

یک روش عناصر متناهی کارا برای مسائل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده

رویا وزیری دوقزلو^۱، دانشجوی دکتری، حمیدرضا تبریزی‌دوز^{۲*}، استادیار، مصطفی شمس^۳، دانشیار

^۱ و ^۲ گروه ریاضی کاربردی - دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه کاشان - کاشان - ایران

رایانامه^۱: r_vaziri96@grad.kashanu.ac.ir

رایانامه^۲: htabrizidooz@kashanu.ac.ir

^۳ دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر- دانشگاه صنعتی امیر کبیر - تهران - ایران

رایانامه: m_shamsi@aut.ac.ir

چکیده: در این مقاله، یک روش عناصر متناهی برای تقریب جواب مسائل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده، معرفی می‌کنیم. دینامیک این مسائل شامل مشتقات زمان-کسری از مرتبه توزیع شده می‌باشد که تعمیمی از مشتقات کسری هستند. علیرغم اهمیت این مسائل، تحقیقات کمی در مورد حل آن‌ها در منابع وجود دارد. روش‌های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه به دو دسته کلی روش‌های غیرمستقیم و روش‌های مستقیم تقسیم می‌شوند. در روش‌های غیرمستقیم با استفاده از اصل پونتریاگین، شرایط لازم برای بهینگی بدست آمده و به صورت یک مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای غیرخطی بازنویسی می‌شود. از طرف دیگر، در روش‌های مستقیم با گسسته‌سازی متغیرهای کنترل و وضعیت، مساله مورد نظر به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تقلیل می‌یابد. به دلیل مشکلات مربوط به حل دستگاه معادلات حاصل از شرایط لازم برای بهینگی در مسائل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده، در این مقاله از دیدگاه روش‌های مستقیم برای تقریب جواب این مسائل استفاده می‌کنیم. به منظور تقریب مشتقات زمان-کسری مرتبه توزیع شده، روش‌های تقریبی گرانوالد-لنتیکف و L1 را مورد استفاده قرار داده و دو فرمول تقریبی برای مشتق بدست می‌آوریم. هم‌چنین برای گسسته‌سازی مکانی از روش عناصر متناهی تکه‌ای خطی استفاده می‌کنیم. به این ترتیب، مساله اصلی را به یک مساله بهینه‌سازی درجه دو محذب تبدیل می‌کنیم که می‌تواند توسط الگوریتم‌های بهینه‌سازی موجود بطور کارا حل شود. برای اثبات کارایی و دقت روش ارائه شده، دو مثال عددی در نظر می‌گیریم.

واژه‌های کلیدی: مسائل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده، روش‌های مستقیم، گرانوالد-لنتیکف، عناصر متناهی، فرمول‌های تقریب برای مشتق.

An efficient finite element method for optimal control problems involving distributed-order time-fractional diffusion equations

Roya Vaziri Doghezlou¹, Hamid Reza Tabrizidooz^{2,*}, Mostafa Shamsi³

¹ Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Science, University of Kashan, Kashan, Iran, Email: r_vaziri96@grad.kashanu.ac.ir

² Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Science, University of Kashan, Kashan, Iran, Email: htabrizidooz@kashanu.ac.ir

³ Department of Mathematics and Computer Science, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran, Email: m_shamsi@aut.ac.ir

Abstract: In this paper, we present a finite element method to approximate the solution of optimal control problems involving distributed-order time-fractional diffusion equations. The dynamics of these problems involve distributed-order time-fractional derivatives, which are a generalization of fractional derivatives. Despite the importance of these problems, there exist few researches on their solving in the literatures. Numerical methods for solving optimal control problems are classified into two main categories, namely, indirect methods and direct methods. In the indirect methods, by using Pontryagin principle, the necessary conditions for optimality are derived and formulated as a nonlinear two-point boundary value problem. On the other hand, in the direct methods, by discretizing the control and state variables, the considered problem is reduced to a nonlinear programming problem. Due to the difficulties related to solving the system of equations resulting from the necessary conditions for optimality in optimal control problems involving distributed-order time-fractional diffusion equations, in this paper we use the approach of direct methods to approximate the solution of these problems. To approximate the distributed-order time-fractional derivatives, we employ the Grünwald-Letnikov and L1 approximation methods and derive two approximation formulas for derivative. Also for spatial discretization, we utilize the piecewise linear finite element method. Therefore, we transform the original problem into a convex quadratic optimization problem, which can be efficiently solved using existing optimization algorithms. We consider two numerical examples to demonstrate the efficiency and accuracy of the proposed method.

Keywords: Optimal control problems involving distributed-order time-fractional diffusion equations, Direct methods, Grünwald-Letnikov, Finite element, approximation formulas for derivative.

* Corresponding author: Hamid Reza Tabrizidooz, Email: htabrizidooz@kashanu.ac.ir

۱. مقدمه

طیفی^۷ [9]، [10]. فرمول‌بندی اولیه مسائل کنترل بهینه کسری ابتدا توسط آگراوال^۸ معرفی و یک راه حل عددی برای آن‌ها ارائه گردید [11]. بالانو^۹ و همکاران از تقریب اصلاح شده گرانوالد-لتنیکف^{۱۰} و روش تفاضل متناهی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق کسری ریمان-لیوویل^{۱۱} استفاده کردند [12]. در [13]، روش هم‌مکانی بسل^{۱۲} برای حل مسائل کنترل بهینه کسری خطی و غیرخطی ارائه گردید. یک راه‌کار تکراری برای حل مسائل کنترل بهینه کسری در [14] معرفی شد. یک روش گسسته سازی شبه‌طیفی زمان-مکان برای حل مسائل کنترل بهینه پخش^{۱۳} با مشتقات کسری دو-وجهی در [15] ارائه گردید. شمسی و همکاران با به‌کار بستن فرمول‌های تقریبی انتگرال کسری، یک روش رونوشت مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه کسری غیر خطی گزارش کردند [16]. در [17]، با استفاده از تابع مقیاس هرمیت^{۱۴} و با برآورد خطا، یک روش هم‌مکانی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری غیر خطی معرفی شد.

در این مقاله، مسائل کنترل بهینه‌ایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دینامیک حاکم بر آن‌ها توسط معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده^{۱۵} توصیف می‌شوند. این معادلات

در یک مساله کنترل بهینه، به یافتن جواب بهینه برای کنترل یک سیستم دینامیکی از طریق نظریه بهینه‌سازی ریاضی پرداخته می‌شود. هدف در این مسائل معمولاً کمینه (یا بیشینه) کردن یک تابع هدف با تعیین متغیرهای کنترل بهینه در یک بازه زمانی مشخص است به گونه‌ای که محدودیت‌های خاصی برآورده شوند [1]. یک مساله کنترل بهینه می‌تواند به سیستم‌هایی که توسط معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری کنترل می‌شوند، تعمیم یابد. در این صورت مفهوم کنترل بهینه کسری^۱ به وجود می‌آید. استفاده از دینامیک مرتبه کسری امکان مدل‌سازی دقیق‌تری را برای سیستم‌های پیچیده دارای حافظه^۲ و ویژگی‌های موروثی^۳ فراهم می‌کند و هم‌چنین نسبت به مدل‌های مرتبه کلاسیک درک عمیق‌تری از این سیستم‌ها ارائه می‌دهد [2]، [3].

کنترل سیستم‌های مرتبه کسری در فرآیندهای شیمیایی [4] و توسعه استراتژی‌های بهینه در مدارهای الکتریکی مرتبه کسری [5]، تنها بخشی از کاربردهای گسترده کنترل بهینه کسری در زمینه‌های گوناگون نظیر فیزیک، مهندسی، پردازش سیگنال و زیست‌شناسی است. با توجه به پیچیدگی مسائل کنترل بهینه کسری، روش‌های عددی متنوعی برای حل این مسائل توسعه یافته است. برخی از این روش‌ها عبارتند از: روش تفاضل متناهی^۴ [6]، روش تکراری^۵ [7]، روش هم‌مکانی^۶ [8] و روش

Spectral method^۷Agrawal^۸Baleanu^۹Modified Grunwald-Letnikov^{۱۰}Riemann-Liouville fractional derivative^{۱۱}Bessel collocation method^{۱۲}Diffusion^{۱۳}Hermite scaling function^{۱۴}Distributed-order time-fractional diffusion equations^{۱۵}Fractional optimal control^۱Memory^۲Hereditary effects^۳Finite difference method^۴Iteration method^۵Collocation method^۶

مبتنی بر تقریب‌های موضعی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری مرتبه توزیع شده به کار گرفته شد.

