش گرادیان مزدوج ترکیبی سه‌جمله‌ای جدید برای حل مسائل بهینه‌سازی نامعقد پیشنهاد دادند. جهت جستجوی آن‌ها یک فرم ترکیبی سه‌جمله‌ای از ضرایب گرادیان مزدوج هستنر-استیفل<sup>۷</sup> و پولاک-ریبیر-پولیاک<sup>۸</sup> تحت جستجوی خطی ولف ضعیف است که به بهبود عملکرد الگوریتم منجر شده است. ژانگ و یانگ<sup>۹</sup> در [۱۰] یک الگوریتم گرادیان مزدوج ترکیبی جدید ارائه کردند که می‌توان آن را به عنوان یک اصلاح از روش شبه‌نیوتن برویدون-فلچر-گلدفارب-شانو<sup>۱۰</sup> در نظر گرفت. آن‌ها یک جهت گرادیان مزدوج ترکیبی جدید معرفی کردند که به بهبود همگرایی الگوریتم منجر شده است.

با وجود پیشرفت‌های قابل توجه در این زمینه، هنوز نیاز به توسعه روش‌های کارآمدتر با همگرایی بهتر و کارایی محاسباتی بالاتر احساس می‌شود. در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج کارآمد با بهره‌گیری از منظم‌ساز مورا-باشیدا برای حل مسئله

<sup>6</sup> Malik

<sup>7</sup> Hestenes and Stiefel

<sup>8</sup> Polak, Ribiere and Polyak

<sup>9</sup> Zhang and Yang

<sup>10</sup> Brewedon-Fletcher-Goldfarb-Shanno

<sup>1</sup> Total variation

<sup>2</sup> Chen and Zhou

<sup>3</sup> Yuan

<sup>4</sup> Zibetti

<sup>5</sup> Huang and Liu

ناهموار  $f$  در مسئله (۱)، تابع منظم‌ساز مورا-یاشیدا  $F: R^n \rightarrow R$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$F(x) = \min_{z \in R^n} \{f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2\},$$
 که در آن  $\|\cdot\|$  نرم اقلیدسی و  $\lambda$  یک پارامتر مثبت است. لازم به ذکر است که تابع  $F$  یک تابع محدب مشتق‌پذیر است، حتی زمانی که تابع  $f$  مشتق‌پذیر نباشد. از آنجایی که مجموعه مینیمم‌کننده‌های تابع هدف مسئله (۱) با مجموعه مینیمم‌کننده‌های تابع  $F(x)$  منطبق است [۱۹]، به جای حل مسئله (۱) که مسئله‌ای ناهموار است، مسئله بهینه‌سازی محدب و هموار زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\min_{x \in R^n} F(x).$$
 برای بررسی ویژگی‌های کلیدی منظم‌ساز مورا-یاشیدا، با بیان قضیه زیر آغاز می‌کنیم

قضیه ۱ [۱۳]: فرض کنید  $\omega(z)$  یک تابع محدب قوی به صورت زیر باشد:

$$\omega(x) = f(z) + \frac{1}{2\lambda} \|z - x\|^2.$$

آنگاه جواب  $p(x) := \arg \min_{z \in R^n} \omega(z)$  خوش تعریف و منحصر بفرد است.

با توجه به قضیه ۱، تابع  $F(x)$  به صورت در نظر گرفته می‌شود:

$$F(x) = f(p(x)) + \frac{1}{2\lambda} \|p(x) - x\|^2.$$

این تابع دارای چندین ویژگی مهم است:

- $F$  یک تابع محدب، مشتق‌پذیر و کراندار است و گرادیان آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g(x) = \nabla F(x) = \frac{x - p(x)}{\lambda}.$$

مینیمم‌سازی (۱) ارائه می‌دهیم که با تضمین همگرایی و بهبود کارایی محاسباتی، کاربرد مؤثری در بازیابی تصویر دارد. ساختار مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، پس از مرور مختصر بهینه‌سازی ناهموار، روش جدید در بخش ۳ معرفی شده و همگرایی آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۴، کاربرد الگوریتم در مسئله بازیابی تصویر نشان داده می‌شود. در نهایت، در بخش ۵ جمع‌بندی نهایی مقاله ارائه شده و پیشنهاداتی برای توسعه و بهبود الگوریتم در تحقیقات آینده بیان می‌شود.

