



دانشگاه کاشان
University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



یک روش عناصر متناهی کارا برای مسائل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده[✦]

رویا وزیری دوقزلو¹، دانشجوی دکتری، حمیدرضا تبریزی دوز^{1*}، استادیار، مصطفی شمسی²، دانشیار

¹ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.

² دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیر کبیر، تهران، ایران.

اطلاعات مقاله

چکیده

تاریخچه مقاله:

دریافت 11 بهمن ماه 1402

پذیرش 19 تیر ماه 1403

کلمات کلیدی:

مسائل کنترل بهینه

معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده

روش های مستقیم

گرانوالد-لنتیکف

عناصر متناهی

فرمول های تقریب برای مشتق

در این مقاله، یک روش عناصر متناهی برای تقریب جواب مسائل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده، معرفی می کنیم. دینامیک این مسائل شامل مشتقات زمان-کسری از مرتبه توزیع شده می باشد که تعمیمی از مشتقات کسری هستند. علیرغم اهمیت این مسائل، تحقیقات کمی در مورد حل آنها در منابع وجود دارد. روش های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه به دو دسته کلی روش های غیرمستقیم و روش های مستقیم تقسیم می شوند. در روش های غیرمستقیم با استفاده از اصل پوتریاگین، شرایط لازم برای بهیگی به دست آمده و به صورت یک مساله مقدار مرزی دو نقطه ای غیرخطی بازنویسی می شود. از طرف دیگر، در روش های مستقیم با گسسته سازی متغیرهای کنترل و وضعیت، مساله مورد نظر به یک مساله برنامه ریزی غیرخطی تقلیل می یابد. به دلیل مشکلات مربوط به حل دستگاه معادلات حاصل از شرایط لازم برای بهیگی در مسائل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده، در این مقاله از دیدگاه روش های مستقیم برای تقریب جواب این مسائل استفاده می کنیم. به منظور تقریب مشتقات زمان-کسری مرتبه توزیع شده، روش های تقریبی گرانوالد-لنتیکف و L1 را مورد استفاده قرار داده و دو فرمول تقریبی برای مشتق به دست می آوریم. همچنین برای گسسته سازی مکانی از روش عناصر متناهی تکه ای خطی استفاده می کنیم. به این ترتیب، مساله اصلی را به یک مساله بهینه سازی درجه دو محدب تبدیل می کنیم که می تواند توسط الگوریتم های بهینه سازی موجود به طور کارا حل شود. برای اثبات کارایی و دقت روش ارائه شده، دو مثال عددی در نظر می گیریم.

© 1403 نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

1. مقدمه

در یک مساله کنترل بهینه، به یافتن جواب بهینه برای کنترل یک

سیستم دینامیکی از طریق نظریه بهینه سازی ریاضی پرداخته می شود. هدف در این مسائل معمولاً کمینه (یا بیشینه) کردن یک تابع هدف با تعیین متغیرهای کنترل بهینه در یک بازه زمانی مشخص است به گونه ای که محدودیت های خاصی برآورده شوند [1]. یک مساله کنترل بهینه می تواند به سیستم هایی که توسط معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری کنترل می شوند، تعمیم

✦ نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست (های) الکترونیک: r_vaziri96@grad.kashanu.ac.ir (وزیری دوقزلو)

htabrizidooz@kashanu.ac.ir (تبریزی دوز)

m_shamsi@aut.ac.ir (شمسی)

نحوه ارجاع به مقاله: رویا وزیری دوقزلو، حمیدرضا تبریزی دوز، مصطفی شمسی، «یک روش عناصر متناهی کارا برای مسائل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده»، مجله محاسبات نرم، جلد 14، شماره 1، ص 121-108، بهار و تابستان 1404.

مرجع [17]، با استفاده از تابع مقیاس هرمیت¹⁴ و با برآورد خطا، یک روش هم‌مکانی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری غیر خطی معرفی شد.

در این مقاله، مسائل کنترل بهینه‌ایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دینامیک حاکم بر آنها توسط معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده¹⁵ توصیف می‌شوند. این معادلات تعمیمی از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری هستند و در زمینه‌های مختلفی مانند انتقال حرارت، دینامیک سیالات، علم مواد و بیولوژی کاربرد دارند [18]-[20]. علیرغم اهمیت این نوع مسائل، تحقیقات بسیار کمی در این زمینه صورت گرفته است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌کنیم. در مرجع [21]، زکی با استفاده از کاربردهای ضرایب لاگرانژ¹⁶ در حساب تغییرات و با به‌کاربردن انتگرال‌گیری کسری جزبه‌جز، شرایط لازم بهینگی را برای مسائل کنترل بهینه کسری مرتبه توزیع شده به‌دست آورد. این شرایط به عنوان یک مساله مقدار مرزی کسری مرتبه توزیع شده دو نقطه‌ای غیرخطی بیان شد و برای حل آن روش هم‌مکانی لژاندر بکار برده شد. همچنین در مرجع [22]، مساله کنترل بهینه محذب نامقیدی در نظر گرفته شد که معادلات حاکم بر آن توسط معادله پخش کسری مرتبه توزیع شده بیان می‌شد. در این مطالعه، ابتدا با استفاده از روش شبه-طیفی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های ژاکوبی¹⁷ و با استفاده از فرمول‌های انتگرال‌گیری ژاکوبی-گوس-لوباتو¹⁸ مساله مذکور به یک مساله کنترل بهینه کسری مرتبه توزیع شده عادی¹⁹ تبدیل شد و پس از تشکیل معادلات اویلر-لاگرانژ²⁰ نظیر و فرآیند انتگرال‌گیری عددی بر اساس درون‌یابی ژاکوبی-گوس-لوباتو²¹، جواب مساله حاصل گردید. در مرجع [23]، راهکار محاسباتی مستقیمی بر اساس موجک برنشتاین²² برای حل مسائل کنترل بهینه کسری مرتبه توزیع شده ارائه شد. در مرجع [24]، یک

یابد. در این صورت مفهوم کنترل بهینه کسری¹ به‌وجود می‌آید. استفاده از دینامیک مرتبه کسری امکان مدل‌سازی دقیق‌تری را برای سیستم‌های پیچیده دارای حافظه² و ویژگی‌های موروثی³ فراهم می‌کند و همچنین نسبت به مدل‌های مرتبه کلاسیک درک عمیق‌تری از این سیستم‌ها ارائه می‌دهد [2]، [3].

کنترل سیستم‌های مرتبه کسری در فرآیندهای شیمیایی [4] و توسعه استراتژی‌های بهینه در مدارهای الکتریکی مرتبه کسری [5]، تنها بخشی از کاربردهای گسترده کنترل بهینه کسری در زمینه‌های گوناگون نظیر فیزیک، مهندسی، پردازش سیگنال و زیست‌شناسی است. با توجه به پیچیدگی مسائل کنترل بهینه کسری، روش‌های عددی متنوعی برای حل این مسائل توسعه یافته است. برخی از این روش‌ها عبارتند از: روش تفاضل متناهی⁴ [6]، روش تکراری⁵ [7]، روش هم‌مکانی⁶ [8] و روش طیفی⁷ [9]، [10]. فرمول‌بندی اولیه مسائل کنترل بهینه کسری ابتدا توسط آگراوال⁸ معرفی و یک راه حل عددی برای آنها ارائه گردید [11]. بالنو⁹ و همکاران از تقریب اصلاح شده گرانوالد-لتنیکف¹⁰ و روش تفاضل متناهی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق کسری ریمان-لیوویل¹¹ استفاده کردند [12]. در مرجع [13]، روش هم‌مکانی بسل¹² برای حل مسائل کنترل بهینه کسری خطی و غیرخطی ارائه گردید. یک راه‌کار تکراری برای حل مسائل کنترل بهینه کسری در مرجع [14] معرفی شد. یک روش گسسته سازی شبه‌طیفی زمان-مکان برای حل مسائل کنترل بهینه پخش¹³ با مشتقات کسری دو-وجهی در مرجع [15] ارائه گردید. شمسی و همکاران با بکار بستن فرمول‌های تقریبی انتگرال کسری، یک روش رونوشت مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه کسری غیرخطی گزارش کردند [16]. در

¹ Fractional optimal control

² Memory

³ Hereditary effects

⁴ Finite difference method

⁵ Iteration method

⁶ Collocation method

⁷ Spectral method

⁸ Agrawal

⁹ Baleanu

¹⁰ Modified Grunwald-Letnikov

¹¹ Riemann-Liouville fractional derivative

¹² Bessel collocation method

¹³ Diffusion

¹⁴ Hermite scaling function

¹⁵ Distributed-order time-fractional diffusion equations

¹⁶ Lagrange multipliers

¹⁷ Jacobi polynomials

¹⁸ Jacobi - Gauss - Lobatto integration formula

¹⁹ Ordinary distributed - order fractional optimal control

²⁰ Euler - Lagrange equations

²¹ Jacobi - Gauss - Lobatto interpolation

²² Bernstein wavelets

توزیع شده در حالت ریمان-لیوویل است که در تعریف 2.2 معرفی شده است؛ همچنین تابع $q = q(x, t)$ منبع بیرونی¹، $\mu = \mu(x)$ تابعی معلوم و $\bar{v} = \bar{v}(x, t)$ مقدار مورد انتظار برای تابع وضعیت $v = v(x, t)$ را نشان می‌دهند.