روش‌های حل مسایل کنترل بهینه را می‌توان به دو دسته کلی روش‌های مستقیم و روش‌های غیرمستقیم تقسیم کرد. در روش‌های غیرمستقیم با استفاده از اصل پونتریاگین، شرایط لازم برای بهینگی جواب مساله به دست آمده و به صورت یک مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای بازنویسی می‌شود. با حل مساله مقدار مرزی به دست آمده، به جواب تقریبی از مساله اصلی دست می‌یابیم. از طرف دیگر، در روش‌های مستقیم با کمک گسسته‌سازی متغیرهای کنترل و وضعیت، مساله اصلی به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود که برای حل آن می‌توان از الگوریتم‌های بهینه‌سازی موجود استفاده کرد. به دلیل مشکلات مربوط به حل دستگاه معادلات حاصل از شرایط لازم بهینگی، در این مقاله از دیدگاه روش‌های مستقیم به تحلیل و بررسی جواب مسایل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان - کسری مرتبه توزیع شده می‌پردازیم.

هدف ما در این مقاله، یافتن کنترل $u = u(x, t)$ و وضعیت $v = v(x, t)$ است به طوری که معادله پخش زمان - کسری مرتبه توزیع شده

$${}^R D_t^{\omega(\alpha)} v(x, t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = q(x, t) + u(x, t), 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq \tau, \quad (1.1)$$

با شرایط اولیه

$$v(x, 0) = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (ب.1)$$

و شرایط مرزی

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (ج.1)$$

برآورده شود و هم‌چنین شاخص عملکرد

تعمیمی از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری هستند و در زمینه‌های مختلفی مانند انتقال حرارت، دینامیک سیالات، علم مواد و بیولوژی کاربرد دارند [18, 19, 20]. علیرغم اهمیت این نوع مسائل، تحقیقات بسیار کمی در این زمینه صورت گرفته است که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. در [21]، زکی با استفاده از کاربردهای ضرایب لاگرانژ^۱ در حساب تغییرات و با به کار بردن انتگرال‌گیری کسری جزبه‌جز، شرایط لازم بهینگی را برای مسائل کنترل بهینه کسری مرتبه توزیع شده به دست آورد. این شرایط به عنوان یک مساله مقدار مرزی کسری مرتبه توزیع شده دو نقطه‌ای غیرخطی بیان شد و برای حل آن روش هم‌مکانی لژاندر به کار برده شد. هم‌چنین در [22]، مساله کنترل بهینه محدب نامقیدی در نظر گرفته شد که معادلات حاکم بر آن توسط معادله پخش کسری مرتبه توزیع شده بیان می‌شود. در این مطالعه، ابتدا با استفاده از روش شبه-طیفی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های ژاکوبی^۲ و با استفاده از فرمول‌های انتگرال‌گیری ژاکوبی-گوس-لوباتو^۳ مساله مذکور به یک مساله کنترل بهینه کسری مرتبه توزیع شده عادی^۴ تبدیل شد و پس از تشکیل معادلات اویلر-لاگرانژ^۵ نظیر و فرآیند انتگرال‌گیری عددی بر اساس درونیابی ژاکوبی-گوس-لوباتو^۶، جواب مساله حاصل گردید. در [23]، راهکار محاسباتی مستقیمی بر اساس موجک برنشتاین^۷ برای حل مسائل کنترل بهینه کسری مرتبه توزیع شده ارائه شد. در [24]، یک روش رونوشت مستقیم

^۱ Lagrange multipliers

^۲ Jacobi polynomials

^۳ Jacobi - Gauss - Lobatto integration formula

^۴ Ordinary distributed - order fractional optimal control

^۵ Euler - Lagrange equations

^۶ Jacobi - Gauss - Lobatto interpolation

^۷ Bernstein wavelets

نیاز به تقریب مساله با مساله چند مرتبه‌ای را برطرف می‌کند. طی این روش مساله کنترل بهینه پخش زمان-کسری توزیع شده به یک مساله بهینه‌سازی اکیدا محدب درجه دو تقلیل می‌یابد که حل آن دارای هیچ‌گونه محاسبات پیچیده و ناپایداری نیست و جواب بهینه سراسری آن با کمک الگوریتم‌های بهینه‌سازی مناسب حاصل می‌گردد.

سازماندهی این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، تعاریف و مقدمات حسابان کسری آورده شده است. در بخش ۳، دو فرمول برای تقریب مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل از یک تابع هموار، استخراج می‌شود. در بخش ۴، روش پیشنهادی شرح داده می‌شود. هم‌چنین فرم درجه دو مساله برنامه‌ریزی خطی حاصل نیز در این بخش به دست می‌آید. در بخش ۵، نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهاد شده بر روی دو مثال، گزارش می‌گردد و در نهایت نتیجه‌گیری کلی در بخش ۶ بیان می‌شود.

۲. مفاهیمی از حسابان کسری

در این بخش برخی از تعاریف مشتقات کسری را در حالت ریمان-لیوویل با توجه به مراجع [27, 28, 29] مرور می‌کنیم.

تعریف ۱,۲. مشتق کسری چپ و راست ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \in (0,1)$ ، از تابع $f(t)$ ، برای $a \leq t \leq b$ ، به ترتیب همانند زیر تعریف می‌گردد:

$${}^R L D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad t > a,$$

و

$${}^R L D_b^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(s)}{(s-t)^\alpha} ds, \quad t < b.$$

تعریف ۲,۲. فرض کنید برای $\alpha \in (0,1)$ داشته باشیم

$$\int_0^1 \omega(\alpha) d\alpha > 0 \quad \text{و} \quad \omega(\alpha) \geq 0$$

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 (v - \bar{v})^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 u^2 dx dt, \quad (د.۱)$$

کمینه گردد. در روابط بالا، ${}^R L D_t^{\omega(\alpha)}$ بیانگر مشتق کسری توزیع شده در حالت ریمان - لیوویل است که در تعریف ۲,۲ معرفی شده است؛ هم‌چنین تابع $q = q(x,t)$ منبع بیرونی^۱، $\mu = \mu(x)$ تابعی معلوم و $\bar{v} = \bar{v}(x,t)$ مقدار مورد انتظار برای تابع وضعیت $v = v(x,t)$ را نشان می‌دهند.

در این مقاله، یک روش مستقیم برای حل مساله (۱) معرفی می‌کنیم. به منظور تقریب مشتقات زمان-کسری مرتبه توزیع شده، روش‌های تقریبی گرانوالد-لتنیکف و L1 را مورد استفاده قرار داده و دو فرمول تقریبی برای مشتق بدست می‌آوریم. هم‌چنین برای گسسته‌سازی مکانی از روش عناصر متناهی تکه‌ای خطی استفاده می‌کنیم. شاخص عملکرد مساله نیز توسط قاعده دوزنقه‌ای مرکب تقریب زده می‌شود. بر این اساس، مساله (۱) به یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب^۲ تقلیل می‌یابد که با کمک روش‌های عددی مناسب و کارآمد می‌توان آن را حل کرد. امروزه روش‌های عددی کارآمدی برای حل مسایل بهینه‌سازی و نیز حل دستگاه‌ها وجود دارد که می‌توان از آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل بهره برد [25]، [26].