## ۲. مقدمه‌ای بر بهینه‌سازی ناهموار

این بخش به مرور برخی تعاریف و نتایج اساسی مرتبط با بهینه‌سازی محدب و بیان روش گرادیان مزدوج کلاسیک می‌پردازد [۱۱]–[۱۳]. به طور کلی، تکرارهای گرادیان مزدوج برای مسئله بهینه‌سازی (۱) با تابع هدف به طور پیوسته مشتق‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

که در آن  $\alpha_k$  طول گام و  $d_k$  جهت جستجو است که با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k, \quad (d_0 = -g_0)$$

در اینجا،  $g_k = \nabla f(x_k)$  گرادیان تابع هدف  $f(x)$  در نقطه  $x_k$  است و  $\beta_k$  به عنوان پارامتر گرادیان مزدوج شناخته می‌شود. انتخاب‌های مختلف  $\beta_k$  منجر به الگوریتم‌های گرادیان مزدوج متفاوت با عملکردهای گوناگون می‌شود [۱۴]–[۱۸].

زمانی که تابع هدف ناهموار است، ممکن است  $\nabla f(x_k)$  در همه نقاط تعریف نشده باشد. این امر استفاده مستقیم از روش‌های گرادیان مزدوج کلاسیک را دشوار می‌سازد. برای مقابله با این چالش، از تکنیک منظم‌سازی مورا-یاشیدا استفاده می‌شود که با تقریب تابع ناهموار به یک تابع مشتق‌پذیر، امکان استفاده از الگوریتم‌های گرادیان را فراهم می‌کند. برای تابع محدب و

$$\beta_k = \frac{g_k^T(g_k - g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2} - \min\left\{\frac{g_k^T(g_k - g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2}, \mu \frac{\|g_k - g_{k-1}\|^2 g_k^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2}\right\},$$

که در آن  $\mu > \frac{1}{4}$ . نشان داده شده که این روش کارآمد و دارای همگرایی سراسری است.

### ۳. الگوریتم گرادیان مزدوج جدید و ویژگی‌های آن

ویژگی‌های خوب روش ارائه شده در [۲۵] ما را برانگیخت تا آن را برای حل مسائل ناهموار اصلاح کنیم. با در نظر گرفتن  $g_k = \nabla F(x_k)$  داریم:

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k = 0 \\ -g_k + \beta_k^N \left( \frac{d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2} g_k}{\gamma_k} \right), & k \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $\gamma_k = \frac{\|\beta_k^N d_{k-1}\|}{\|g_k\|}$  و

$$\beta_k^N = \frac{1}{\|g_{k-1}\|^2} (g_k^T(g_k - g_{k-1}) - \min\{g_k^T(g_k - g_{k-1}), \mu \|g_k - g_{k-1}\|^2 g_k^T d_{k-1}\}). \quad (3)$$

در ادامه، الگوریتم پیشنهادی برای حل مسئله (۱) ارائه می‌شود:

الگوریتم ۱ (الگوریتم گرادیان مزدوج پیشنهادی):

گام ۱: نقطه شروع  $x_0 \in R^n$  و پارامترهای مثبت  $\delta_0, c, \lambda$  را انتخاب کنید.  $0 < \delta < 1$  و  $0 < \epsilon < 1$ .  $g_0 = \nabla F(x_0)$  و  $d_0 = -g_0$  و  $k = 0$  قرار دهید.