در این مقاله، یک روش مستقیم برای حل مساله (1) معرفی می‌کنیم. به منظور تقریب مشتقات زمان-کسری مرتبه توزیع شده، روش‌های تقریبی گرانیوالد-لنتیکف و L1 را مورد استفاده قرار داده و دو فرمول تقریبی برای مشتق به دست می‌آوریم. همچنین برای گسسته‌سازی مکانی از روش عناصر متناهی تکه‌ای خطی استفاده می‌کنیم. شاخص عملکرد مساله نیز توسط قاعده دوزنقه‌ای مرکب تقریب زده می‌شود. بر این اساس، مساله (1) به یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب² تقلیل می‌یابد که با کمک روش‌های عددی مناسب و کارآمد می‌توان آن را حل کرد. امروزه روش‌های عددی کارآمدی برای حل مسایل بهینه‌سازی و نیز حل دستگاه‌ها وجود دارد که می‌توان از آنها در حل معادلات دیفرانسیل بهره برد [25]، [26].

با توجه به اطلاعات نویسندگان، این بررسی بیان‌گر تلاشی پیش‌گام در حل مسائل کنترل بهینه پخش زمان-کسری توزیع شده بدون نیاز به روش معمول تقریب آن با مسائل کنترل بهینه کسری چند مرتبه‌ای³ است. این دستاورد با معرفی فرمول‌های تقریب ابتکاری بر پایه روش‌های گرانیوالد-لنتیکف و L1 برای مشتقات کسری توزیع شده و ساخت ماتریس‌های عملیاتی نظیر، نیاز به تقریب مساله با مساله چند مرتبه‌ای را برطرف می‌کند. طی این روش مساله کنترل بهینه پخش زمان-کسری توزیع شده به یک مساله بهینه‌سازی اکیدا محدب درجه دو تقلیل می‌یابد که حل آن دارای هیچ‌گونه محاسبات پیچیده و ناپایداری نیست و جواب بهینه سراسری آن با کمک الگوریتم‌های بهینه‌سازی مناسب حاصل می‌گردد.

سازماندهی این مقاله به شرح زیر است: در بخش 2، تعاریف و مقدمات حسابان کسری آورده شده است. در بخش 3، دو فرمول برای تقریب مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل از یک

روش رونوشت مستقیم مبتنی بر تقریب‌های موضعی برای حل مسائل کنترل بهینه کسری مرتبه توزیع شده به‌کار گرفته شد. روش‌های حل مسایل کنترل بهینه را می‌توان به دو دسته کلی روش‌های مستقیم و روش‌های غیرمستقیم تقسیم کرد. در روش‌های غیرمستقیم با استفاده از اصل پونتریاگین، شرایط لازم برای بهینگی جواب مساله به دست آمده و به صورت یک مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای بازنویسی می‌شود. با حل مساله مقدار مرزی به دست آمده، به جواب تقریبی از مساله اصلی دست می‌یابیم. از طرف دیگر، در روش‌های مستقیم با کمک گسسته‌سازی متغیرهای کنترل و وضعیت، مساله اصلی به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود که برای حل آن می‌توان از الگوریتم‌های بهینه‌سازی موجود استفاده کرد. به دلیل مشکلات مربوط به حل دستگاه معادلات حاصل از شرایط لازم بهینگی، در این مقاله از دیدگاه روش‌های مستقیم به تحلیل و بررسی جواب مسایل کنترل بهینه شامل معادلات پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده می‌پردازیم.

هدف ما در این مقاله، یافتن کنترل $u = u(x, t)$ و وضعیت $v = v(x, t)$ است به طوری که معادله پخش زمان-کسری مرتبه توزیع شده:

$${}^{RL}D_t^{\omega(\alpha)} v(x, t) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) = q(x, t) + u(x, t),$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq \tau,$$

(1.1)

با شرایط اولیه

$$v(x, 0) = \mu(x), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq \tau,$$

(ب.1)

و شرایط مرزی

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, 0 \leq t \leq \tau,$$

(ج.1)

برآورده شود و همچنین شاخص عملکرد

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 (v - \bar{v})^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 u^2 dx dt,$$

(د.1)

کمینه گردد. در روابط بالا، ${}^{RL}D_t^{\omega(\alpha)}$ بیان‌گر مشتق کسری

¹ External source

² Convex quadratic programming problem

³ Multi-term

تابع هموار، استخراج می‌شود. در بخش 4، روش پیشنهادی شرح داده می‌شود. همچنین فرم درجه دو مساله برنامه‌ریزی خطی حاصل نیز در این بخش به دست می‌آید. در بخش 5، نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهاد شده بر روی دو مثال، گزارش می‌گردد و در نهایت نتیجه‌گیری کلی در بخش 6 بیان می‌شود.

2. مفاهیمی از حسابان کسری

در این بخش برخی از تعاریف مشتقات کسری را در حالت ریمان-لیوویل با توجه به مراجع [27]-[29] مرور می‌کنیم.

تعریف 1.2. مشتق کسری چپ و راست ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \in (0,1)$ ، از تابع $f(t)$ ، برای $a \leq t \leq b$ ، به ترتیب همانند زیر تعریف می‌گردد:

$${}^R L \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad t > a,$$

و

$${}^R L \mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(s)}{(s-t)^\alpha} ds, \quad t < b.$$

تعریف 2.2. فرض کنید برای $\alpha \in (0,1)$ داشته باشیم $\omega(\alpha) \geq 0$ و $\int_0^1 \omega(\alpha) d\alpha > 0$. در این صورت مشتق کسری مرتبه توزیع شده¹ ریمان-لیوویل چپ و راست از تابع $f(t)$ ، برای $a \leq t \leq b$ ، به ترتیب همانند زیر تعریف می‌شود:

$${}^R L \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) = \int_0^1 \omega(\alpha) {}^R L \mathcal{D}_t^\alpha f(t) d\alpha,$$

و

$${}^R L \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) = \int_0^1 \omega(\alpha) {}^R L \mathcal{D}_t^\alpha f(t) d\alpha.$$

3. فرمول‌های تقریبی برای مشتق کسری مرتبه توزیع

شده چپ ریمان-لیوویل

در این بخش با استفاده از روش گرانوالد-لننیکف (که آن را به اختصار با نماد GL نشان می‌دهیم) و همچنین روش L1، دو

$$t_i = ih, \quad h = \frac{\tau}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

در نظر گرفته می‌شوند. همچنین فرض می‌کنیم $\omega(\alpha)$ نمایان‌گر تابع توزیع² یا تابع وزن³ باشد که در شرایط بیان شده در تعریف 2.2 صدق می‌کند.