با توجه به اطلاعات نویسندگان، این بررسی بیانگر تلاشی پیش‌گام در حل مسائل کنترل بهینه پخش زمان - کسری توزیع شده بدون نیاز به روش معمول تقریب آن با مسائل کنترل بهینه کسری چند مرتبه‌ای^۳، است. این دستاورد با معرفی فرمول‌های تقریب ابتکاری بر پایه روش‌های گرانوالد-لتنیکف و L1 برای مشتقات کسری توزیع شده و ساخت ماتریس‌های عملیاتی نظیر،

^۱ External source

^۲ Convex quadratic programming problem

^۳ Multi-term

$$i = 0, \dots, n, \quad (2)$$

که در آن

$$a_j(\alpha) := \frac{(-1)^j}{h^\alpha} \binom{\alpha}{j} \\ = \frac{(-1)^j}{h^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\alpha - j + 1)}$$

در ادامه با استفاده از فرمول (2)، یک فرمول تقریبی برای

مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل از تابع $f(t)$ در

$t = t_i$ ، بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_i} &= \int_0^1 \omega(\alpha) [{}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t)]_{t=t_i} d\alpha \\ &\simeq \int_0^1 \omega(\alpha) \left[\sum_{j=0}^i a_j(\alpha) f(t_{i-j}) \right] d\alpha \\ &= \sum_{j=0}^i \left[\int_0^1 \omega(\alpha) a_j(\alpha) d\alpha \right] f(t_{i-j}). \end{aligned}$$

اکنون اگر قرار دهیم: $\varpi_k^{GL} := \int_0^1 \omega(\alpha) \frac{(-1)^k}{h^\alpha} \binom{\alpha}{k} d\alpha$ در

این صورت داریم:

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_i} &\simeq \sum_{j=0}^i \varpi_j^{GL} f(t_{i-j}), \\ i &= 0, 1, \dots, n. \quad (3) \end{aligned}$$

برای محاسبه $\varpi_0, \dots, \varpi_n$ ، می توان از قواعد کوادراتوری مناسب

یا کدهای انتگرال گیری خودکار استفاده کرد.

رابطه (3) را فرمول تقریبی بر پایه GL برای مشتق کسری

مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل از تابع $f(t)$ در $t = t_i$ برای

$i = 0, 1, \dots, n$ ، در نظر می گیریم. اینک با معرفی

$$\mathbf{f} = [f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)]^T,$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}(\omega) &= [{}^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_0}, {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_1}, \\ &\quad \dots, {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_n}]^T, \quad (4) \end{aligned}$$

کسری مرتبه توزیع شده¹ ریمان-لیوویل چپ و راست از تابع

$f(t)$ ، برای $a \leq t \leq b$ ، به ترتیب همانند زیر تعریف می شود:

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) = \int_0^1 \omega(\alpha) {}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) d\alpha,$$

و

$${}^{RL}\mathcal{D}_b^{\omega(\alpha)} f(t) = \int_0^1 \omega(\alpha) {}^{RL}\mathcal{D}_b^\alpha f(t) d\alpha.$$

3. فرمول های تقریبی برای مشتق کسری مرتبه توزیع

شده چپ ریمان - لیوویل

در این بخش با استفاده از روش گرناولد-لتنیکف (که آن را به

اختصار با نماد GL نشان می دهیم) و هم چنین روش L1، دو

فرمول تقریبی برای برآورد مشتق کسری مرتبه توزیع شده چپ

ریمان-لیوویل بدست می آوریم. برای این منظور، فرض کنیم

تابع $f(t)$ ، تابعی به اندازه کافی هموار باشد که روی بازه $[0, \tau]$ ،

تعریف می شود. با تقسیم بندی این بازه به n زیر بازه مساوی،

نقاط گره ای به صورت

$$t_i = ih, \quad h = \frac{\tau}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

در نظر گرفته می شوند. هم چنین، فرض می کنیم $\omega(\alpha)$ نمایان گر

تابع توزیع² یا تابع وزن³ باشد که در شرایط بیان شده در تعریف

2.2، صدق می کند.

1.3. ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه GL

فرمول گرناولد-لتنیکف برای تقریب مشتق کسری به مفهوم

ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \in (0, 1)$ از تابع به طور کافی هموار

$f(t)$ در $t = t_i$ به صورت زیر است [30]، [31]:

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \Big|_{t=t_i} \simeq \sum_{j=0}^i a_j(\alpha) f(t_{i-j}),$$

¹ Distributed - order fractional derivative

² Distribution function

³ Weight function

فرم ماتریسی (۳) به صورت

$$\hat{f}(\omega) \simeq \mathbf{D}_{n+1}^{GL} \mathbf{f}, \quad (5)$$

بیان می شود، که در آن

$$\mathbf{D}_{n+1}^{GL} = \begin{bmatrix} \omega_0^{GL} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_1^{GL} & \omega_0^{GL} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_2^{GL} & \omega_1^{GL} & \omega_0^{GL} & 0 & \dots & 0 \\ \omega_3^{GL} & \omega_2^{GL} & \omega_1^{GL} & \omega_0^{GL} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n^{GL} & \omega_{n-1}^{GL} & \omega_{n-2}^{GL} & \omega_{n-3}^{GL} & \dots & \omega_0^{GL} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه GL نظیر مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل نامیده می شود.

۲.۳. ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه L1

فرمول L1 برای تقریب مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه

$\alpha \in (0, 1)$ از تابع هموار $f(t)$ با شرط $f(0) = 0$ در $t = t_i$ به صورت زیر است [30]، [31]:

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \Big|_{t=t_i} \simeq \sum_{j=0}^{i-1} b_{i-j-1}(\alpha) [f(t_{j+1}) - f(t_j)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

که در آن

$$b_k(\alpha) := \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}].$$

در ادامه با استفاده از فرمول (۷)، یک فرمول تقریبی برای

مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل از تابع $f(t)$ در

$t = t_i$ بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} {}^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_i} &= \int_0^1 \omega(\alpha) [{}^{RL}\mathcal{D}_t^\alpha f(t)]_{t=t_i} d\alpha \\ &\simeq \int_0^1 \omega(\alpha) \left[\sum_{j=0}^{i-1} b_{i-j-1}(\alpha) [f(t_{j+1}) - f(t_j)] \right] d\alpha \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \left[\int_0^1 \omega(\alpha) b_{i-j-1}(\alpha) d\alpha \right] [f(t_{j+1}) - f(t_j)]. \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $\omega_k^{L1} := \int_0^1 \omega(\alpha) b_{i-j-1}(\alpha) d\alpha$ داریم:

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_i} = \sum_{j=0}^{i-1} \omega_{i-j-1}^{L1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)], \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

رابطه (۸) را فرمول تقریبی بر پایه L1 برای مشتق کسری

مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل از تابع $f(t)$ در $t = t_i$ برای

$i = 0, 1, \dots, n$ در نظر می گیریم. فرم ماتریسی (۸) به صورت

$$\hat{f}(\omega) \simeq \mathbf{D}_{n+1}^{L1} \mathbf{f},$$

بیان می شود، که در آن

$$\mathbf{D}_{n+1}^{L1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0^{L1} & \omega_0^{L1} & 0 \\ -\omega_1^{L1} & \omega_1^{L1} - \omega_0^{L1} & \omega_0^{L1} \\ -\omega_2^{L1} & \omega_2^{L1} - \omega_1^{L1} & \omega_1^{L1} - \omega_0^{L1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\omega_{n-1}^{L1} & \omega_{n-1}^{L1} - \omega_{n-2}^{L1} & \omega_{n-2}^{L1} - \omega_{n-3}^{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \omega_0^{L1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{n-3}^{L1} - \omega_{n-4}^{L1} & \dots & \omega_0^{L1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه L1 نظیر مشتق کسری مرتبه

توزیع شده ریمان-لیوویل نامیده می شود.

۴. روش پیشنهادی

در این بخش، روش پیشنهادی برای گسسته سازی مساله را در

دو مرحله ارائه می دهیم. به علاوه فرم ماتریسی مساله برنامه ریزی

درجه دو حاصل از گسسته سازی مساله را بدست می آوریم.

۱.۴. گسسته سازی نسبت به پارامتر مکان

در این قسمت روش عناصر متناهی تکه ای خطی را برای

گسسته سازی مساله (۱) نسبت به پارامتر مکان شرح می دهیم.