گام ۲: اگر  $\|g_k\| < \epsilon$ ، متوقف شوید. در غیر این صورت، طول  $\alpha_k$  را با استفاده از جستجوی خطی آرمیجو زیر بدست آورید:

$$F(x_k + \alpha_k d_k) - F(x_k) \leq \delta \alpha_k g_k^T d_k \quad (4)$$

که در آن  $\alpha_k = \delta_0 \times 2^{-i_k}$  و  $i_k \in \{0, 1, 2, \dots\}$

- نگاشت گرادیان  $g: R^n \rightarrow R$  پیوسته‌ی لیپشیتز سراسری با ثابت  $\frac{1}{\lambda}$  است، یعنی:

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \frac{1}{\lambda} \|x - y\|, \quad x, y \in R^n.$$

- $x$  جواب بهینه مسئله (۱) است اگر و تنها اگر  $g(x) = 0$ ، یا به عبارت دیگر  $p(x) = x$

- طبق قضیه رادماخر<sup>۱۱</sup> [۲۰]،  $g: R^n \rightarrow R$  تقریباً در همه جا مشتق‌پذیر است و مجموعه زیر ناتهی و فشرده است:

$$\partial_B g(x) = \{V \in R^{n \times n} \mid V = \lim_{x_k \rightarrow x} \nabla g(x_k), x_k \in D_g\},$$

که در آن  $D_g = \{x \in R^n \mid x \text{ در } g \text{ مشتق‌پذیر است}\}$ .

آنجایی که  $g$  گرادیان تابع محدب  $F$  است، هر  $V \in \partial_B g(x)$  یک ماتریس متقارن و نیمه معین مثبت است [۲۱].

برای محاسبه  $F(x)$  و  $g(x)$ ، نیاز به تقریب  $p(x)$  داریم. روش‌های کارآمدی برای محاسبه  $p(x)$  وجود دارد که علاقه‌مندان می‌توانند برای توضیحات بیشتر به منابع [۲۲] - [۲۴] مراجعه کنند.

روش گرادیان مزدوج هموار پیشنهاد شده توسط کائو<sup>۱۲</sup> و همکاران در [۲۵]، به دلیل کارایی بالا، ایده‌ای کلیدی برای پیشنهاد یک الگوریتم گرادیان مزدوج مؤثر جهت حل مسئله بهینه‌سازی ناهموار (۱) است. در این روش پارامتر گرادیان مزدوج به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\|d_k\| &= \left\| -g_k + \frac{\beta_k^N}{\gamma_k} \left( d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2} g_k \right) \right\| \\
&\leq \|g_k\| + \frac{|\beta_k^N|}{\gamma_k} \left( \|d_{k-1}\| + \frac{\|d_{k-1}\| \|g_k\|}{\|g_k\|^2} \|g_k\| \right) \\
&\leq \|g_k\| + \frac{|\beta_k^N|}{\frac{|\beta_k^N| \|d_{k-1}\|}{\|g_k\|}} (2\|d_{k-1}\|) \\
&= \|g_k\| + \frac{2|\beta_k^N| \|d_{k-1}\|}{\frac{|\beta_k^N| \|d_{k-1}\|}{\|g_k\|}} \\
&= 3\|g_k\|,
\end{aligned}$$

در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

در لم زیر نشان داده می‌شود که طول گام بدست آمده در گام ۲ الگوریتم ۱ دارای کران پایین است.

لم ۲: فرض کنید فرضیات ۱-۳ برقرار است و دنباله‌های  $\{x_k\}$  و  $\{\alpha_k\}$  توسط الگوریتم ۱ تولید شده‌اند. در اینصورت داریم:

$$\alpha_k \geq \frac{1}{2} (1 - \delta) O(1/9), \quad \forall k,$$

اثبات: برای اثبات کران پایین طول گام، فرض کنید  $\alpha_k$  در گام ۲ الگوریتم ۱ با استفاده از جستجوی خطی بازگشتی تولید شده است. در این صورت شرط آرمیجو در رابطه (۴) برای  $\alpha_k^* = 2\alpha_k$  برقرار نیست. بنابراین، داریم:

$$F(x_k + \alpha_k^* d_k) - F_k > \delta \alpha_k^* d_k^T g_k. \quad (۷)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه مقدار میانگین و رابطه (۵) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
F(x_k + 2\alpha_k d_k) - F_k &= 2\alpha_k d_k^T g_k + (2\alpha_k)^2 O(\|d_k\|^2) \\
&= -2\alpha_k \|g_k\|^2 + 4\alpha_k^2 O(\|d_k\|^2),
\end{aligned}$$