1.3. ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه GL

فرمول گرانوالد-لننیکف برای تقریب مشتق کسری به مفهوم ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \in (0,1)$ از تابع به طور کافی هموار $f(t)$ در $t = t_i$ به صورت زیر است [30]، [31]:

$$\left. {}^R L \mathcal{D}_t^\alpha f(t) \right|_{t=t_i} \simeq \sum_{j=0}^i a_j(\alpha) f(t_{i-j}), \quad i = 0, \dots, n, \quad (2)$$

که در آن

$$a_j(\alpha) := \frac{(-1)^j}{h^\alpha} \binom{\alpha}{j} = \frac{(-1)^j}{h^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

در ادامه با استفاده از فرمول (2)، یک فرمول تقریبی برای مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل از تابع $f(t)$ در $t = t_i$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left. {}^R L \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \right|_{t=t_i} &= \int_0^1 \omega(\alpha) \left[\left. {}^R L \mathcal{D}_t^\alpha f(t) \right|_{t=t_i} \right] d\alpha \\ &\simeq \int_0^1 \omega(\alpha) \left[\sum_{j=0}^i a_j(\alpha) f(t_{i-j}) \right] d\alpha \\ &= \sum_{j=0}^i \left[\int_0^1 \omega(\alpha) a_j(\alpha) d\alpha \right] f(t_{i-j}). \end{aligned}$$

اکنون اگر قرار دهیم: $\omega_k^{\text{GL}} := \int_0^1 \omega(\alpha) \frac{(-1)^j}{h^\alpha} \binom{\alpha}{k} d\alpha$ در این

² Distribution function

³ Weight function

¹ Distributed – order fractional derivative

صورت داریم:

که در آن

$$b_k(\alpha) := \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}].$$

در ادامه با استفاده از فرمول (7)، یک فرمول تقریبی برای مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل از تابع $f(t)$ در $t = t_i$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} {}_0^RL\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_i} &= \int_0^1 \omega(\alpha) [{}_0^RL\mathcal{D}_t^\alpha f(t)]_{t=t_i} d\alpha \\ &\simeq \int_0^1 \omega(\alpha) \left[\sum_{j=0}^{i-1} b_{i-j-1}(\alpha) [f(t_{j+1}) - f(t_j)] \right] d\alpha \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} \left[\int_0^1 \omega(\alpha) b_{i-j-1}(\alpha) d\alpha \right] [f(t_{j+1}) - f(t_j)]. \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $\varpi_k^{L1} := \int_0^1 \omega(\alpha) b_{i-j-1}(\alpha) d\alpha$ داریم:

$${}_0^RL\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_i} = \sum_{j=0}^{i-1} \varpi_{i-j-1}^{L1} [f(t_{j+1}) - f(t_j)],$$

$$i = 1, \dots, n. \tag{8}$$

رابطه (8) را فرمول تقریبی بر پایه L1 برای مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل از تابع $f(t)$ در $t = t_i$ برای $i = 0, 1, \dots, n$ در نظر می‌گیریم. فرم ماتریسی (8) به صورت:

$$\hat{\mathbf{f}}^{(\omega)} \simeq \mathbf{D}_{n+1}^{L1} \mathbf{f},$$

بیان می‌شود، که در آن

$$\mathbf{D}_{n+1}^{L1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\varpi_0^{L1} & \varpi_0^{L1} & 0 & \dots & 0 \\ -\varpi_1^{L1} & \varpi_1^{L1} - \varpi_0^{L1} & \varpi_0^{L1} & \dots & 0 \\ -\varpi_2^{L1} & \varpi_2^{L1} - \varpi_1^{L1} & \varpi_1^{L1} - \varpi_0^{L1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\varpi_{n-1}^{L1} & \varpi_{n-1}^{L1} - \varpi_{n-2}^{L1} & \varpi_{n-2}^{L1} - \varpi_{n-3}^{L1} & \dots & \varpi_0^{L1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \varpi_{n-3}^{L1} - \varpi_{n-4}^{L1} & \dots & \varpi_0^{L1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$${}_0^RL\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_i} \simeq \sum_{j=0}^i \varpi_j^{GL} f(t_{i-j}), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{3}$$

برای محاسبه $\varpi_0, \dots, \varpi_n$ می‌توان از قواعد کوادراتوری مناسب یا کدهای انتگرال‌گیری خودکار استفاده کرد.

رابطه (3) را فرمول تقریبی بر پایه GL برای مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل از تابع $f(t)$ در $t = t_i$ برای $i = 0, 1, \dots, n$ در نظر می‌گیریم. اینک با معرفی

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= [f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)]^T, \\ \hat{\mathbf{f}}^{(\omega)} &= [{}_0^RL\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_0}, {}_0^RL\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_1}, \\ &\quad \dots, {}_0^RL\mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} f(t) \Big|_{t=t_n}]^T, \end{aligned} \tag{4}$$

فرم ماتریسی (3) به صورت:

$$\hat{\mathbf{f}}^{(\omega)} \simeq \mathbf{D}_{n+1}^{GL} \mathbf{f}, \tag{5}$$

بیان می‌شود، که در آن

$$\mathbf{D}_{n+1}^{GL} = \begin{bmatrix} \varpi_0^{GL} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varpi_1^{GL} & \varpi_0^{GL} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varpi_2^{GL} & \varpi_1^{GL} & \varpi_0^{GL} & 0 & \dots & 0 \\ \varpi_3^{GL} & \varpi_2^{GL} & \varpi_1^{GL} & \varpi_0^{GL} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varpi_n^{GL} & \varpi_{n-1}^{GL} & \varpi_{n-2}^{GL} & \varpi_{n-3}^{GL} & \dots & \varpi_0^{GL} \end{bmatrix} \tag{6}$$

ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه GL نظیر مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل نامیده می‌شود.

2.3. ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه L1

فرمول L1 برای تقریب مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha \in (0, 1)$ از تابع هموار $f(t)$ با شرط $f(0) = 0$ در $t = t_i$ به صورت زیر است [30]، [31]:

$${}_0^RL\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \Big|_{t=t_i} \simeq \sum_{j=0}^{i-1} b_{i-j-1}(\alpha) [f(t_{j+1}) - f(t_j)],$$

$$i = 1, \dots, n, \tag{7}$$

$$\psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (12)$$

اینک با استفاده از رابطه (11)، توابع کنترل و وضعیت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$v_f(x, t) := \sum_{j=0}^n v_j(t) \psi_j(x) \quad (13)$$

$$u_f(x, t) := \sum_{j=0}^n u_j(t) \psi_j(x) \quad (14)$$

با جایگذاری رابطه‌های (13) و (14) در رابطه (10) و ارزیابی این معادله برای $\psi(x) = \psi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ ، دستگاه خطی شامل $n-1$ معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} {}_0^{RL} \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \sum_{j=0}^n v_j(t) \int_0^1 \psi_j(x) \psi_i(x) dx \\ + \sum_{j=0}^n v_j(t) \int_0^1 \frac{d\psi_j}{dx} \frac{d\psi_i}{dx} dx \\ = \int_0^1 q(x, t) \psi_i(x) dx \\ + \sum_{j=0}^n u_j(t) \int_0^1 \psi_j(x) \psi_i(x) dx, \\ i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (15)$$

با تعریف

$$\mathbf{v}(t) := [v_0(t), v_1(t), \dots, v_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{u}(t) := [u_0(t), u_1(t), \dots, u_n(t)]^T,$$

فرم ماتریسی دستگاه معادلات (15) به صورت:

$$\mathbf{M}_f {}_0^{RL} \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \mathbf{v}(t) + \mathbf{N}_f \mathbf{v}(t) - \mathbf{M}_f \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_f(t), \quad t \in (0, \tau) \quad (16)$$

بیان می‌شود که در آن $\mathbf{M}_f, \mathbf{N}_f \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n+1)}$ و $\mathbf{q}_f(t) \in \mathbb{R}^{(n-1)}$ به ترتیب، با استفاده از روابط زیر حاصل می‌شوند:

ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه L1 نظیر مشتق کسری مرتبه توزیع شده ریمان-لیوویل نامیده می‌شود.

4. روش پیشنهادی

در این بخش، روش پیشنهادی برای گسسته‌سازی مساله را در دو مرحله ارائه می‌دهیم. به‌علاوه فرم ماتریسی مساله برنامه‌ریزی درجه دو حاصل از گسسته‌سازی مساله را به دست می‌آوریم.