با جایگذاری (۱۳) و (۱۴) در (۱۰) و ارزیابی این معادله برای $\psi(x) = \psi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, دستگاه خطی شامل $n-1$ معادله دیفرانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & {}_0^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \sum_{j=0}^n v_j(t) \int_0^1 \psi_j(x) \psi_i(x) dx \\ & + \sum_{j=0}^n v_j(t) \int_0^1 \frac{d\psi_j}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} dx \\ & = \int_0^1 q(x, t) \psi_i(x) dx \\ & + \sum_{j=0}^n u_j(t) \int_0^1 \psi_j(x) \psi_i(x) dx, \\ & i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (15)$$

با تعریف

$$\mathbf{v}(t) := [v_0(t), v_1(t), \dots, v_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{u}(t) := [u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t)]^T,$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات (۱۵) به صورت

$$\mathbf{M}_f {}_0^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \mathbf{v}(t) + \mathbf{N}_f \mathbf{v}(t) - \mathbf{M}_f \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_f(t), \quad t \in (0, \tau) \quad (16)$$

بیان می‌شود که در آن $\mathbf{M}_f, \mathbf{N}_f \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n+1)}$ و $\mathbf{q}_f(t) \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ به ترتیب، با استفاده از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$(\mathbf{M}_f)_{ij} = \int_0^1 \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$(\mathbf{N}_f)_{ij} = \int_0^1 \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$(\mathbf{q}_f(t))_i = \int_0^1 q(x, t) \psi_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

توجه کنید که با کمک قاعده دوزنقه‌ای مرکب، بدست می‌آوریم:

برای این منظور، ابتدا طرفین رابطه (۱) را در تابع هموار $\psi(x)$ صادق در شرایط $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ضرب می‌کنیم. سپس با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه روی بازه $[0, 1]$ و به کاربردن انتگرال‌گیری جز به جز بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} & {}_0^{RL}\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \int_0^1 v(x, t) \psi(x) dx + \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{d\psi}{dx} dx \\ & = \int_0^1 q(x, t) \psi(x) dx \\ & + \int_0^1 u(x, t) \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

با تقسیم‌بندی دامنه فضایی $[0, 1]$ به n زیربازه به صورت $[x_i, x_{i+1}]$ ، نقاط گره‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_i = ih_x, \quad h_x = \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

برای هر $i = 0, 1, \dots, n$ تابع تکه‌ای خطی (کلاهی) $\psi_i(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - (i-1)h_x}{h_x} & (i-1)h_x \leq x \leq ih_x \\ \frac{-x + (i+1)h_x}{h_x} & ih_x \leq x \leq (i+1)h_x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

توجه کنید که این تابع در شرایط دلتای کرونگر صدق می‌کند، به عبارتی

$$\psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (12)$$

اینک با استفاده از (۱۱)، توابع کنترل و وضعیت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$v_f(x, t) := \sum_{j=0}^n v_j(t) \psi_j(x) \quad (13)$$

$$u_f(x, t) := \sum_{j=0}^n u_j(t) \psi_j(x) \quad (14)$$

اکنون با در نظر گرفتن روابط (۱۶)–(۲۰)، مساله (۱) به مساله کنترل بهینه شامل دستگاه معادلات زمان-کسری توزیع شده زیر تبدیل می‌شود:

$$\min J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\tau [\mathbf{v}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}(t) - 2\bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{W}^x \bar{\mathbf{v}}(t)] dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau [\mathbf{u}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{u}(t)] dt, \quad (۲۱.ا)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{M}_f {}^R L D_t^{\omega(\alpha)} \mathbf{v}(t) + \mathbf{N}_f \mathbf{v}(t) - \mathbf{M}_f \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_f(t), \quad t \in (0, \tau) \quad (۲۱.ب)$$

$$\mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\mu}, \quad (۲۱.ج)$$

$$\mathbf{C}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}, \quad (۲۱.د)$$

که در آن ماتریس‌های \mathbf{M}_f و \mathbf{N}_f به صورت

$$\mathbf{M}_f = \frac{h_x}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_f = \frac{1}{h_x} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

و بردار $\mathbf{q}_f(t)$ همانند

$$\mathbf{q}_f(t) = h_x [q(x_1, t), q(x_2, t), \dots, q(x_{n-1}, t)]^T$$

به دست می‌آیند.

۴.۲. گسسته‌سازی نسبت به پارامتر زمان

در این قسمت با تقسیم‌بندی بازه زمانی $[0, \tau]$ به m زیربازه نظیر $[t_j, t_{j+1}]$ که در آن نقاط گره‌ای به صورت

$$(\mathbf{q}_f(t))_i = h_x q(ih_x, t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

با در نظر گرفتن نقاط گره‌ای مکانی، شرایط اولیه (۱.ب)

به صورت زیر گسسته می‌شوند:

$$\mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\mu} = [\mu(x_0), \mu(x_1), \dots, \mu(x_n)]^T. \quad (۱۷)$$

به صورت مشابه، شرایط مرزی (۱.ج) نیز به صورت

$$\mathbf{C}\mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \quad (۱۸)$$

گسسته می‌شوند که $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times (n+1)}$ و برابر است با

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

هم‌چنین با جایگذاری (۱۳) و (۱۴) در (۱.ا) و سپس استفاده از قاعده دوزنقه‌ای مرکب و با در نظر گرفتن ویژگی (۱۲)، شاخص عملکرد مساله به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$J(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \left[\sum_{i=0}^n w_i^x (v_i(t) - \bar{v}_i(t))^2 \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left[\sum_{i=0}^n w_i^x u_i^2(t) \right] dt, \quad (19)$$

که در آن

$$w_0^x = \frac{h_x}{2}, w_1^x = h_x, \dots, w_{n-1}^x = h_x, w_n^x = \frac{h_x}{2}.$$

با تعریف

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = [\bar{v}_0(t), \bar{v}_1(t), \dots, \bar{v}_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{W}^x = \text{diag}[w_0^x, w_1^x, \dots, w_n^x],$$

رابطه (۱۹) به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می‌گردد:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\tau [\mathbf{v}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}(t) - 2\bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{W}^x \bar{\mathbf{v}}(t)] dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau [\mathbf{u}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{u}(t)] dt, \quad (20)$$

مساله بهینه‌سازی حاصل، دارای تابع هدف درجه دو و محدودیت‌های خطی است، بنابراین در رده مسائل برنامه ریزی درجه دو^۱ قرار می‌گیرد که برای حل آن می‌توان الگوریتم‌های بهینه‌سازی درجه دو را به صورت موثر و کارا به کار برد.

۴.۳. فرم ماتریسی مساله برنامه‌ریزی درجه دو

برای تعیین فرم ماتریسی مساله برنامه‌ریزی درجه دو بدست آمده در رابطه (۲۴)، قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{V} = \text{vec}([\mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_m]^T),$$

$$\mathbf{U} = \text{vec}([\mathbf{u}_0 \quad \mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m]^T),$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \text{vec}([\bar{\mathbf{v}}_0 \quad \bar{\mathbf{v}}_1 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{v}}_m]^T),$$

$$\mathbf{Q} = \text{vec}([\mathbf{q}_f(t_0) \quad \mathbf{q}_f(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{q}_f(t_m)]^T),$$

که در آن منظور از نماد vec ، عملگر بردارسازی^۲ است. لازم به توضیح است که حاصل عمل vec بر روی ماتریس مربعی \mathbf{A} عبارت است از برداری که از زیر هم قرار دادن ستون‌های ماتریس \mathbf{A} بدست می‌آید. اکنون با تعریف بردار متغیرهای تصمیم به صورت $\mathbf{Z} := [\mathbf{V}^T, \mathbf{U}^T]^T$ و استفاده از نمادگذاری‌های بالا، تابع هدف (۲۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J_{n,m}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{H} \mathbf{Z} + \mathbf{f}^T \mathbf{Z} + \mathbf{f}_0, \quad (25)$$

که در آن

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}^x \otimes \mathbf{W}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^x \otimes \mathbf{W}^t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} = - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}}^T (\mathbf{W}^x \otimes \mathbf{W}^t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{f}_0 = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{V}}^T (\mathbf{W}^x \otimes \mathbf{W}^t) \bar{\mathbf{V}},$$

^۱ Quadratic programming problem

^۲ Vectorization operator

$$t_j = jh_t, \quad h_t = \frac{\tau}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

در نظر گرفته می‌شوند، روش هم‌مکانی را برای مساله (۲۱) شرح می‌دهیم. با ارزیابی معادلات دینامیکی (۲۱) (ب) در این نقاط داریم:

$$\mathbf{M}_f {}^{RL} \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \mathbf{v}(t)|_{t=t_j} + \mathbf{N}_f \mathbf{v}_j - \mathbf{M}_f \mathbf{u}_j = \mathbf{q}_f(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (22)$$