از رابطه (۷) نتیجه می‌شود که:

$$-2\alpha_k \|g_k\|^2 + 4\alpha_k^2 O(\|d_k\|^2) > -\delta 2\alpha_k \|g_k\|^2,$$

با ساده‌سازی و استفاده از رابطه (۶)، نتیجه می‌گیریم:

$$\alpha_k > \frac{(1 - \delta) \|g_k\|^2}{2O(\|d_k\|^2)} \geq \frac{1}{2} (1 - \delta) O\left(\frac{1}{9}\right).$$

گام ۳: قرار دهید:  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$  و  $g_{k+1} = \nabla F(x_{k+1})$

گام ۴: پارامتر  $\beta_k^N$  را از رابطه (۳) محاسبه کنید و  $d_{k+1}$  را از رابطه (۲) بدست آورید. قرار دهید  $k := k + 1$  و به گام ۲ بروید.

### ۱.۳. همگرایی سراسری

برای دستیابی به همگرایی سراسری الگوریتم جدید، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

فرض ۱: مجموعه تراز  $\Gamma = \{x \in R^n | F(x) \leq F(x_0)\}$  کراندار است.

فرض ۲: تابع  $F$  از پایین کراندار است.

فرض ۳: دنباله  $\{V_k\}$  کراندار است، یعنی یک ثابت  $L$  وجود دارد به طوری که:

$$\|V_k\| \leq L, \quad \forall k \geq 0.$$

که در آن  $V_k \in \partial_B g(x_k)$  و  $\|\cdot\|$  نرم ماتریسی است.

حال نشان می‌دهیم که جهت جدید تعریف شده توسط رابطه (۲) دارای ویژگی کاهش کافی و ویژگی ناحیه اعتماد است.

لم ۱: جهت جستجوی تولید شده در گام ۲ الگوریتم ۱ را در نظر بگیرید. آنگاه برای هر  $k \geq 0$  داریم:

$$d_k^T g_k = -\|g_k\|^2, \quad (۵)$$

$$\|d_k\| \leq 3\|g_k\|. \quad (۶)$$

اثبات: با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned}
g_k^T d_k &= g_k^T \left[ -g_k + \frac{\beta_k^N}{\gamma_k} \left( d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2} g_k \right) \right] \\
&= -g_k^T g_k + \frac{\beta_k^N g_k^T}{\gamma_k} \left( d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T g_k}{\|g_k\|^2} g_k \right) \\
&= -\|g_k\|^2 + \frac{\beta_k^N g_k^T d_{k-1} - \beta_k^N d_{k-1}^T g_k}{\gamma_k} \\
&= -\|g_k\|^2.
\end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۵) برقرار است. حال، با استفاده از رابطه (۳) و

نامساوی مثلثی داریم:

قضیه زیر همگرایی سراسری الگوریتم ۱ را نشان می‌دهد. دلیل اصلی ساده بودن فرآیند اثبات، استفاده از جهت پیشنهادی در (۲) است که دارای دو ویژگی اساسی (۵) و (۶) می‌باشد.

قضیه ۲: فرض کنید شرایط در لم ۱ برقرار است. آنگاه داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0.$$

همچنین هر نقطه حدی  $x_k$  جواب بهینه مسئله (۱) است.

اثبات: با توجه به روابط (۴) و (۵) داریم:

$$\begin{aligned} F(x_k + \alpha_k d_k) &\leq F(x_k) + \delta \alpha_k g_k^T d_k \\ &= F(x_k) - \delta \alpha_k \|g_k\|^2, \end{aligned}$$