1.4. گسسته‌سازی نسبت به پارامتر مکان

در این قسمت روش عناصر منتهای تکه‌ای خطی را برای گسسته‌سازی مساله (1) نسبت به پارامتر مکان شرح می‌دهیم. برای این منظور، ابتدا طرفین رابطه (1.1) را در تابع هموار $\psi(x)$ صادق در شرایط $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ضرب می‌کنیم. سپس با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه روی بازه $[0, 1]$ و بکار بردن انتگرال‌گیری جز به جز به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} {}_0^{RL} \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \int_0^1 v(x, t) \psi(x) dx + \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{d\psi}{dx} dx \\ = \int_0^1 q(x, t) \psi(x) dx \\ + \int_0^1 u(x, t) \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

با تقسیم‌بندی دامنه فضایی $[0, 1]$ به n زیربازه به صورت

$$x_i = ih_x, \quad h_x = \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

برای هر $i = 0, 1, \dots, n$ تابع تکه‌ای خطی (کلاهی) $\psi_i(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - (i-1)h_x}{h_x} & (i-1)h_x \leq x \leq ih_x \\ \frac{-x + (i+1)h_x}{h_x} & ih_x \leq x \leq (i+1)h_x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

توجه کنید که این تابع در شرایط دلتای کرونکر صدق می‌کند، به عبارتی:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\tau [\mathbf{v}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}(t) - 2\bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{W}^x \bar{\mathbf{v}}(t)] dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau [\mathbf{u}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{u}(t)] dt, \quad (20)$$

اکنون با در نظر گرفتن روابط (16)-(20)، مساله (1) به مساله کنترل بهینه شامل دستگاه معادلات زمان-کسری توزیع شده زیر تبدیل می‌شود:

$$\min J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\tau [\mathbf{v}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}(t) - 2\bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}(t) + \bar{\mathbf{v}}(t)^T \mathbf{W}^x \bar{\mathbf{v}}(t)] dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau [\mathbf{u}(t)^T \mathbf{W}^x \mathbf{u}(t)] dt, \quad (\bar{1}.21)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{M}_f {}^R L \mathcal{D}_t^{\omega(\alpha)} \mathbf{v}(t) + \mathbf{N}_f \mathbf{v}(t) - \mathbf{M}_f \mathbf{u}(t) = \mathbf{q}_f(t), \quad t \in (0, \tau) \quad (ب.21)$$

$$\mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\mu}, \quad (ج.21)$$

$$\mathbf{Cv}(t) = \mathbf{0}, \quad (د.21)$$

که در آن ماتریس‌های \mathbf{M}_f و \mathbf{N}_f به صورت:

$$\mathbf{M}_f = \frac{h_x}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_f = \frac{1}{h_x} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

و بردار $\mathbf{q}_f(t)$ همانند

$$\mathbf{q}_f(t) = h_x [q(x_1, t), q(x_2, t), \dots, q(x_{n-1}, t)]^T$$

به دست می‌آیند.

$$(\mathbf{M}_f)_{ij} = \int_0^1 \psi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$(\mathbf{N}_f)_{ij} = \int_0^1 \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

$$(\mathbf{q}_f(t))_i = \int_0^1 q(x, t) \psi_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

توجه کنید که با کمک قاعده دوزنقه‌ای مرکب، به دست می‌آوریم:

$$(\mathbf{q}_f(t))_i = h_x q(ih_x, t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

با در نظر گرفتن نقاط گره‌ای مکانی، شرایط اولیه (1.ب) به صورت زیر گسسته می‌شوند:

$$\mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\mu} = [\mu(x_0), \mu(x_1), \dots, \mu(x_n)]^T. \quad (17)$$

به صورت مشابه، شرایط مرزی (1.ج) نیز به صورت:

$$\mathbf{Cv}(t) = \mathbf{0} \quad (18)$$

گسسته می‌شوند که $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times (n+1)}$ و برابر است با:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

همچنین با جایگذاری رابطه‌های (13) و (14) در رابطه (1.ا) و سپس استفاده از قاعده دوزنقه‌ای مرکب و با در نظر گرفتن ویژگی (12)، شاخص عملکرد مساله به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$J(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \left[\sum_{i=0}^n w_i^x (v_i(t) - \bar{v}_i(t))^2 \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left[\sum_{i=0}^n w_i^x u_i^2(t) \right] dt, \quad (19)$$

که در آن

$$w_0^x = \frac{h_x}{2}, w_1^x = h_x, \dots, w_{n-1}^x = h_x, w_n^x = \frac{h_x}{2}.$$

با تعریف

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = [\bar{v}_0(t), \bar{v}_1(t), \dots, \bar{v}_n(t)]^T,$$

$$\mathbf{W}^x = \text{diag}[w_0^x, w_1^x, \dots, w_n^x],$$

رابطه (19) به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می‌گردد:

2.4. گسسته‌سازی نسبت به پارامتر زمان

در این قسمت با تقسیم‌بندی بازه زمانی $[0, \tau]$ به m زیربازه نظیر $[t_j, t_{j+1}]$ که در آن نقاط گره‌ای به صورت:

$$t_j = jh_t, \quad h_t = \frac{\tau}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

در نظر گرفته می‌شوند، روش هم‌مکانی را برای مساله (21) شرح می‌دهیم. با ارزیابی معادلات دینامیکی (21ب) در این نقاط داریم:

$$M_f {}^{RL}D_t^{\omega(\alpha)} \mathbf{v}(t)|_{t=t_j} + N_f \mathbf{v}_j - M_f \mathbf{u}_j = \mathbf{q}_f(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (22)$$

که در آن $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}(t_j)$ و $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}(t_j)$ همچنین شاخص عملکرد (21آ)، با استفاده از قاعده دوزنقه‌ای مرکب، همانند زیر بیان می‌شود:

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m w_j^t [\mathbf{v}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}_j - 2\bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}_j + \bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{W}^x \bar{\mathbf{v}}_j] + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m w_j^t [\mathbf{u}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{u}_j], \quad (23)$$

که در آن

$$w_0^t = \frac{h_t}{2}, w_1^t = h_t, \dots, w_{n-1}^t = h_t, w_n^t = \frac{h_t}{2}.$$

سرانجام با محاسبه شرایط مرزی (21د) در $m+1$ نقطه هم‌مکانی $t_j, j = 0, 1, \dots, m$ ، و در نظر گرفتن روابط (22) و (23)، مساله (21) به مساله بهینه‌سازی زیر رونوشت می‌گردد:

$$\text{Min } J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m w_j^t [\mathbf{v}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}_j - 2\bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{v}_j + \bar{\mathbf{v}}_j^T \mathbf{W}^x \bar{\mathbf{v}}_j] + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^m w_j^t [\mathbf{u}_j^T \mathbf{W}^x \mathbf{u}_j], \quad (124)$$

$$\text{s. t. } M_f {}^{RL}D_t^{\omega(\alpha)} \mathbf{v}(t)|_{t=t_j} + N_f \mathbf{v}_j - M_f \mathbf{u}_j = \mathbf{q}_f(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (24\text{ب})$$

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\mu}, \quad (24\text{ج})$$

$$\mathbf{Cv}_j = \mathbf{0}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (24\text{د})$$

مساله بهینه‌سازی حاصل، دارای تابع هدف درجه دو و محدودیت‌های خطی است، بنابراین در رده مسائل برنامه‌ریزی درجه دو¹ قرار می‌گیرد که برای حل آن می‌توان الگوریتم‌های بهینه‌سازی درجه دو را به صورت موثر و کارا بکار برد.