که در آن $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}(t_j)$ و $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}(t_j)$ هم‌چنین شاخص عملکرد (۲۱) (آ)، با استفاده از قاعده دوزنقه ای مرکب، همانند زیر بیان می‌شود:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m w_j^t [\mathbf{v}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}_j - 2 \bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}_j + \bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{W}^x \bar{\mathbf{v}}_j] + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m w_j^t [\mathbf{u}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{u}_j], \quad (23)$$

که در آن

$$w_0^t = \frac{h_t}{2}, w_1^t = h_t, \dots, w_{n-1}^t = h_t, w_n^t = \frac{h_t}{2}.$$

سرانجام با محاسبه شرایط مرزی (۲۱) (د) در $m+1$ نقطه هم‌مکانی $t_j, j = 0, 1, \dots, m$ ، و در نظر گرفتن روابط (۲۲) و (۲۳)، مساله (۲۱) به مساله بهینه‌سازی زیر رونوشت می‌گردد:

$$\text{Min } J(\mathbf{u}) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^m w_j^t [\mathbf{v}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}_j - 2 \bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}_j + \bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{W}^x \bar{\mathbf{v}}_j]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m w_j^t [\mathbf{u}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{u}_j], \quad (1.24)$$

$$\text{s. t.} \quad \mathbf{M}_f {}^{RL} \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \mathbf{v}(t)|_{t=t_j} + \mathbf{N}_f \mathbf{v}_j - \mathbf{M}_f \mathbf{u}_j = \mathbf{q}_f(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (ب. 24)$$

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\mu}, \quad (ج. 24)$$

$$\mathbf{C} \mathbf{v}_j = \mathbf{0}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (د. 24)$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

ماتریس \mathbf{A} در مساله برنامه‌ریزی (۲۹) دارای ساختار خلوت (تنک) است. از دیدگاه بهینه‌سازی این ویژگی (خلوت بودن ماتریس \mathbf{A}) بسیار سودمند است، زیرا به‌طور قابل توجهی پیچیدگی محاسباتی را کاهش داده و آنرا برای حل کارآمدتر می‌سازد. به خصوص در مسائلی با مقیاس بزرگ، این ویژگی دارای اهمیت بیشتری است. به علاوه، از آنجاییکه عناصر روی قطر ماتریس هسین \mathbf{H} نتیجه حاصلضرب وزن های قاعده انتگرال گیری دوزنقه ای مرکب هستند و این وزن های انتگرال گیری همواره مثبت هستند، ماتریس \mathbf{H} یک ماتریس قطری با عناصر مثبت و بنابراین یک ماتریس معین مثبت است. این ویژگی تضمین می‌کند که مساله برنامه‌ریزی (۲۹) اکیدا محدب است و لذا دارای کمینه سراسری یکتاست. بنابراین الگوریتم‌های کارایی نظیر الگوریتم نقطه - درونی محدب^۲ می‌تواند برای حل آن به کار رود.

۵. نتایج عددی

در این بخش کارایی روش پیشنهاد شده در بخش ۴ را با اعمال آن بر دو مثال و گزارش نتایج عددی نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که مدل‌سازی مثال‌ها در محیط نرم‌افزار متلب^۳ صورت گرفته است و همچنین برای حل مساله بهینه‌سازی درجه دو حاصل، دستور quadprog را به کار برده‌ایم.

مثال ۱: مسأله‌ی (۱) را در نظر می‌گیریم که در آن [22]

$$v_{ex}(x, t) = \sin(\pi t) \sin(\pi x), \quad u_{ex}(x, t) = 0,$$

$$\bar{v}(x, t) = \sin(\pi t) \sin(\pi x)$$

^۲ Convex interior-point

^۳ Matlab software

در این جا $\mathbf{W}^t := \text{diag}[w_0^t, w_1^t, \dots, w_m^t]$ و همچنین نماد \otimes بیان‌گر ضرب کرونگر^۱ است.

معادلات دینامیک (۲۴. ب) در شکل ماتریسی

$$\begin{aligned} & \left((\mathbf{M}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1})(\mathbf{I}_{n+1} \otimes \mathbf{D}_{m+1}) + (\mathbf{N}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \right) \mathbf{V} \\ & - (\mathbf{M}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \mathbf{U} = \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (26)$$

فرمول‌بندی می‌شوند که در آن \mathbf{D}_{m+1} ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه GL یا LI است که در بخش ۳ معرفی شد. محدودیت‌های (۲۴. ج) و (۲۴. د) نیز می‌توانند همانند زیر بیان شوند:

$$(\mathbf{I}_{n+1} \otimes \mathbf{E}) \mathbf{V} = (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{b}) \quad (27)$$

$$(\mathbf{C} \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (28)$$

که در آن

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = [1 \mid \mathbf{0}_{1 \times m}]^T.$$

با در نظر گرفتن معادلات (۲۵)–(۲۸)، شکل ماتریسی مساله برنامه‌ریزی درجه دو بدست آمده در رابطه (۲۴) همانند زیر بیان می‌شود:

$$\min J_{n,m}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{H} \mathbf{Z} + \mathbf{f}^T \mathbf{Z} + \mathbf{f}_0, \quad (29)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{AZ} = \mathbf{h},$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left((\mathbf{M}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1})(\mathbf{I}_{n+1} \otimes \mathbf{D}_{m+1}) + (\mathbf{N}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \right) \\ (\mathbf{I}_{n+1} \otimes \mathbf{E}) \\ (\mathbf{C} \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \\ -(\mathbf{M}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

^۱ Kronecker product

$u_{ex}(x_i, t_j)$ و $v_{ex}(x_i, t_j)$ به ترتیب بیانگر مقادیر دقیق توابع وضعیت و کنترل در نقطه $(x, t) = (x_i, t_j)$ هستند.

$$q(x, t) = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi x) \sum_{k=0}^{\infty} [(i\pi t)^k + (-i\pi t)^k] \int_0^1 \omega(\alpha) \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(k+2-\alpha)} d\alpha + \pi^2 \sin(\pi t) \sin(\pi x).$$

روش ارائه شده را بر این مثال با $\omega(\alpha) = 5^\alpha$ به کار بردیم. در شکل (۱)، نمودار جواب‌های تقریبی برای $v(x, t)$ و $u(x, t)$ حاصل از روش مستقیم مبتنی بر L1، برای $n = m = 50$ ، به همراه نمودار جواب‌های دقیق و نمودار تابع خطا رسم شده است. در جدول (۱)، خطای بدست آمده از جواب‌های تقریبی برای $v(x, t)$ ، $u(x, t)$ و J حاصل از روش‌های مبتنی بر GL و L1 همراه با زمان محاسبات (CPU) هر روش به ازای مقادیر مختلف n و m گزارش شده است. زمان محاسبات بر حسب ثانیه است. نمودار متناظر با جدول (۱) در مقیاس نیم - لگاریتمی^۱ در شکل (۲)، آورده شده است. دقت شود که برای محاسبه خطا در دو مثال از نرم جندر میانگین مربعات^۲ استفاده کردیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{nm}(v) = \left(\frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (v(x_i, t_j) - v_{ex}(x_i, t_j))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$E_{nm}(u) = \left(\frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (u(x_i, t_j) - u_{ex}(x_i, t_j))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