این بدان معناست که دنباله  $\{F_k\}$  کاهشی است و نابرابری زیر برقرار است:

$$\delta \alpha_k \|g_k\|^2 \leq F(x_k) - F(x_k + \alpha_k d_k),$$

با جمع نابرابری‌های بالا برای  $k = 0$  تا  $m$  و با توجه به فرض ۱ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \delta \alpha_k \|g_k\|^2 &\leq \sum_{k=0}^m F(x_k) - F(x_k + \alpha_k d_k) \\ &= (F(x_0) - F(x_1)) + \dots + (F(x_m) - F(x_{m+1})) \\ &= F(x_0) - F(x_{m+1}) < +\infty. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به فرض ۲ و با گرفتن حد  $m \rightarrow +\infty$  داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \|g_k\|^2 = 0,$$

و از لم ۲ می‌دانیم که  $\alpha_k \nrightarrow 0$  بنابراین:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|^2 = 0,$$

در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

## ۴. نتایج عددی

در این بخش، عملکرد روش پیشنهادی (الگوریتم ۱) در بازیابی تصویر مورد بررسی قرار گرفته و با دو روش دیگر مقایسه

می‌شود: الگوریتم گرادیان مزدوج کلاسیک فلچر-ریوز که یک الگوریتم برجسته در بهینه‌سازی است، و الگوریتم گرادیان مزدوج عبداللهی و همکاران که به عنوان یکی از روش‌های کاربردی در حوزه بازیابی تصویر شناخته می‌شود [۸]، [۲۶]. آزمایش‌های عددی در محیط MATLAB 2022 و بر روی رایانه شخصی با پردازنده ۴,۷۰ گیگاهرتز و ۱۶ گیگابایت رم اجرا شده‌اند.

برای انجام این آزمایش، مسئله بهینه‌سازی زیر در نظر گرفته شده است:

$$\min_{x \in R^{m \times n}} \|Ax - b\|^2 + \rho \phi(x),$$

که در آن  $\rho$  پارامتر منظم‌ساز است که تعادل بین دقت داده‌ها و منظم‌سازی تصویر را برقرار می‌کند. عبارت  $\|Ax - b\|^2$  تفاوت بین تصویر مشاهده‌شده  $b \in R^{m \times n}$  و تصویر نویزی  $Ax$  را اندازه‌گیری می‌کند، که در آن  $A \in R^{m \times m}$  است. همچنین تابع  $\phi(x)$  به عنوان منظم‌ساز عمل کرده و به منظور کنترل ویژگی‌های تصویر بازسازی‌شده به کار می‌رود. در اینجا، سه تابع برای  $\phi(x)$  بررسی شده‌اند:

- تابع تغییرات کلی TV که میزان تغییرات گرادیان تصویر  $x$  را نشان می‌دهد:

$$TV(x) = \sum_{i,j} (|x_{i+1,j} - x_{i,j}| + |x_{i,j+1} - x_{i,j}|),$$

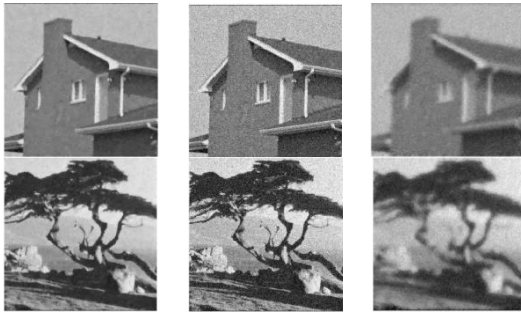
- تابع  $L_1$ -نرم:

$$TV_{L_1}(x) = \|x\|_1,$$

- تابع  $L_2$ -نرم:

$$TV_{L_2}(x) = \|x\|_2.$$

در این آزمایش، تصاویر استاندارد «هوایما»، «خانه» و «درخت» با مقیاس خاکستری و محدوده شدت ۰ تا ۱، به عنوان داده‌های آزمایشی انتخاب شده‌اند. اندازه تصاویر  $256 \times 256$  پیکسل بوده