3.4. فرم ماتریسی مساله برنامه‌ریزی درجه دو

برای تعیین فرم ماتریسی مساله برنامه‌ریزی درجه دو به دست آمده در رابطه (24)، قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{V} = \text{vec}([\mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_m]^T),$$

$$\mathbf{U} = \text{vec}([\mathbf{u}_0 \quad \mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m]^T),$$

$$\bar{\mathbf{V}} = \text{vec}([\bar{\mathbf{v}}_0 \quad \bar{\mathbf{v}}_1 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{v}}_m]^T),$$

$$\mathbf{Q} = \text{vec}([\mathbf{q}_f(t_0) \quad \mathbf{q}_f(t_1) \quad \dots \quad \mathbf{q}_f(t_m)]^T),$$

که در آن منظور از نماد vec ، عملگر بردارسازی² است. لازم به توضیح است که حاصل عمل vec بر روی ماتریس مربعی \mathbf{A} عبارت است از برداری که از زیر هم قرار دادن ستون‌های ماتریس \mathbf{A} به دست می‌آید. اکنون با تعریف بردار متغیرهای تصمیم به صورت $\mathbf{Z} := [\mathbf{V}^T, \mathbf{U}^T]^T$ و استفاده از نمادگذاری‌های بالا، تابع هدف (24آ) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J_{n,m}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{H} \mathbf{Z} + \mathbf{f}^T \mathbf{Z} + \mathbf{f}_0, \quad (25)$$

که در آن

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}^x \otimes \mathbf{W}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^x \otimes \mathbf{W}^t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} = - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}}^T (\mathbf{W}^x \otimes \mathbf{W}^t) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$f_0 = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{V}}^T (\mathbf{W}^x \otimes \mathbf{W}^t) \bar{\mathbf{V}},$$

در این جا $\mathbf{W}^t := \text{diag}[w_0^t, w_1^t, \dots, w_m^t]$ و همچنین نماد \otimes بیانگر ضرب کرونگر³ است.

معادلات دینامیک (24ب) در شکل ماتریسی (26) فرمول‌بندی می‌شوند.

¹ Quadratic programming problem

² Vectorization operator

³ Kronecker product

این ویژگی تضمین می‌کند که مساله برنامه‌ریزی (29) اکیدا محدب است و لذا دارای کمینه سراسری یکتاست. بنابراین الگوریتم‌های کارایی نظیر الگوریتم نقطه-درونی محدب⁴ می‌تواند برای حل آن بکار رود.

5. نتایج عددی

در این بخش کارایی روش پیشنهاد شده در بخش 4 را با اعمال آن بر دو مثال و گزارش نتایج عددی نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که مدل‌سازی مثال‌ها در محیط نرم‌افزار متلب⁵ صورت گرفته است و همچنین برای حل مساله بهینه‌سازی درجه دو حاصل، دستور quadprog را بکار برده‌ایم.

مثال 1: مساله (1) را در نظر می‌گیریم که در آن [22]:

$$v_{ex}(x, t) = \sin(\pi t) \sin(\pi x),$$

$$u_{ex}(x, t) = 0,$$

$$\bar{v}(x, t) = \sin(\pi t) \sin(\pi x)$$

$$q(x, t) = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi x) \sum_{k=0}^{\infty} \left[((i\pi t)^k + (-i\pi t)^k) \int_0^1 \omega(\alpha) \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(k+2-\alpha)} d\alpha \right] + \pi^2 \sin(\pi t) \sin(\pi x).$$

روش ارائه شده را بر این مثال با $\omega(\alpha) = 5^\alpha$ بکار بردیم. در شکل (1)، نمودار جواب‌های تقریبی برای $v(x, t)$ و $u(x, t)$ حاصل از روش مستقیم مبتنی بر L1 برای $n = m = 50$ به همراه نمودار جواب‌های دقیق و نمودار تابع خطا رسم شده است. در جدول (1)، خطای به دست آمده از جواب‌های تقریبی برای $v(x, t)$ ، $u(x, t)$ و J حاصل از روش‌های مبتنی بر GL و L1 همراه با زمان محاسبات (CPU) هر روش به ازای مقادیر مختلف n و m گزارش شده است. زمان محاسبات بر حسب ثانیه است. نمودار متناظر با جدول (1) در مقیاس نیم-لگاریتمی⁶ لگاریتمی⁶ در شکل (2)، آورده شده است. دقت شود که برای محاسبه خطا در دو مثال از نرم جذر میانگین مربعات⁷ استفاده

$$\begin{aligned} & ((\mathbf{M}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1})(\mathbf{I}_{n+1} \otimes \mathbf{D}_{m+1}) \\ & + (\mathbf{N}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1})) \mathbf{V} \\ & - (\mathbf{M}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \mathbf{U} = \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن \mathbf{D}_{m+1} ماتریس عملیاتی مشتق بر پایه GL یا L1 است که در بخش 3 معرفی شد. محدودیت‌های (24.ج) و (24.د) نیز می‌توانند همانند زیر بیان شوند:

$$(\mathbf{I}_{n+1} \otimes \mathbf{E}) \mathbf{V} = (\boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{b}) \quad (27)$$

$$(\mathbf{C} \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad (28)$$

که در آن

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1 \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = [1 \mid \mathbf{0}_{1 \times m}]^T.$$

با در نظر گرفتن معادلات (25)-(28)، شکل ماتریسی مساله برنامه‌ریزی درجه دو به دست آمده در رابطه (24) همانند زیر بیان می‌شود:

$$\min J_{n,m}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{2} \mathbf{Z}^T \mathbf{H} \mathbf{Z} + \mathbf{f}^T \mathbf{Z} + \mathbf{f}_0, \quad (29)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{A} \mathbf{Z} = \mathbf{h},$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ((\mathbf{M}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1})(\mathbf{I}_{n+1} \otimes \mathbf{D}_{m+1}) + (\mathbf{N}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1})) \\ (\mathbf{I}_{n+1} \otimes \mathbf{E}) \\ (\mathbf{C} \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \\ -(\mathbf{M}_f \otimes \mathbf{I}_{m+1}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

ماتریس \mathbf{A} در مساله برنامه‌ریزی (29) دارای ساختار خلوت (تنک) است. از دیدگاه بهینه‌سازی این ویژگی (خلوت بودن ماتریس \mathbf{A}) بسیار سودمند است، زیرا به طور قابل توجهی پیچیدگی محاسباتی را کاهش داده و آن را برای حل کارآمدتر می‌سازد. به خصوص در مسائلی با مقیاس بزرگ، این ویژگی دارای اهمیت بیشتری است. به علاوه، از آنجایی که عناصر روی قطر ماتریس هسین \mathbf{H} نتیجه حاصل ضرب وزن‌های انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای مرکب هستند و این وزن‌های انتگرال‌گیری همواره مثبت هستند، ماتریس \mathbf{H} یک ماتریس قطری با عناصر مثبت و بنابراین یک ماتریس معین مثبت است.

⁴ Convex interior-point

⁵ Matlab software

⁶ Semi-log scale

⁷ Root mean squared

کردیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q(x, t) = \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \frac{t^{\frac{3}{2}}(t-1)(x^2-x)}{\ln(t)} - 2t^{\frac{5}{2}} - u(x, t).$$

روش ارائه شده را بر روی این مثال با $\omega(\alpha) = \Gamma\left(\frac{7}{2} - \alpha\right)$ بکار بردیم. در شکل (3)، نمودار جواب‌های تقریبی برای $v(x, t)$ و $u(x, t)$ حاصل از روش مبتنی بر L1 برای $n = m = 50$ به همراه نمودار جواب‌های دقیق و نمودار تابع خطا، رسم شده است. در جدول (2)، خطای به دست آمده از جواب‌های تقریبی برای $v(x, t)$ ، $u(x, t)$ و J حاصل از روش‌های مبتنی بر GL و L1 همراه با زمان محاسبات (CPU) هر روش به ازای مقادیر مختلف n و m گزارش شده است. زمان محاسبات بر حسب ثانیه است. همچنین نمودار متناظر با جدول (2) در مقیاس نیم-لگاریتمی، در شکل (4) ارائه شده است.

از شکل‌های (1) و (3)، مشخص است که توابع وضعیت و کنترل تقریبی حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و L1 با جواب‌های دقیق داده شده در هماهنگی و سازگاری بسیار خوبی هستند. با دقت در جداول (1) و (2)، درمی‌یابیم هر دو روش دارای دقت مرتبه یک هستند که این موضوع با تئوری سازگار است؛ همچنین زمان محاسبات هر دو روش کم و تقریباً یکسان است. از نمودارهای (2) و (4)، مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد نقاط گره‌ای، خطاهای عددی به سرعت کاهش می‌یابند و این بدان مفهوم است که جواب‌های تقریبی به جواب‌های واقعی همگرا می‌شوند.

$$E_{nm}(v) = \left(\frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left(v(x_i, t_j) - v_{ex}(x_i, t_j) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$E_{nm}(u) = \left(\frac{1}{(n+1)(m+1)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left(u(x_i, t_j) - u_{ex}(x_i, t_j) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

که در آن $v(x_i, t_j)$ و $u(x_i, t_j)$ به ترتیب بیانگر مقادیر تقریبی توابع وضعیت و کنترل در نقطه $(x_i, t_j) = (x, t)$ و $v_{ex}(x_i, t_j)$ و $u_{ex}(x_i, t_j)$ به ترتیب بیانگر مقادیر دقیق توابع وضعیت و کنترل در نقطه $(x_i, t_j) = (x, t)$ هستند.