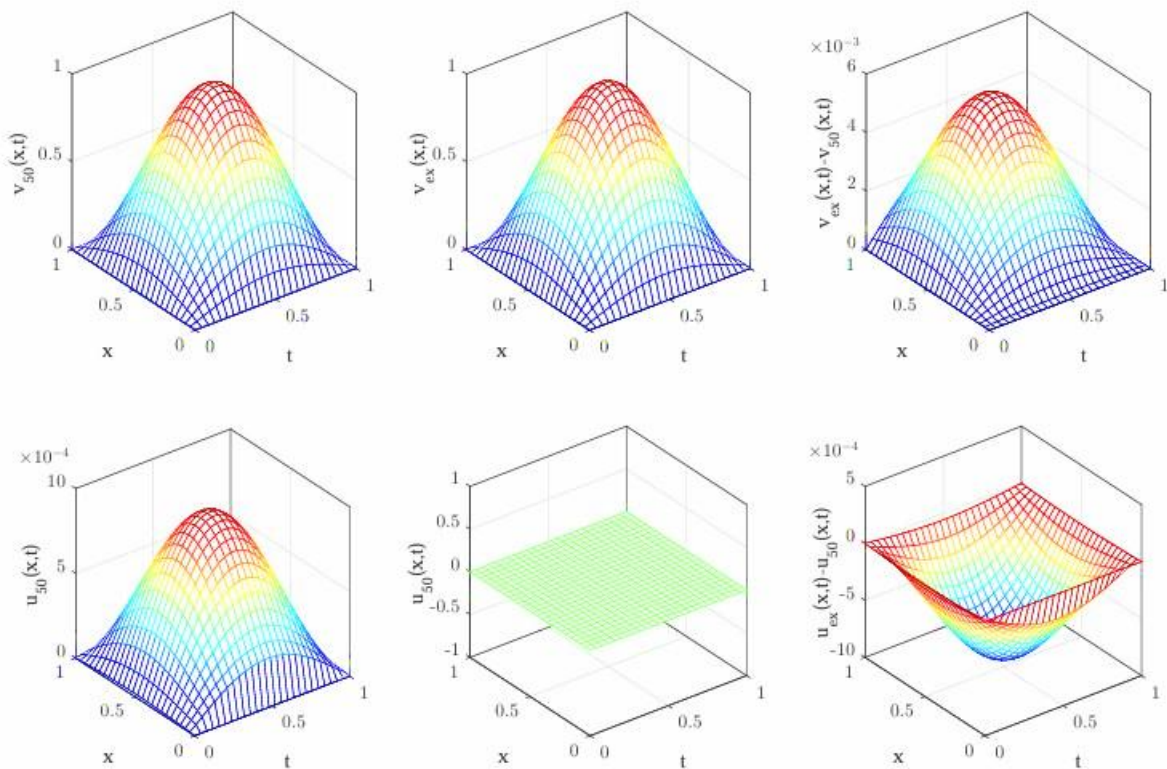
که در آن $v(x_i, t_j)$ و $u(x_i, t_j)$ به ترتیب بیانگر مقادیر تقریبی توابع وضعیت و کنترل در نقطه $(x, t) = (x_i, t_j)$ و

^۱ Semi-log scale

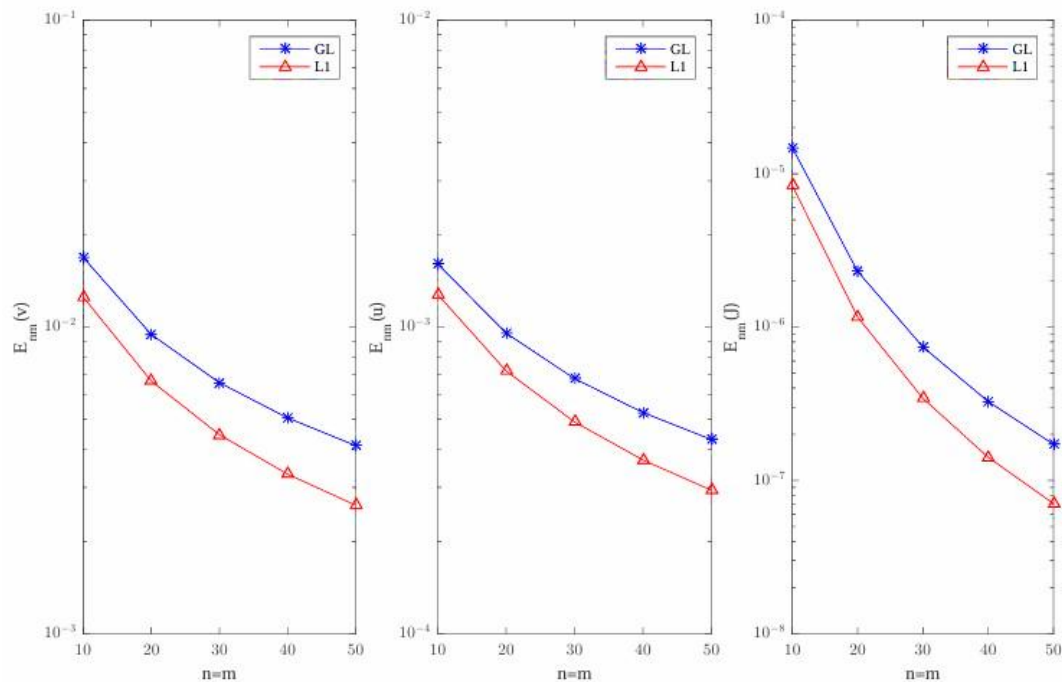
^۲ Root mean squared

جدول ۱. (مثال ۱ با $\omega(\alpha) = 5^\alpha$)، خطاهای $E_{nm}(v)$ ، $E_{nm}(u)$ و $E_{nm}(J)$ و زمان محاسبات CPU حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و $L1$ به ازای مقادیر مختلف $n = m$

$n = m$	روش مستقیم مبتنی بر GL				روش مستقیم مبتنی بر $L1$			
	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(u)$	$E_{nm}(J)$	CPU	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(v)$	CPU
10	$1.68e-2$	$1.60e-3$	$1.47e-5$	2.31	$1.25e-2$	$1.27e-3$	$8.37e-6$	2.39
20	$9.45e-3$	$9.55e-4$	$2.30e-6$	6.97	$6.66e-3$	$7.19e-4$	$1.16e-6$	7.06
30	$6.58e-3$	$6.78e-4$	$7.41e-7$	14.79	$4.45e-3$	$4.90e-4$	$3.42e-7$	14.90
40	$5.05e-3$	$5.26e-4$	$3.26e-7$	25.94	$3.31e-3$	$3.68e-4$	$1.41e-7$	25.93
50	$4.10e-3$	$4.29e-4$	$1.71e-7$	40.31	$2.62e-3$	$2.93e-4$	$7.05e-8$	40.31



شکل ۱. (مثال ۱ با $\omega(\alpha) = 5^\alpha$)، نمودار جواب‌های تقریبی بدست آمده از روش مستقیم مبتنی بر $L1$ برای $n = m = 50$ ، به همراه نمودار جواب‌های دقیق و نمودار توابع خطا.



شکل ۲. (مثال ۱ با $\omega(\alpha) = 5^\alpha$)، نمودار لگاریتم خطاهای $E_{nm}(v)$ ، $E_{nm}(u)$ و $E_{nm}(J)$ حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و L1 به‌ازای مقادیر مختلف $n = m$.

های مبتنی بر GL و L1 همراه با زمان محاسبات (CPU) هر روش به‌ازای مقادیر مختلف n و m گزارش شده است. زمان محاسبات بر حسب ثانیه است. هم‌چنین نمودار متناظر با جدول (۲) در مقیاس نیم-لگاریتمی، در شکل (۴) ارائه شده است.

از شکل‌های (۱) و (۳)، مشخص است که توابع وضعیت و کنترل تقریبی حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و L1 با جواب‌های دقیق داده شده در هماهنگی و سازگاری بسیار خوبی هستند. با دقت در جداول (۱) و (۲)، درمی‌یابیم هر دو روش دارای دقت مرتبه یک هستند که این موضوع با تئوری سازگار است؛ هم‌چنین زمان محاسبات هر دو روش کم و تقریباً یکسان است. از نمودارهای (۲) و (۴)، مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد نقاط گره‌ای، خطاهای عددی به‌سرعت کاهش می‌یابند و این بدان مفهوم است که جواب‌های تقریبی به جواب‌های واقعی همگرا می‌شوند.