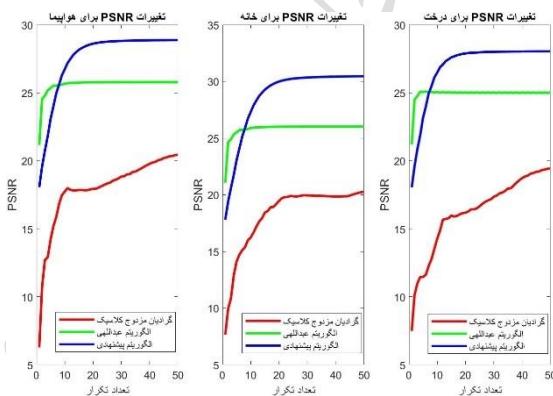
شکل ۲. تصاویر بازیابی شده با سه الگوریتم گرادیان مزدوج کلاسیک [۲۱]، الگوریتم گرادیان مزدوج عبداللہی [۵] و الگوریتم پیشنهادی

معیار مقایسه برای تصاویر بازیابی شده، نسبت سیگنال به نویز<sup>۱۳</sup> (PSNR) است که با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$PSNR = -10 * \log_{10} \frac{\|x_k - x_{orig}\|^2}{mn},$$

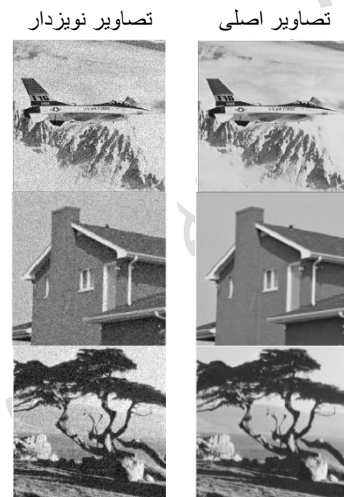
که در آن  $x_{orig}$  تصویر اصلی،  $m$  و  $n$  به ترتیب تعداد سطرها و ستون‌های تصویر هستند.

در شکل (۳) روند تغییرات PSNR در طول تکرارها نمایش داده شده است. همچنین، شکل (۴) مقدار نهایی PSNR هر الگوریتم را نشان می‌دهد.



شکل ۳. روند تغییرات PSNR در هر تکرار برای هر تصویر

و ماتریس  $A$  به صورت همانی ( $A = I$ ) در نظر گرفته شده است. همچنین، نویز گاوسی با انحراف معیار ۲۰ به تصاویر اضافه شده است. تصاویر اصلی و نویزدار در شکل (۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱. تصاویر اصلی و نویزدار

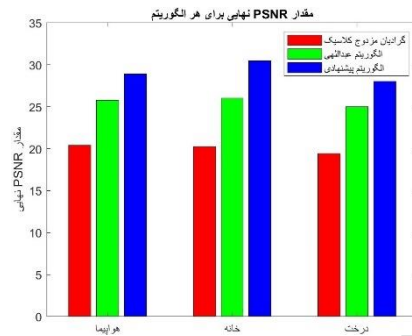
هدف این مسئله بازیابی تصویر اصلی از تصویر تخریب شده است. نقطه‌ی اولیه در هر سه روش یکسان و به صورت تصادفی انتخاب شده است. الگوریتم‌ها تا زمان برقراری شرط توقف یا حداکثر تا ۵۰ تکرار اجرا شده‌اند. پارامترهای مسئله به صورت  $\mu = 0.05$ ،  $\delta = 0.05$ ،  $\epsilon = 10^{-6}$ ،  $\delta_0 = 1$ ،  $c = 0.8$ ،  $\lambda = 0.05$  و مقداردهی شده‌اند. در اینجا مقایسه‌ای بین الگوریتم پیشنهادی، الگوریتم گرادیان مزدوج عبداللہی و الگوریتم گرادیان مزدوج کلاسیک برای سه تصویر انجام شده است:



هموار تبدیل شد که این امر امکان استفاده از الگوریتم‌های گرادیان مزدوج را فراهم کرد. سپس، با ارائه یک جهت کاهشی جدید، الگوریتم بهبود یافت و اثبات شد که این جهت کاهشی در کنار جستجوی خطی نادقیق، شرایط کاهش کافی را تأمین می‌کند و تکرارهای الگوریتم در ناحیه اعتماد مناسب باقی می‌مانند. همچنین، با فرضیات استاندارد، همگرایی سراسری این روش تضمین شد. در بخش نتایج عددی، عملکرد روش پیشنهادی در بازسازی تصویر با دو روش گرادیان مزدوج مقایسه شد. نتایج حاکی از آن است که روش پیشنهادی از نظر دقت بازسازی و کارایی محاسباتی، عملکرد بهتری نسبت به روش‌های مرجع دارد. این نتایج نشان‌دهنده اثربخشی و کارایی بالای الگوریتم در بازیابی تصاویر با کیفیت بالا است. با توجه به نتایج مطلوب حاصل‌شده، در کارهای آینده می‌توان با بهینه‌سازی بیشتر الگوریتم و بررسی تکنیک‌های منظم‌سازی پیشرفته، دقت و کارایی آن را افزایش داد و به بررسی کاربرد این روش در حوزه‌های تخصصی مانند پردازش تصاویر پزشکی پرداخت.

## مراجع

- [1] S. Motamed, "Automatic license plate recognition using improved deep learning," *Soft Computing Journal*, vol. 12, no. 1, pp. 41–48, Aug. 2023, doi: 10.22052/scj.2024.253175.1163.
- [2] M. Jafari, "Isolation of vessels in retinal color images," *Soft Computing Journal*, vol. 12, no. 1, pp. 17–21, Aug. 2023, doi: 10.22052/scj.2022.246288.1060.
- [3] M. Eftekhariyan and A. Nodehi, "Breast cancer diagnosis and classification improvement based on deep learning and image processing," *Soft Computing Journal*, vol. 12, no. 1, pp. 22–26, Aug. 2023, doi: 10.22052/scj.2023.246416.1067.
- [4] X. Chen and W. Zhou, "Smoothing nonlinear conjugate gradient method for image restoration using nonsmooth nonconvex minimization," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 3, no. 4, pp. 765–790, Dec. 2010, doi: 10.1137/080740167.
- [5] G. Yuan, T. Li, and W. Hu, "A conjugate gradient algorithm and its application in large-scale optimization



شکل ۴. نمودار مقایسه PSNR نهایی هر الگوریتم

زمان محاسبه CPU برای هر سه الگوریتم در جدول زیر مقایسه شده است:

جدول ۱. مقایسه زمان محاسبات CPU برای هر الگوریتم

| الگوریتم                  | الگوریتم     | الگوریتم |        |
|---------------------------|--------------|----------|--------|
| گرادیان مزدوج کلاسیک [۲۱] | عبداللہی [۵] | پیشنهادی |        |
| ۳,۲۲                      | ۲,۰۸         | ۲,۱۰     | هوایما |
| ۲,۹۲                      | ۱,۸۲         | ۱,۹۵     | خانه   |
| ۳,۰۷                      | ۱,۸۳         | ۱,۹۷     | درخت   |

با توجه به نتایج بدست‌آمده و بر اساس شکل‌های (۳) و (۴) که تغییرات PSNR را نمایش می‌دهند، مشاهده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با دو روش دیگر، PSNR بالاتری را ارائه می‌دهد. این امر نشان‌دهنده بهبود کیفیت تصاویر بازیابی‌شده است. همچنین، شکل (۲) که تصاویر بازیابی‌شده توسط هر الگوریتم را نشان می‌دهد، به وضوح بیانگر برتری کیفیتی الگوریتم پیشنهادی می‌باشد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم پیشنهادی با ارائه کیفیت بالاتر در بازیابی تصویر، عملکرد بهتری نسبت به روش‌های موجود دارد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج جدید و کارآمد برای حل مسائل بهینه‌سازی ناهموار توسعه داده شده است. ابتدا با استفاده از منظم‌ساز مورا-یاشیدا، تابع هدف ناهموار به یک تابع