مثال 2: مساله (1) را در نظر می‌گیریم که در آن:

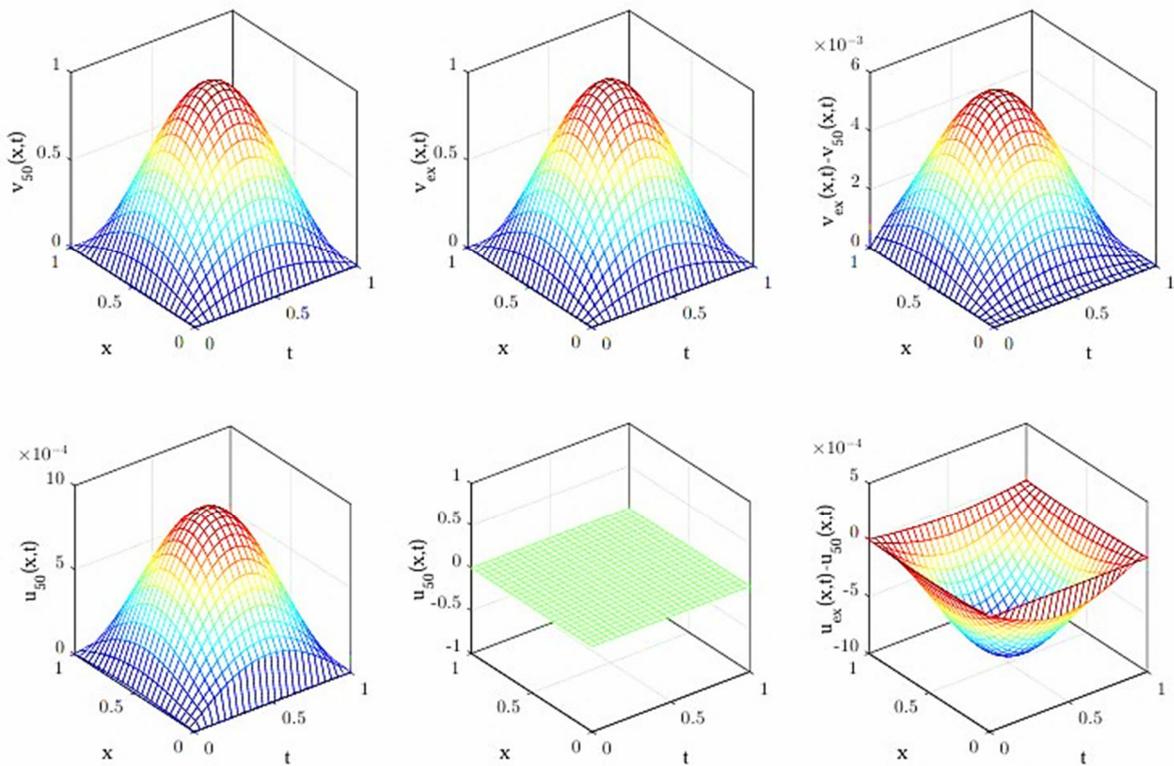
$$v_{ex}(x, t) = t^{\frac{5}{2}}(x^2 - x),$$

$$u_{ex}(x, t) = x^2(1-x^2)(1-t)e^{1-t},$$

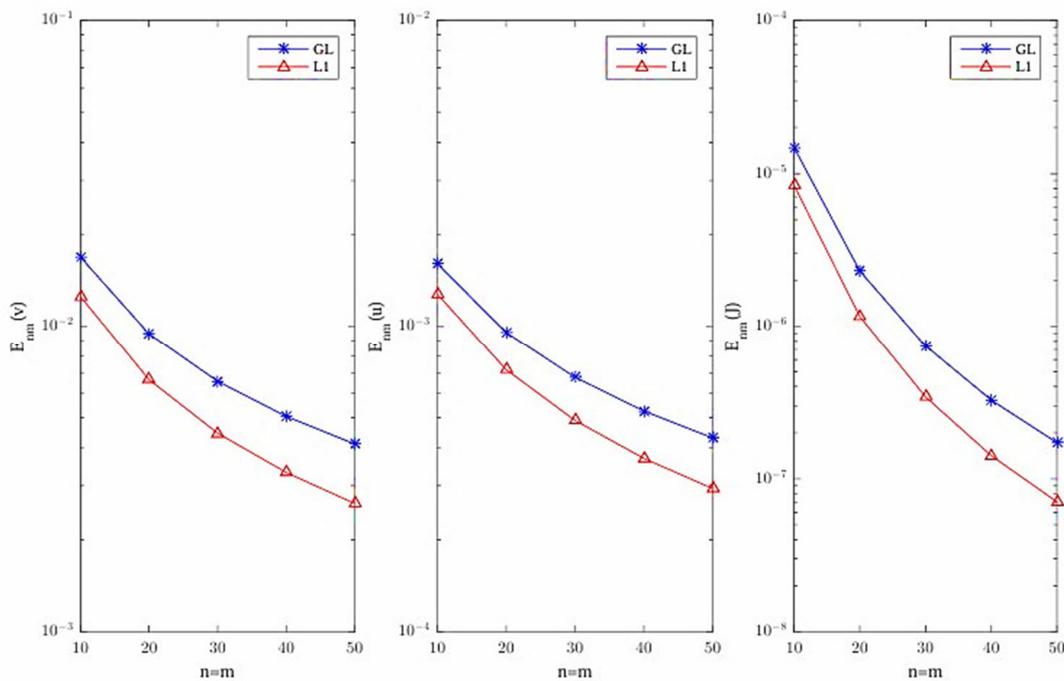
$$\bar{v}(x, t) = x^2(1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) \left[\int_0^1 w(\alpha) \frac{(1-t)^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k+2-\alpha)} d\alpha \right] + (12x^2 - 2)(1-t)e^{1-t} + v(x, t),$$

جدول (1): (مثال 1 با $\omega(\alpha) = 5^\alpha$)، خطاهای $E_{nm}(v)$ ، $E_{nm}(u)$ و $E_{nm}(J)$ و زمان محاسبات CPU حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و L1 به ازای مقادیر مختلف $n = m$.

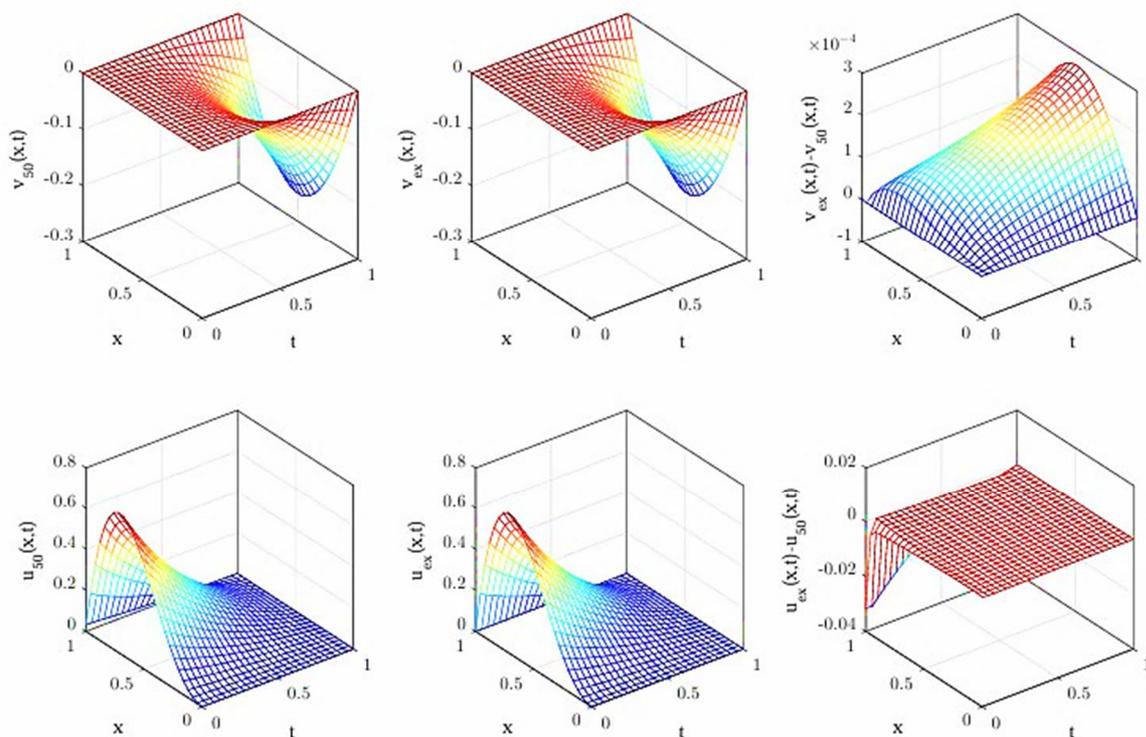
$n = m$	روش مستقیم مبتنی بر GL				روش مستقیم مبتنی بر L1			
	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(u)$	$E_{nm}(J)$	CPU	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(u)$	$E_{nm}(v)$	CPU
10	1.68e-2	1.60e-3	1.47e-5	2.31	1.25e-2	1.27e-3	8.37e-6	2.39
20	9.45e-3	9.55e-4	2.30e-6	6.97	6.66e-3	7.19e-4	1.16e-6	7.06
30	6.58e-3	6.78e-4	7.41e-7	14.79	4.45e-3	4.90e-4	3.42e-7	14.90
40	5.05e-3	5.266e-4	3.26e-7	25.94	3.31e-3	3.68e-4	1.41e-7	25.93
50	4.10e-3	4.29e-4	1.71e-7	40.31	2.62e-3	2.93e-4	7.05e-8	40.31



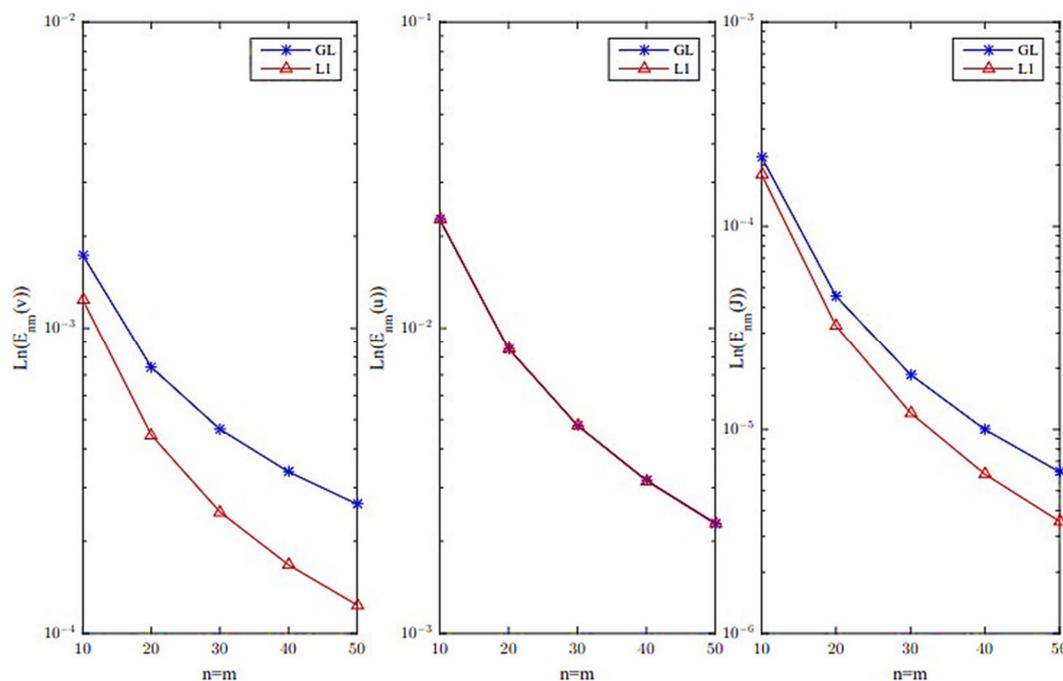
شکل (1): (مثال 1 با $\omega(\alpha) = 5^\alpha$)، نمودار جواب‌های تقریبی به دست آمده از روش مستقیم مبتنی بر L1 برای $n = m = 50$ ، به همراه نمودار جواب‌های دقیق و نمودار توابع خطا.



شکل (2): (مثال 1 با $\omega(\alpha) = 5^\alpha$)، نمودار لگاریتم خطاهای $E_{nm}(J)$ و $E_{nm}(u)$ و $E_{nm}(v)$ حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و L1 به ازای مقادیر مختلف $n = m$.



شکل (3): (مثال 2 با $\omega(\alpha) = \Gamma(\frac{7}{2} - \alpha)$)، نمودار جواب‌های تقریبی به دست آمده از روش مستقیم مبتنی بر L1، برای $n = m = 50$ ، به همراه نمودار جواب‌های دقیق و نمودار توابع خطا.



شکل (4): (مثال 2 با $\omega(\alpha) = \Gamma(\frac{7}{2} - \alpha)$)، نمودار لگاریتم خطاهای $E_{nm}(v)$ ، $E_{nm}(u)$ و $E_{nm}(J)$ حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر L1 و GL به ازای مقادیر مختلف $n = m$.

جدول (2): (مثال 2 با $\omega(\alpha) = \Gamma(\frac{7}{2} - \alpha)$)، خطاهای $E_{nm}(v)$ ، $E_{nm}(u)$ و $E_{nm}(J)$ و زمان محاسبات CPU حاصل از روش‌های مستقیم مبتنی بر GL و L1 به ازای مقادیر مختلف $n = m$.

$n = m$	روش مستقیم مبتنی بر GL				روش مستقیم مبتنی بر L1			
	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(u)$	$E_{nm}(J)$	CPU	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(v)$	$E_{nm}(v)$	CPU
10	$1.73e-3$	$2.26e-2$	$2.18e-4$	2.48	$1.23e-3$	$2.27e-2$	$1.79e-4$	2.39
20	$7.41e-4$	$8.53e-3$	$4.54e-5$	7.13	$4.44e-4$	$8.54e-3$	$3.24e-5$	7.14
30	$4.65e-4$	$4.78e-3$	$1.85e-5$	14.99	$2.49e-4$	$4.78e-3$	$1.20e-5$	15.13
40	$3.37e-4$	$3.16e-3$	$9.97e-6$	26.36	$1.67e-4$	$3.15e-3$	$6.03e-6$	26.44
50	$2.64e-4$	$2.29e-3$	$6.19e-6$	40.95	$1.23e-4$	$2.27e-3$	$3.54e-6$	40.86

6. نتیجه گیری

پیشنهادی، دو مثال ارائه کردیم. با نگاهی به نمودارها و جدول خطاها به این موضوع پی می‌بریم که جواب‌های تقریبی در هماهنگی بسیار خوبی با جواب‌های دقیق مساله هستند و نتایج عددی دو روش تقریباً یکسان است. به علاوه، با کمک نتایج عددی می‌توان دریافت که در متغیرهای حالت و کنترل به ترتیب به دقت مطلق از مرتبه‌های $1e-4$ و $1e-2$ خواهیم رسید. با توجه به اینکه گسسته‌سازی‌ها در روش ارایه شده از نوع موضعی است، این دقت معقول و مناسب است. روش ارائه شده به سادگی قابل اجراست و نیازی به محاسبات پیچیده ندارد و می‌توان آن را برای حل رده وسیعی از مسائل بکار برد.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافی ندارند.

در این مقاله، مسائل کنترل بهینه‌ای را مورد بررسی قرار دادیم که دینامیک آنها توسط معادلات پنخس زمان-کسری مرتبه توزیع شده توصیف می‌شود. یک روش مستقیم برای حل این مسائل معرفی کردیم. به منظور تقریب مشتقات زمان-کسری مرتبه توزیع شده، روش‌های تقریبی گرانوالد-لتنیکف و L1 را مورد استفاده قرار داده و دو فرمول تقریبی برای مشتق به دست آوردیم. همچنین برای گسسته‌سازی مکانی از روش عناصر منتهای تکه‌ای خطی استفاده کردیم. شاخص عملکرد نیز با انتخاب کوادراتور مناسب نظیر قاعده دوزنقه‌ای مرکب، گسسته شد. به این ترتیب، مساله اصلی به یک مساله بهینه‌سازی درجه دو اکیدا محدب تقلیل یافت که برای حل آن می‌توان از الگوریتم‌های کارایی بهینه‌سازی استفاده کرد. برای اثبات دقت و کارایی روش

مراجع

- [1] D.E. Kirk, Optimal Control Theory: An Introduction. New York, NY, USA: Dover Publications, 2004.
- [2] A. Padder, S. Almutairi, S. Qureshi, A. Afroz, E. Hincal, and A. Tassaddiq, "Dynamical analysis of generalized tumor model with caputo fractional-order derivative," Fractal Fract., vol. 7, no. 3, pp. 1-19, 2023, doi: 10.3390/fractalfract7030258.
- [3] N.P. Dong, H.V. Long, and A. Khastan, "Optimal control of a fractional order model for granular SEIR epidemic with uncertainty," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., vol. 88, pp. 1-32, 2020, doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105312.
- [4] G. Saikumar, K.K. Sahu, and P. Saha, "Design of fractional Order IMC for nonlinear chemical processes with time delay," Int. J. Dyn. Control, vol. 11, pp. 1797-1807, 2023, doi: 10.1007/s40435-022-01087-0.
- [5] S. Safiullah, A. Rahman, and S. A. Lone, "Optimal control of electrical vehicle incorporated hybrid power system with second order fractional-active disturbance rejection controller," Optim. Control Appl. Methods, vol. 44, no. 3, pp. 905-934, 2021, doi: 10.1002/oca.2826.
- [6] U.L. Ihtisham, A. Nigar, and K. S. Nisar, "An optimal control strategy and Grunwald-Letnikov finite-difference numerical scheme for fractional-order COVID-19 model," Math. Model. Numer. Simul. Appl., vol. 2, no. 2, pp. 108-116, 2022, doi: 10.53391/mmnsa.2022.009.
- [7] A. Jajarmi and D. Baleanu, "On the fractional optimal control problem with a general derivative operator,"

- Asian J. Control, vol. 23, no. 2, pp. 1062-1071, 2021, doi: 10.1002/asjc.2282.
- [8] S.A. Yousefi, A. Lotfi, and M. Dehghan, "The use of a Legendre multiwavelet collocation method for solving the fractional optimal control problems," J. Vib. Control, vol. 17, no. 13, pp. 2058-2065, 2011, doi: 10.1177/1077546311399950.
- [9] A. Nemati, "Numerical solution of 2D fractional optimal control problems by the spectral method along with Bernstein operational matrix," Int. J. Control, vol. 91, no. 10, pp. 1-19, 2018, doi: 10.1080/00207179.2017.1334267.
- [10] S. Li and Z. Zhou, "Legendre pseudo-spectral method for optimal control problem governed by a time-fractional diffusion equation," Int. J. Comput. Math., vol. 95, no. 6-7, pp. 1308-1325, 2018, doi: 10.1080/00207160.2017.1417591.
- [11] O.P. Agrawal, "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems," Nonlinear Dyn., vol. 38, pp. 323-337, 2004, doi: 10.1007/s11071-004-3764-6.
- [12] D. Baleanu, O. Defterli, and O.P. Agrawal, "A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems," J. Vib. Control, vol. 15, no. 4, pp. 583-597, 2009, doi: 10.1177/1077546308088565.
- [13] E. Tohidi and H.S. Nik, "A Bessel collocation method for solving fractional optimal control problems," Appl. Math. Model., vol. 39, no. 2, pp. 455-465, 2015, doi: 10.1016/j.apm.2014.06.003.
- [14] A. Alizadeh and S. Effati, "An iterative approach for solving fractional optimal control problems," J. Vib. Control, vol. 24, no. 1, pp. 18-36, 2018, doi: 10.1177/1077546316633391.
- [15] A. Mushtaq, M. Shamsi, H. Khosravianian-Areb, D.F. Torres, and F. Bozorgnia, "A space-time pseudospectral discretization method for solving diffusion optimal control problems with two-sides fractional derivatives," J. Vib. Control, vol. 25, no. 1, pp. 1-16, 2018, doi: 10.1177/1077546318811194.
- [16] A.B. Salati, M. Shamsi, and D.F. Torres, "Direct transcription methods based on fractional integral approximation formulas for solving nonlinear fractional optimal control problems," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., vol. 67, pp. 334-350, 2019, doi: 10.1016/j.cnsns.2018.05.011.
- [17] N. Kumar and M. Mehra, "Legendre wavelet collocation method for fractional optimal control problems with fractional Bolza cost," Numer. Methods Partial Differ. Equ., vol. 37, no. 1, pp. 1-32, 2021, doi: 10.1002/num.22604.
- [18] L. Liu, L. Feng, Q. Xu, L. Zheng, and F. Liu, "Flow and heat transfer of generalized Maxwell fluid over a moving plate with distributed order time fractional constitutive models," Int. Commun. Heat Mass Transfer, vol. 116, pp. 1-8, 2020, doi: 10.1016/j.icheatmasstransfer.2020.104679.
- [19] H.V. Park, J. Choe, and J.M. Kang, "Pressure behavior of transport in fractal porous media using a fractional calculus approach," Energy Sources, vol. 22, no. 10, pp. 881-890, 2000, doi: 10.1080/00908310051128237.
- [20] K. Diethelm and N.J. Ford, "Numerical analysis for distributed-order differential equations," J. Comput. Appl. Math., vol. 225, no. 1, pp. 96-104, 2009, doi: 10.1016/j.cam.2008.07.018.
- [21] M.A. Zaky, "A Legendre collocation method for distributed-order fractional optimal control problems," Nonlinear Dyn., vol. 91, no. 4, pp. 2667-2681, 2018, doi: 10.1007/s11071-017-4038-4.
- [22] M.A. Zaky and J.A. Machado, "On the formulation and numerical simulation of distributed-order fractional optimal control problems," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., vol. 52, pp. 177-189, 2017, doi: 10.1016/j.cnsns.2017.04.026.
- [23] P. Rahimkhani and Y. Ordokhani, "Numerical investigation of distributed-order fractional optimal control problems via Bernstein wavelets," Optim. Control Appl. Methods, vol. 42, no. 2, pp. 355-373, 2021, doi: 10.1002/oca.2679.
- [24] R. Vaziri Doghezlou, H.R. Tabrizidooz, and M. Shamsi, "A direct transcription method for solving distributed-order fractional optimal control problems," J. Vib. Control, 2024, doi: 10.1177/10775463241238578.
- [25] M. Bisheh Niasar and A. Mahdipour, "An adaptive mesh hybrid block method for solving nonlinear singularly perturbed differential equations," Soft Comput. J., vol. 11, no. 1, pp. 140-150, 2022, doi: 10.22052/scj.2023.248415.1105 [In Persian].
- [26] H.R. Tabrizidooz and F. Hajiramezanali, "A numerical algorithm for determining time-dependent coefficient in a parabolic inverse problem using Legendre multiwavelet base," Soft Comput. J., vol. 10, no. 2, pp. 110-123, 2022, doi: 10.22052/scj.2022.243311.1028 [In Persian].
- [27] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2006.
- [28] I. Podlubny, Fractional Differential Equations. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 1999.
- [29] Y. Chen and I. Podlubny, Distributed-Order Dynamic System: Stability, Simulation, Applications and Perspectives. London, UK: Springer, 2012.
- [30] C. Li and F. Zeng, Numerical Methods for Fractional Calculus. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2015.
- [31] C. Li and M. Cai, Theory and Numerical Approximations of Fractional Integrals and Derivatives. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2019.