مثال ۲: مسأله‌ی (۱) را در نظر می‌گیریم که در آن

$$v_{ex}(x, t) = t^{\frac{5}{2}}(x^2 - x),$$

$$u_{ex}(x, t) = x^2(1 - x^2)(1 - t)e^{1-t},$$

$$\bar{v}(x, t) = x^2(1 - x^2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left[\int_0^1 w(\alpha) \frac{(1-t)^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k+2-\alpha)} d\alpha \right]$$

$$+(12x^2 - 2)(1-t)e^{1-t} + v(x, t),$$

$$q(x, t) = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \frac{t^{\frac{3}{2}}(t-1)(x^2-x)}{\ln(t)} - 2t^{\frac{5}{2}} - u(x, t).$$

روش ارائه شده را بر روی این مثال با $\omega(\alpha) =$

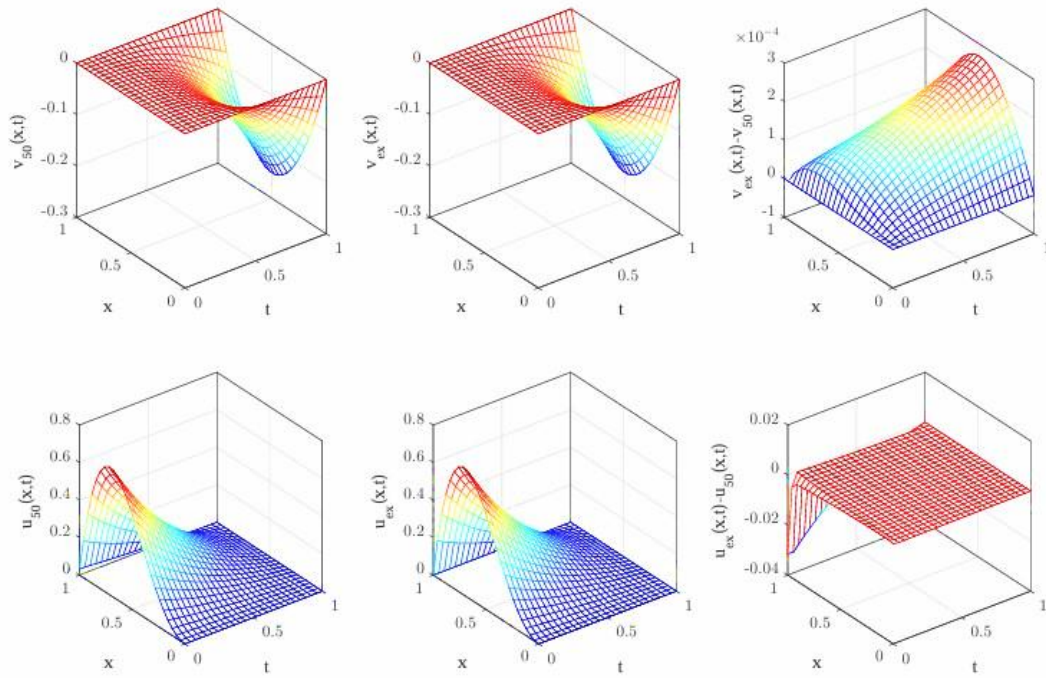
$\Gamma\left(\frac{7}{2} - \alpha\right)$ به‌کار بردیم. در شکل (۳)، نمودار جواب‌های

تقریبی برای $v(x, t)$ و $u(x, t)$ حاصل از روش مبتنی بر L1،

برای $n = m = 50$ ، به‌همراه نمودار جواب‌های دقیق و نمودار

تابع خطا، رسم شده است. در جدول (۲)، خطای بدست آمده از

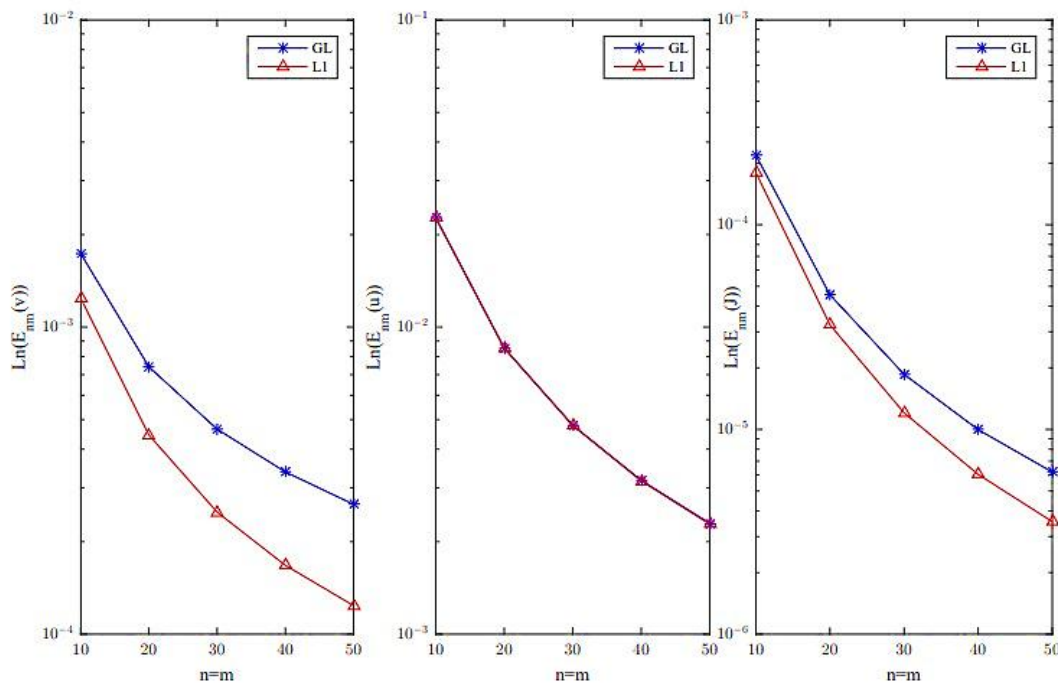
جواب‌های تقریبی برای $v(x, t)$ ، $u(x, t)$ و J حاصل از روش



شکل ۳. (مثال ۲ با $\omega(\alpha) = \Gamma\left(\frac{7}{2} - \alpha\right)$). نمودار جواب‌های تقریبی بدست آمده از روش مستقیم مبتنی بر L1 برای $n = m = 50$ به همراه نمودار جواب‌های دقیق و نمودار توابع خطا.

جدول ۲. (مثال ۲ با $\omega(\alpha) = \Gamma\left(\frac{7}{2} - \alpha\right)$). خطاهای $E_{nm}(v)$ ، $E_{nm}(u)$ و $E_{nm}(J)$ و زمان محاسبات CPU حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و L1 به ازای مقادیر مختلف $n = m$

$n = m$	روش مستقیم مبتنی بر GL				روش مستقیم مبتنی بر L1			
	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(u)$	$E_{nm}(J)$	CPU	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(u)$	$E_{nm}(J)$	CPU
10	$1.73e-3$	$2.26e-2$	$2.18e-4$	2.48	$1.23e-3$	$2.27e-2$	$1.79e-4$	2.39
20	$7.41e-4$	$8.53e-3$	$2.54e-5$	7.13	$4.44e-4$	$8.54e-3$	$3.24e-5$	7.14
30	$4.65e-4$	$4.78e-3$	$1.85e-5$	14.99	$2.49e-4$	$4.78e-3$	$1.20e-5$	15.13
40	$3.27e-4$	$3.16e-3$	$9.97e-6$	26.36	$1.67e-4$	$3.15e-3$	$6.03e-6$	26.44
50	$2.64e-4$	$2.29e-3$	$6.19e-6$	40.95	$1.23e-4$	$2.27e-3$	$3.54e-6$	40.86



شکل ۴. (مثال ۲ با $\omega(\alpha) = \Gamma\left(\frac{7}{2} - \alpha\right)$)، نمودار لگاریتم خطاهای $E_{nm}(v)$ ، $E_{nm}(u)$ و $E_{nm}(J)$ حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و L1 به ازای مقادیر مختلف $n = m$.

۶. نتیجه‌گیری

کارایی روش پیشنهادی، دو مثال ارائه کردیم. با نگاهی به نمودارها و جدول خطاها به این موضوع پی می‌بریم که جواب‌های تقریبی در هماهنگی بسیار خوبی با جواب‌های دقیق مساله هستند و نتایج عددی دو روش تقریباً یکسان است. به‌علاوه با کمک نتایج عددی می‌توان دریافت که در متغیرهای حالت و کنترل به ترتیب به دقت مطلق از مرتبه‌های $4 - 1e$ و $2 - 1e$ خواهیم رسید. با توجه به این که گسسته‌سازی‌ها در روش ارایه شده از نوع موضعی است، این دقت معقول و مناسب است. روش ارائه شده به‌سادگی قابل اجراست و نیازی به محاسبات پیچیده ندارد و می‌توان آن را برای حل رده وسیعی از مسائل به‌کار برد.

در این مقاله، مسائل کنترل بهینه‌ای را مورد بررسی قرار دادیم که دینامیک آن‌ها توسط معادلات پنخس زمان - کسری مرتبه توزیع شده توصیف می‌شود. یک روش مستقیم برای حل این مسائل معرفی کردیم. به منظور تقریب مشتقات زمان - کسری مرتبه توزیع شده، روش‌های تقریبی گرانوالد - لتنیف و L1 را مورد استفاده قرار داده و دو فرمول تقریبی برای مشتق بدست آوردیم. هم‌چنین برای گسسته‌سازی مکانی از روش عناصر متناهی تکه‌ای خطی استفاده کردیم. شاخص عملکرد نیز با انتخاب کوادراتور مناسب نظیر قاعده دوزنقه‌ای مرکب، گسسته شد. به این ترتیب، مساله اصلی به یک مساله بهینه‌سازی درجه دو اکیدا محدب تقلیل یافت که برای حل آن می‌توان از الگوریتم‌های کارای بهینه‌سازی استفاده کرد. برای اثبات دقت و

- [7] A. Jajarmi and D. Baleanu, "On the fractional optimal control problem with a general derivative operator," *Asian Journal of Control*, vol. 23, pp. 1062-1071, 2021, doi: 10.1002/asjc.2282.
- [8] S. A. yousefi, A. Lotfi and M. Dehghan, "The use of a Legendre multiwavelet collocation method for solving the fractional optimal control problems," *Journal of Vibration and Control*, vol. 17, pp. 2058-2065, 2011, doi: 10.1177/1077546311399950.
- [9] A. Nemati, "Numerical solution of 2D fractional optimal control problems by the spectral method along with Bernstein operational matrix," *International Journal of control*, vol. 91, pp. 1-19, 2018, doi: 10.1080/00207179.2017.1334267.
- [10] S. Li and Z. Zhou, "Legendre pseudo-spectral method for optimal control problem governed by a time-fractional diffusion equation," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 95, pp. 1308-1325, 2018, doi: 10.1080/00207160.2017.1417591.
- [11] O. P. Agrawal, "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 38, pp. 323-337, 2004, doi: 10.1007/s11071-004-3764-6.
- [12] D. Baleanu, O. Defterli and O. P. Agrawal, "A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems," *Journal of Vibration and Control*, vol. 15, pp. 583-597, 2009, doi: 10.1177/1077546308088565.
- [13] E. Tohidi and H. S. Nik, "A Bessel collocation method for solving fractional optimal control problems," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, pp. 455-465, 2015, doi: 10.1016/j.apm.2014.06.003.
- [1] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*, Dover Publications, 2004.
- [2] A. Padder, S. Almutairi, S. Qureshi, A. Afroz, E. Hincal and A. Tassaddiq, "Dynamical analysis of generalized tumor model with caputo fractional-order derivative," *Fractal and Fractional*, vol. 7, pp. 1-19, 2023, doi: 10.3390/fractalfract7030258.
- [3] N. P. Dong, H. V. Long and A. Khastan, "Optimal control of a fractional order model for granular SEIR epidemic with uncertainty," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 88, pp. 1-32, 2020, doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105312.
- [4] G. Saikumar, K. K. Sahu and P. Saha, "Design of fractional Order IMC for nonlinear chemical processes with time delay," *International Journal of Dynamic and Control*, vol. 11, pp. 1797-1807, 2023, doi: 10.1007/s40435-022-01087-0.
- [5] S. Safiullah, A. Rahman and S. A. Lone, "Optimal control of electrical vehicle incorporated hybrid power system with second order fractional-active disturbance rejection controller," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 44, pp. 905-934, 2021, doi: 10.1002/oca.2826.
- [6] U. L. Ihtisham, A. Nigar and K. S. Nisar, "An optimal control strategy and Grunwald-Letnikove finite-difference numerical scheme for fractional-order COVID- 19 model," *Mathematical Modelling and Numerical Simulation with Applications*, vol. 2, pp. 108-116, 2022, doi: 10.53391/mmnsa.2022.009.

- 104, 2009, doi: 10.1016/j.cam.2008.07.018.
- [21] M. A. Zaky, "A Legendre collocation method for distributed-order fractional optimal control problems," *Nonlinear Dynamic*, vol. 91, pp. 2667-2681, 2018, doi: 10.1007/s11071-017-4038-4
- [22] M. A. Zaky and J. A. Machado, "On the formulation and numerical simulation of distributed-order fractional optimal control problems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 52, pp. 177-189, 2017, doi: 10.1016/j.cnsns.2017.04.026.
- [23] P. Rahimkhani and Y. Ordokhani, "Numerical investigation of distributed-order fractional optimal control problems via Bernstein wavelets," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 42, pp. 355-373, 2021, doi: 10.1002/oca.2679.
- [24] R. Vaziri Doghezlou, H. R. Tabrizidooz and M. Shamsi, "A direct transcription method for solving distributed-order fractional optimal control problems," *Journal of Vibration and Control*, 2024, doi: 10.1177/10775463241238578.
- [25] M. Bisheh Niasar and A. Mahdipour, "An adaptive mesh hybrid block method for solving nonlinear singularly perturbed differential equations," *Soft Computing Journal*, vol. 11, no. 1, pp. 140-150, 2022, doi: 10.22052/scj.2023.248415.1105 [In Persian].
- [26] H. R. Tabrizidooz and F. Hajiramezanali, "A numerical algorithm for determining time-dependent coefficient in a parabolic inverse problem using Legendre multiwavelet base," *Soft Computing Journal*, vol. 10, no. 2, pp. 110-123, 2022, doi: 10.22052/scj.2022.243311.1028, [In Persian].
- [27] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory And Applications of Fractional Differential Equations*, Amsterdam: Elsevier,
- [14] A. Alizadeh and S. Effati, "An iterative approach for solving fractional optimal control problems," *Journal of vibration and control*, vol. 24, pp. 18-36, 2018, doi: 10.1177/1077546316633391.
- [15] A. Mushtaq, A. Shamsi, H. Khosravianian-Areb, D. F. Torres and F. Bozorgnia, "A space-time pseudospectral discretization method for solving diffusion optimal control problems with two-sides fractional derivatives," *Journal of Vibration and control*, vol. 25, pp. 1-16, 2018, doi: 10.1177/1077546318811194.
- [16] A. B. Salati, M. Shamsi and D. F. Torres, "Direct transcription methods based on fractional integral approximation formulas for solving nonlinear fractional optimal control problems," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 67, pp. 334-350, 2019, doi: 10.1016/j.cnsns.2018.05.011.
- [17] N. Kumar and M. Mehra, "Legendre wavelet collocation method for fractional optimal control problems with fractional Bolza cost," *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 37, pp. 1-32, 2021, doi: 10.1002/num.22604.
- [18] L. Liu, L. Feng, Q. Xu, L. Zheng and F. Liu, "Flow and heat transfer of generalized Maxwell fluid over a moving plate with distributed order time fractional constitutive models," *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 116, pp. 1-8, 2020, doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104679.
- [19] H. V. Park, J. Choe and J. M. Kang, "Pressure behavior of transport in fractal porous media using a fractional calculus approach," *Energy Sources*, vol. 22, pp. 881-890, 2000, doi: 10.1080/00908310051128237.
- [20] K. Diethelm and N. J. Ford, "Numerical analysis for distributed-order differential equations," *Numerical Analysis for Distributed-order Differential Equations*, vol. 225, pp. 96-

[31] C. Li and M. Cai, Theory and Numerical Approximations of Fractional Integrals And Derivatives, SIAM, 2019.

2006.

[28] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Amsterdam: Elsevier, 1999.

[29] Y. Chen and I. Podlubny, Distributed-Order Dynamic System: Stability, Simulation, London: Applications and Perspectives Springer, 2012.

[30] C. Li and F. Zeng, Numerical Methods for Fractional Calculus, CRC Press, 2015.

پایگاه داده شده در مجله محاسبات نرم