- property," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 10, no. 1, pp. 177–182, 1999, doi: 10.1137/S1052623497318992.
- [16] H. Zhang and W. W. Hager, "A nonlinear conjugate gradient method with linear time complexity," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 18, no. 3, pp. 875–898, 2007, doi: 10.1137/060670010.
- [17] M. Andrei, "An unconstrained optimization test functions collection," *Advances in Modeling and Optimization*, vol. 10, no. 1, pp. 147–161, 2008.
- [18] Y. H. Dai and Y. Yuan, "A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 10, no. 1, pp. 177–182, 1999, doi: 10.1137/S1052623497318992.
- [19] N. Parikh and S. Boyd, *Proximal Algorithms, Foundations and Trends® in Optimization*, vol. 1, no. 3, pp. 123–231, 2014, doi: 10.1561/24000000003.
- [20] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010.
- [21] G. Yuan, Z. Wei, and G. Li, "A modified Polak–Ribiere–Polyak conjugate gradient algorithm for nonsmooth convex programs," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 255, pp. 86–96, 2014, doi: 10.1016/j.cam.2013.05.027.
- [22] A. R. Conn, N. I. Gould, and P. L. Toint, *Trust Region Methods*. Philadelphia, PA: SIAM, 2000, doi: 10.1137/1.9780898719857.
- [23] R. Correa and C. Lemaréchal, "Convergence of some algorithms for convex minimization," *Mathematical Programming*, vol. 62, pp. 261–275, 1993, doi: 10.1007/BF01585171.
- [24] M. Fukushima, "A descent algorithm for nonsmooth convex optimization," *Mathematical Programming*, vol. 30, pp. 163–175, 1984, doi: 10.1007/BF01580257.
- [25] J. Cao and J. Wu, "A conjugate gradient algorithm and its applications in image restoration," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 156, pp. 243–252, 2020, doi: 10.1016/j.apnum.2019.12.002.
- [26] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function minimization by conjugate gradients," *The Computer Journal*, vol. 7, no. 2, pp. 149–154, 1964, doi: 10.1093/comjnl/7.2.149.
- problems and image restoration," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2019, no. 1, Article 247, Sep. 2019, doi: 10.1186/s13660-019-2192-6.
- [6] M. V. W. Zibetti, C. Lin, and G. T. Herman, "Total variation superiorized conjugate gradient method for image reconstruction," *Inverse Problems*, vol. 34, no. 3, p. 034001, Mar. 2018, doi: 10.1088/1361-6420/aaa49b.
- [7] P. Huang and K. Liu, "A new conjugate gradient algorithm for noise reduction in signal processing and image restoration," *Frontiers in Physics*, vol. 10, Dec. 2022, doi: 10.3389/fphy.2022.1053353.
- [8] F. Abdollahi and M. Fatemi, "An efficient conjugate gradient method with strong convergence properties for non-smooth optimization," *Journal of Mathematical Modeling*, vol. 9, no. 3, pp. 375–390, 2021, doi: 10.22124/jmm.2020.16747.1452.
- [9] M. Malik, I. M. Sulaiman, A. B. Abubakar, G. Ardaneswari, and Sukono, "A new family of hybrid three-term conjugate gradient method for unconstrained optimization with application to image restoration and portfolio selection," *AIMS Mathematics*, vol. 8, no. 1, pp. 1–28, 2023, doi: 10.3934/math.2023001.
- [10] X. Zhang and Y. Yang, "A new hybrid conjugate gradient method close to the memoryless BFGS quasi-Newton method and its application in image restoration and machine learning," *AIMS Mathematics*, vol. 9, no. 10, pp. 27535–27556, Sep. 2024, doi: 10.3934/math.20241337.
- [11] A. Bagirov, N. Karimtsa, and M. M. Mäkelä, *Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software*, 1st ed. Cham: Springer, 2014, doi: 10.1007/978-3-319-08114-4.
- [12] J. B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms II: Advanced Theory and Bundle Methods*. Berlin: Springer, 1993, doi: 10.1007/978-3-662-06409-2.
- [13] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004, doi: 10.1017/CBO9780511804441.
- [14] W. W. Hager and H. Zhang, "A new conjugate gradient method with guaranteed descent and an efficient line search," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 16, no. 1, pp. 170–192, 2005, doi: 10.1137/030601880.
- [15] Y. H. Dai and Y. Yuan, "A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence