



دانشگاه کاشان
University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



جواب‌های مدل ریاضی عملکرد کبد انسان با داده‌های فازی تحت مفهوم مشتق‌پذیری هاگوهاری

توسعه یافته

مهران چه‌لایی^{1*}، استادیار

¹ گروه علوم پایه، واحد سوادکوه، دانشگاه آزاد اسلامی، سوادکوه، ایران.

چکیده

یک مدل ریاضی ساده از عملکرد کبد انسان، دستگاهی خطی متشکل از دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. از آنجا که داده‌های آزمایشگاهی و مقادیر بالینی از روی اندازه‌گیری و سنجش ثبت می‌شوند، از ویژگی عدم قطعیت و نادقیقی برخوردارند. لحاظ نمودن عدم قطعیت داده‌ها، منجر به تولید نتایج با کیفیت بیشتر می‌شود. منطق فازی یک ابزار توانا جهت برخورد با عدم قطعیت است که امکان مشاهده اثرات عدم قطعیت داده‌ها، در فرآیند حل مساله را فراهم می‌کند. در این مقاله، به مطالعه نظری و یافتن جواب‌های مدل مذکور همراه با داده‌های فازی، می‌پردازیم. برای این منظور، از مفهوم مشتق هاگوهاری توسعه‌یافته مربوط به تابع‌های فازی مقدار، استفاده می‌کنیم. ابتدا به تحلیل فرآیند حل مساله در حالت کاملاً فازی، می‌پردازیم و شرایط کافی وجود جواب یکتا را به دست می‌آوریم. سپس، مساله را در دو حالت خاص مجزا، مورد مطالعه قرار می‌دهیم: (1) حالتی که ضرایب اعداد حقیقی باشند و مقدار اولیه فازی باشد و (2) حالتی که ضرایب اعداد فازی مثلثی متقارن و هم پهنا باشند و مقدار اولیه، عددی حقیقی باشد. در هر دو حالت، فرمول‌های جواب را به دست می‌آوریم و در انتها، با ارائه دو مثال، به تشریح و بکارگیری عملی نتایج، می‌پردازیم.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت 28 آذر ماه 1402

پذیرش 4 اسفند ماه 1402

کلمات کلیدی:

اعداد فازی

تابع‌های فازی مقدار

معادلات دیفرانسیل فازی

مشتق‌پذیری هاگوهاری توسعه‌یافته

© 1402 نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

1. مقدمه

ریاضی تولید شده، داده‌ها و اطلاعات، مبهم، نامطمئن و نادقیق باشند، آنگاه نظریه مجموعه‌های فازی به طور معمول برای تحلیل آن مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد [4] - [7]. بررسی و تحلیل عملکرد بخش‌های مختلف بدن انسان، یکی از موضوعات جالب و مورد توجه محققان است. یکی از این مدل‌های ریاضی، مدل ریاضی مربوط به عملکرد کبد انسان است که بر اساس نتایج به دست آمده از تست بروموسولفالتین (BSP) تولید می‌شود. این مدل در مرجع [8]، در قالب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی، به صورت مدل (1) ارائه شده است.

1.1. ادبیات مساله و ضرورت تحقیق

بسیاری از مسائل علوم طبیعی نظیر فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، هواشناسی و علوم مهندسی نظیر برق، مکانیک، کامپیوتر و هوش مصنوعی در قالب‌هایی از مدل‌های ریاضی طراحی و پیاده‌سازی می‌شوند [1] - [3]. چنانچه در مدل

✦ نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: me.chehelabi@iau.ac.ir (چه‌لایی)

لایبنتز پایه گذاری شد. دانشمندان بزرگی چون لاگرانژ، لژاندر، ژاکوبی، کلبش، برنولی، مایر و همیلتون نقش مهمی در توسعه و حل معادلات دیفرانسیل ایفا نمودند [9]. مدل (1) یک نمونه از دستگاه دو معادله دیفرانسیل خطی به هم مرتبط، را نشان می‌دهد. نویسندگان در مرجع [10]، مدل (1) را، به حالتی که در آن، به جای مشتق معمولی، مشتق کسری کاپوتو در نظر گرفته شود، توسعه دادند و سپس به حل عددی مدل، بر اساس روش تجزیه آدومین پرداختند.

نظریه مجموعه‌های فازی، به منظور مدل‌بندی کردن مفاهیم ذهنی که مرزهای غیردقیق دارند، برای اولین بار توسط پروفیسور لطفی زاده به دنیای علمی معرفی شد. به محض پیدایش ایده یک تابع با مقادیر فازی، ایده بعضی از انواع معادلات دیفرانسیل فازی نیز به وجود آمد. یکی از موضوعات اساسی در مواجهه با معادلات دیفرانسیل فازی استفاده از یک مفهوم مناسب مشتق‌پذیری در محیط فازی است [11] - [14]. تاکنون اکثر تحقیقات در زمینه معادلات دیفرانسیل فازی، به معادلات از مرتبه اول (برای نمونه مراجع [15] - [20] را ببینید) و تا حدودی هم از مرتبه دوم (مراجع [21] و [22] را ببینید) اختصاص داده شده‌اند. با این حال، تا آنجا که دانش ما اجازه می‌دهد، تاکنون روشی تحلیلی یا روشی عددی، برای حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی ارائه نشده است. در واقع، به طور کلی، حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی بسیار دشوار است و به ضرایب و پارامترهای فازی و مفهوم مشتق فازی که بکار گرفته می‌شود، بستگی دارد. دستگاه (1) در حالت فازی، یک حالت خاص از دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی متشکل از دو معادله با دو مجهول را نشان می‌دهد و نوآوری این تحقیق، آن است که با اعمال شرایط مطلوب، فرمول جواب‌های تحلیلی منحصر به فرد این دستگاه را به دست می‌آورد.

3.1. روش تحقیق

روش تحقیق در این مقاله، به صورت کتابخانه‌ای است. با مطالعه مقالات مرتبط با معادلات دیفرانسیل فازی و استفاده از نتایج

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) + by(t), \\ y'(t) = ax(t) - (b + d)y(t), \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، $x(0) = I > 0$ و $y(0) = 0$ است. در این مدل، مجهولات $x(t)$ و $y(t)$ ، به ترتیب میزان ماده BSP موجود در خون و کبد را در لحظه t ، پس از تزریق اولیه در خون، نشان می‌دهند. a ، b و d ضرایب ثابت مثبت نامعلوم هستند که نرخ انتقال BSP را نشان می‌دهند. این ضرایب از طریق آزمایش و مشاهدات بالینی به دست می‌آیند.

از آنجا که نتایج آزمایشگاهی از طریق اندازه‌گیری و سنجش یافت می‌شوند، به طور معمول غیرقطعی و نادقیق هستند. به طور دقیق‌تر، کاهش دقت و اریب بودن دستگاه‌های اندازه‌گیری‌کننده در اثر فرسودگی با گذشت زمان، کالیبره نکردن ابزارهای اندازه‌گیری، پایدار نبودن شرایط محیطی، وجود منابع نامعلوم خطا، از جمله عواملی هستند که باعث می‌شوند، نتایج آزمایشگاهی از ویژگی عدم قطعیت برخوردار باشند. به عنوان یک مثال شهودی، اگر داده‌های بالینی یک شخص در محدوده نرمال نباشد به طور قطع، نمی‌توان گفت که شخص دچار بیماری می‌شود. بنابراین، چنانچه عدم قطعیت موجود در پارامترها، در مدل (1) لحاظ گردد، آنگاه با مدلی سر و کار خواهیم داشت که تفسیر جامع و مناسب‌تری از عملکرد کبد انسان ارائه می‌کند. قابل ذکر است که تعیین و نمایش عدم قطعیت موجود در پارامترها، بر عهده متخصص آزمایشگاه است که می‌طلبد، در این زمینه، از تجربه، دانش و مهارت کافی برخوردار باشد. نظریه مجموعه‌های فازی یک ابزار توانا برای نمایش داده‌های نادقیق و نامطمئن است و ریاضیات فازی، به ما اجازه می‌دهد تا داده‌ها را همراه با عدم قطعیت موجود در آنها بکار بگیریم و به تفسیر و حل مدل پردازیم. هدف این مقاله، مطالعه مدل (1) و یافتن جواب‌های تحلیلی آن، در حالتی که، ضرایب a ، b و d و مقدار اولیه I ، به صورت اعداد فازی داده شده‌اند، است.

2.1. پیشینه تحقیق

برای اولین بار، حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن و

مطرح می‌کنیم. اولین مفهوم در منطق فازی، مفهوم مجموعه‌های فازی است، یعنی مجموعه که در آن هر عضو دارای درجه‌ای از عضویت بین صفر تا یک است. اعداد فازی، نمونه‌هایی از مجموعه‌های فازی هستند که امروزه در ریاضیات فازی، به صورت علمی زیر، تعریف می‌شوند.

تعریف 1.2 [7]. یک عدد فازی u ، به صورت

$$[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$$

که نمایش α -برش u نامیده می‌شود، نشان داده می‌شود و در آن $u^-(\alpha)$ ، تابع صعودی، کراندار، پیوسته چپ در $[0, 1]$ و پیوسته راست در $\alpha = 0$ است، تابع $u^+(\alpha)$ نزولی، کراندار، پیوسته چپ در $[0, 1]$ و پیوسته راست در $\alpha = 0$ است و برای

$$\text{هر } \alpha \in [0, 1], \text{ داریم: } u^-(\alpha) \leq u^+(\alpha)$$

به طور دقیق‌تر، برای $\alpha \in (0, 1)$ ، داریم:

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}: \mu_u(x) \geq \alpha\},$$

که در آن، $\mu_u(x)$ درجه عضویت x در عدد فازی u است و

$$[u]^0 = \text{supp}(u) = \text{cl}\{x \in \mathbb{R}: \mu_u(x) > 0\},$$

که تکیه گاه u نامیده می‌شود. در اینجا، $\text{cl}(A)$ بستار مجموعه A است. مجموعه تمام اعداد فازی تعریف شده روی خط حقیقی \mathbb{R} را با نماد \mathbb{R}_F نشان می‌دهیم. برای $u, v \in \mathbb{R}_F$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم [19]:

$$[u \oplus v]^\alpha = [u^-(\alpha) + v^-(\alpha), u^+(\alpha) + v^+(\alpha)],$$

$$[\lambda \odot u]^\alpha = \begin{cases} [\lambda u^-(\alpha), \lambda u^+(\alpha)]; & \lambda \geq 0 \\ [\lambda u^+(\alpha), \lambda u^-(\alpha)]; & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$[u \odot v]^\alpha = [\min\{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha),$$

$$u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\},$$

$$\max\{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha),$$

$$u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\}],$$

ملاحظه می‌کنیم که اعمال حسابی روی اعداد فازی به اعمال حسابی روی بازه‌ها، بر اساس نمایش α -برش اعداد فازی، انتقال می‌یابد. تعریف مشابه، برای عمل تفاضل، به صورت زیر است.

تعریف 2.2 [19]. دو عدد $u, v \in \mathbb{R}_F$ را در نظر بگیرید. اگر عدد

فازی w وجود داشته باشد به طوری که $u = v \oplus w$ ، آنگاه w

یافت شده قبلی، به تحلیل و حل مدل می‌پردازیم. برای این منظور، از مفهوم مشتق‌پذیری هاکوهارای توسعه‌یافته [23]، [24] استفاده می‌کنیم. قابل ذکر است که، این مفهوم مشتق، ابزاری توانا و قابل اجرا، در حل معادلات دیفرانسیل فازی است که بر اساس آن، به طور معمول، دو جواب با رفتارهای متفاوت (یک جواب با پهنای صعودی و جواب دیگر با پهنای نزولی) یافت می‌شود [15] - [17]، [19]، [20]، [25]، [26]. در حالت کلی، انتخاب جواب، بستگی دارد به اینکه چه رفتاری از جواب دستگاه، مورد انتظار است و کدام جواب، بهتر می‌تواند مدل تحت مطالعه را تفسیر کند [27]، [28]. ما ابتدا به تحلیل مساله در حالتی که همه داده‌ها به صورت اعداد فازی غیرحقیقی هستند، می‌پردازیم و سپس به منظور یافتن جواب‌های تحلیلی، مساله را به مدل‌های ساده‌تری تجزیه می‌کنیم و با اعمال شرایط خاص، روی فازی بودن درایه‌های ماتریس ضرایب و مقادیر اولیه، به مطالعه نظری هر مدل می‌پردازیم.

4.1. مراحل تحقیق و یافته‌ها

ابتدا، جزئیات فرایند حل مساله در حالت کاملاً فازی، جهت یافتن جواب‌های تحلیلی، تشریح می‌دهیم و نتایج وجود جواب یکتا را فراهم می‌کنیم (داده شده به صورت قضیه 1.3). دشواری و پیچیدگی‌های محاسباتی برای رسیدن به جواب‌های تحلیلی، را تشریح داده و در ادامه، جهت ساده‌سازی و دستیابی به جواب‌های تحلیلی، مساله در دو حالت مجزا از فازی بودن پارامترها، مطالعه می‌کنیم: 1- حالتی که ضرایب a ، b و d اعداد حقیقی مثبت بوده و مقدار اولیه I عددی فازی است. 2- حالتی که ضرایب a و b اعداد فازی مثلثی مثبت هم پهنای بوده و d و I اعداد حقیقی مثبت هستند. در هر یک از این حالات، به فرمول‌های جواب دست می‌یابیم که توسط قضایای 1.4 و 1.5 داده شده‌اند. در پایان، با حل دو مثال، به تشریح و بکارگیری عملی نتایج یافت شده، می‌پردازیم.

2. مفاهیم اولیه

در این بخش، تعاریف اولیه، نمادها و برخی نتایج ضروری را

می‌شود. برخی خواص محاسباتی اعداد فازی مثبت و منفی در مرجع [17] داده شده است.

یک مجموعه از اعداد فازی پرکاربرد، به اعداد فازی مثلثی شناخته شده‌اند. یک چنین عددی، با سه‌تایی $u = (u^l, u^c, u^r)$ نمایش داده می‌شود که در آن u^c راس عدد و u^l و u^r به ترتیب مقادیر چپ و راست عدد نامیده می‌شوند و داریم:

$$[u]^\alpha = [u^l + (u^c - u^l)\alpha, u^r - (u^r - u^c)\alpha].$$

مجموعه تمام اعداد فازی مثلثی را با نماد $T\mathbb{R}_F$ نشان می‌دهیم.

اگر $u = (u^l, u^c, u^r) \in TR_F$ و داشته باشیم:

$$u^c - u^l = u^r - u^c = l_u,$$

آنگاه u را یک عدد فازی مثلثی متقارن با پهنای l_u می‌نامیم و برای سادگی آن را با دو تایی $u = (u^c, l_u)$ نمایش می‌دهیم و به سادگی می‌توان دید:

$$[u]^\alpha = [u^c + l_u(-1 + \alpha), u^c + l_u(1 - \alpha)].$$

در نمایی دیگر

$$u = u^c \ominus_{l_u}(0, 1).$$

که در آن $(0, 1)$ عدد فازی مثلثی متقارن با راس صفر و پهنای یک را نشان می‌دهد. مجموعه تمام اعداد فازی مثلثی متقارن را با نماد $T^S\mathbb{R}_F$ نشان می‌دهیم.

در این مقاله، بازه حقیقی $U = (0, T)$ برای $T > 0$ ، ثابت فرض می‌شود و یک تابع فازی مقدار $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ در فرم α -برش به صورت $[f(t)]^\alpha = [f^-(t; \alpha), f^+(t; \alpha)]$ برای هر $t \in U$ و $\alpha \in [0, 1]$ نشان داده می‌شود.

اکنون به مفهوم مشتق‌پذیری هاکوهارای توسعه‌یافته، می‌پردازیم.

تعریف 4.2 [23]. تابع $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ و نقطه $t_0 \in U$ را در نظر

بگیرید f, GH -مشتق‌پذیر در t_0 نامیده می‌شود، هرگاه:

1. عضو $f'(t_0) \in \mathbb{R}_F$ وجود داشته باشد به طوری که، برای

تمام $h > 0$ به اندازه کافی نزدیک به صفر تفاضلات-

H ، $f(t_0 + h) \ominus f(t_0)$ و $f(t_0 - h) \ominus f(t_0)$ وجود

داشته باشند و

تفاضل هاکوهارا (برای سادگی تفاضل H) دو عدد u و v نامیده شده و با $w = u \ominus v$ نشان داده می‌شود.

اگر $u \ominus v$ موجود باشد، آنگاه α -برش‌های آن خواهد شد:

$$[u \ominus v]^\alpha = [u^-(\alpha) - v^-(\alpha), u^+(\alpha) - v^+(\alpha)].$$

همچنین، می‌نویسیم: $u \ominus u = 0$ که عدد فازی 0 همراه با α -برش‌های $\{0\} = [0]^\alpha$ است. برای برخی خواص تفاضل H -مراجعه [15]، [20]، [25] و [29] را پیشنهاد می‌کنیم.

متر هاسدروف، یک متر معروف در مجموعه اعداد فازی است که برای $u, v \in \mathbb{R}_F$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|\}$$

مجموعه (\mathbb{R}_F, D) یک فضای متریک کامل است [30].

در این مقاله، نیاز داریم تا اعداد فازی، از نظر علامت، شناسایی شوند. برای این منظور از تعریف زیر استفاده می‌کنیم.

تعریف 3.2 [17]. عدد فازی u را مثبت می‌نامیم، هرگاه:

$$u^-(\alpha) > 0, \forall \alpha \in [0, 1],$$

و آن را منفی می‌نامیم، هرگاه:

$$u^+(\alpha) < 0, \forall \alpha \in [0, 1].$$

عدد فازی u را عدد فازی تقریباً صفر می‌نامیم، هرگاه برای تمام $\alpha \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$u^-(\alpha) \leq 0, u^+(\alpha) \geq 0$$

مجموعه اعداد فازی مثبت، منفی و تقریباً صفر را به ترتیب با نمادهای \mathbb{R}_F^+ ، \mathbb{R}_F^- و \mathbb{R}_F^0 نشان می‌دهیم.

اعمال حسابی فازی روی مجموعه اعداد فازی مثبت یا منفی به سادگی انجام می‌شوند. در واقع داریم:

$$[u \odot v]^\alpha = \begin{cases} [u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)]; & u, v \in \mathbb{R}_F^+, \\ [u^+(\alpha)v^+(\alpha), u^-(\alpha)v^-(\alpha)]; & u, v \in \mathbb{R}_F^-, \\ [u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha)]; & u \in \mathbb{R}_F^+, v \in \mathbb{R}_F^- \end{cases}$$

و اگر $v \in \mathbb{R}_F^+ \cup \mathbb{R}_F^-$ باشد، آنگاه:

$$\left[\frac{1}{v}\right]^\alpha = \left[\frac{1}{v^+(\alpha)}, \frac{1}{v^-(\alpha)}\right],$$

و برای $u \in \mathbb{R}_F$ عمل تقسیم $\frac{u}{v}$ به صورت $u \odot \frac{1}{v}$ تعریف

کرد مفهوم پهنای یک تابع مقدار شده فازی است.
تعریف 5.2 [25]. [27]. تابع $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ همراه با α -برش‌های $[f(t)]^\alpha = [f^-(t; \alpha), f^+(t; \alpha)]$ را در نظر بگیرید. برای $\alpha \in [0, 1]$ ثابت، طول یا پهنای α -برش f ، تابع $L_\alpha(f): U \rightarrow [0, +\infty)$ با ضابطه زیر است:

$$(L_\alpha(f))(t) = f^+(t; \alpha) - f^-(t; \alpha).$$

از آنجا که، جواب یک دستگاه معادلات را می‌تواند در قالب یک تابع برداری بیان نمود، لذا، تعریف مشتق‌پذیری یک تابع برداری مقدار شده فازی را، مطرح می‌کنیم.

تعریف 6.2. فرض کنید $j \in \{1, 2\}$ و z عدد طبیعی $n > 1$ مقادیر ثابت باشند. فرض کنید تابع $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F^n$ یک تابع برداری فازی مقدار، باشد، به این معنا که

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^t$$

(نمای t به معنای ترانهاده است) و در آن $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ تابع‌هایی فازی مقدار هستند. ما می‌گوییم f ، (j) -مشتق‌پذیر روی U است، هرگاه f_i ها تابع‌هایی (j) -مشتق‌پذیر روی U باشند و در این حالت، تعریف می‌کنیم:

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t))^t, \forall t \in U.$$

اکنون منظور از جواب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی، را مشخص می‌کنیم.

تعریف 7.2. فرض کنید $m, n > 0$ دو عدد طبیعی باشند. دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'_1(t) = c_{11} \odot y_1(t) \oplus c_{12} \odot y_2(t) \oplus \dots \oplus c_{1n} \odot y_n(t), \\ y'_2(t) = c_{21} \odot y_1(t) \oplus c_{22} \odot y_2(t) \oplus \dots \oplus c_{2n} \odot y_n(t), \\ \vdots \\ y'_m(t) = c_{m1} \odot y_1(t) \oplus c_{m2} \odot y_2(t) \oplus \dots \oplus c_{mn} \odot y_n(t), \\ y_1(0) = y_{10}, y_2(0) = y_{20}, \dots, y_n(0) = y_{n0}. \end{cases} \quad (2)$$

که در آن $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ مقادیر اولیه معلوم و $t \in U$ است. اگر تمامی ضرایب c_{ij} ها و مقادیر اولیه y_{i0} ها، برای $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$ اعداد فازی باشند، آنگاه دستگاه (2) کاملاً فازی نامیده می‌شود. چنانچه، تنها مقادیر اولیه y_{i0} ها، اعداد فازی باشند، آنگاه دستگاه (2) یک دستگاه مقدار اولیه

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 + h) \ominus f(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0) \ominus f(t_0 - h)}{h} = f'(t_0),$$

یا

2. عضو $f'(t_0) \in \mathbb{R}_F$ وجود داشته باشد به طوریکه، برای تمام $h > 0$ به اندازه کافی نزدیک به صفر تفاضلات $H, f(t_0 - h) \ominus f(t_0)$ و $f(t_0) \ominus f(t_0 + h)$ وجود داشته باشند و

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 - h) \ominus f(t_0)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0) \ominus f(t_0 + h)}{-h} = f'(t_0),$$

در این مقاله، می‌گوییم تابع f ، (j) -مشتق‌پذیر روی U است (برای $j \in \{1, 2\}$) هرگاه f در هر نقطه $t \in U$ یک تابع $-GH$ -مشتق‌پذیر، در معنای (j) از تعریف فوق، باشد. دو قضیه بعد، نحوه بکارگیری عملی مفهوم $-GH$ -مشتق‌پذیری را مشخص می‌کنند.

قضیه 1.2 [31]. [32].

1. اگر $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ یک تابع (1) -مشتق‌پذیر روی U باشد، آنگاه برای هر مقدار ثابت $\alpha \in [0, 1]$ تابع‌های $f^-(t; \alpha)$ و $f^+(t; \alpha)$ روی U ، مشتق‌پذیر بوده و داریم:

$$[f'(t)]^\alpha = [f^-(t; \alpha), f^+(t; \alpha)], \forall t \in U.$$

2. اگر $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ یک تابع (2) -مشتق‌پذیر روی U باشد، آنگاه برای هر مقدار ثابت $\alpha \in [0, 1]$ تابع‌های $f^-(t; \alpha)$ و $f^+(t; \alpha)$ روی U ، مشتق‌پذیر بوده و داریم:

$$[f'(t)]^\alpha = [f^+(t; \alpha), f^-(t; \alpha)], \forall t \in U.$$

قضیه 2.2 [15]. [28]. فرض کنید $j \in \{1, 2\}$ مقداری ثابت است و $\lambda \in \mathbb{R}$ است. اگر $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ تابع‌هایی (j) -مشتق‌پذیر روی U باشند، آنگاه تابع $f \oplus \lambda \odot g$ نیز (j) -مشتق‌پذیر روی U بوده و داریم:

$$(f \oplus \lambda \odot g)'(t) = f'(t) \oplus \lambda \odot g'(t).$$

یکی از مفاهیم دیگر که در بخش‌های بعد، از آن استفاده خواهیم

فازی گفته می‌شود. برای $k \in \{1,2\}$ تابع برداری فازی مقدار می‌کند:

$$e^{t \odot a} \odot y_1(t) = I,$$

که به سادگی نتیجه می‌دهد:

$$[y_1(t)]^\alpha = [e^{-ta^-(\alpha)} I^-(\alpha), e^{-ta^+(\alpha)} I^+(\alpha)]. \quad (5)$$

طبق خاصیت 1 در مرجع [27]، این تابع (2) -مشتق‌پذیر بوده و به سادگی می‌توان چک کرد که آن در معادله (4) صدق می‌کند. بنابراین، ما به جواب نوع (2) از دستگاه (3)، به صورت $y(t) = (y_1(t), 0)^t$ همراه با $y_1(t)$ داده شده به صورت (5)، می‌رسیم. اما این جواب نمی‌تواند جواب مطلوب و مورد انتظار باشد. زیرا بر اساس آن، مقدار BSP موجود در کبد (یعنی $y_2(t)$)، همواره صفر باقی می‌ماند. بنابراین، در ادامه، به مطالعه دستگاه (3) تحت (1) -مشتق‌پذیری می‌پردازیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم تابع‌های $y_1, y_2: U \rightarrow \mathbb{R}_F^+$ موجودند به طوری که $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ جواب نوع (1) از دستگاه (3) باشد. فرض کنید $\alpha \in [0,1]$ دلخواه، اما، ثابت باشد. با در نظر گرفتن α -برش:

$$[y_i(t)]^\alpha = [y_i^-(t; \alpha), y_i^+(t; \alpha)], i = 1, 2.$$

به وسیله قضیه 1.2، داریم:

$$[y_i'(t)]^\alpha = [y_i'^-(t; \alpha), y_i'^+(t; \alpha)], i = 1, 2.$$

با جایگزینی در دستگاه (3) و استفاده از اعمال حساب فازی، به دستگاه غیر فازی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} y_1'^-(t; \alpha) = -a^+(\alpha) y_1^+(t; \alpha) + b^-(\alpha) y_2^-(t; \alpha), \\ y_1'^+(t; \alpha) = -a^-(\alpha) y_1^-(t; \alpha) + b^+(\alpha) y_2^+(t; \alpha), \\ y_2'^-(t; \alpha) = a^-(\alpha) y_1^-(t; \alpha) - (b^+(\alpha) + d^+(\alpha)) y_2^+(t; \alpha), \\ y_2'^+(t; \alpha) = a^+(\alpha) y_1^+(t; \alpha) - (b^-(\alpha) + d^-(\alpha)) y_2^-(t; \alpha), \\ y_1^-(0; \alpha) = I^-(\alpha), \\ y_1^+(0; \alpha) = I^+(\alpha), \\ y_2^-(0; \alpha) = 0, \\ y_2^+(0; \alpha) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

با تعریف ماتریس

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a^+(\alpha) & b^-(\alpha) \\ 0 & 0 & a^+(\alpha) & -c^-(\alpha) \\ a^-(\alpha) & b^+(\alpha) & 0 & 0 \\ a^-(\alpha) & -c^+(\alpha) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

فازی گفته می‌شود. برای $k \in \{1,2\}$ تابع برداری فازی مقدار $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^t$ جواب نوع (k) از دستگاه (2) نامیده می‌شود، هرگاه آن (k) -مشتق‌پذیر بوده و برای هر $t \in U$ در دستگاه (2) صدق کند.

نکته 1.2. اگر $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^t$ جواب نوع

(1) از دستگاه (2) باشد، پس هر y_i تابعی (1) -مشتق‌پذیر است. این ایجاب می‌کند که پهنای $L_\alpha(y_i)$ تابع‌هایی صعودی باشند. همین طور، اگر تابع برداری $y(t)$ جواب نوع (2) از دستگاه (2) باشد، آنگاه $L_\alpha(y_i)$ تابع‌هایی نزولی هستند (برای جزئیات بیشتر مراجع [24]، [25] و [27] پیشنهاد می‌شود).

3. حل مدل ریاضی کبد انسان با داده‌های فازی تحت

GH-مشتق‌پذیری

در این بخش، به جزئیات حل مدل ریاضی کبد انسان که به صورت دستگاه زیر، متشکل از معادلات دیفرانسیل فازی، در نظر گرفته شده است، می‌پردازیم:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -a \odot y_1(t) \oplus b \odot y_2(t), t \in U, \\ y_2'(t) = a \odot y_1(t) \oplus (-1)(b + d) \odot y_2(t), \\ y_1(0) = I, \\ y_2(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

که در آن مقادیر a, b, d در حالت کلی، اعداد فازی مثبت هستند. چون $y_1(t)$ و $y_2(t)$ به ترتیب مقدار BSP در خون و کبد را، در لحظه t نشان می‌دهند، پس انتظار می‌رود، آنها تابع‌هایی فازی مقدار نامنفی باشند. ابتدا، اجازه دهید فرض کنیم $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ جواب نوع (2) از دستگاه (3) باشد. در این صورت، چون $y_2(0) = 0$ پس، طبق نکته 1.2، باید داشته باشیم:

$$y_2(t) = 0, \forall t \in U.$$

لذا دستگاه (3)، به یک معادله دیفرانسیل یک مجهولی زیر تقلیل می‌یابد:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -a \odot y_1(t), t \in U, \\ y_1(0) = I. \end{cases} \quad (4)$$

طبق نکته 4.3 در مرجع [17]، جواب (4)، در معادله زیر صدق

و تابع برداری

$$\begin{aligned} & \max\{|y_2^-(t; \alpha) - a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) \\ & \quad + c^+(\alpha)y_2^+(t; \alpha)|, |y_2^+(t; \alpha) \\ & \quad - a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) + c^-(\alpha)y_2^-(t; \alpha)|\} \\ & = 0. \end{aligned}$$

که در آن $c = b + d$ است. چون α عددی دلخواه بوده است، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|y_1^-(t; \alpha) + a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) \\ & \quad - b^-(\alpha)y_2^-(t; \alpha)|, |y_1^+(t; \alpha) \\ & \quad + a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) - b^+(\alpha)y_2^+(t; \alpha)|\} \\ & = 0, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|y_2^-(t; \alpha) - a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) \\ & \quad + c^+(\alpha)y_2^+(t; \alpha)|, |y_2^+(t; \alpha) \\ & \quad - a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) + c^-(\alpha)y_2^-(t; \alpha)|\} \\ & = 0. \end{aligned}$$

این دو تساوی اخیر، با عنایت به فرض اینکه $y_1(t)$ و $y_2(t)$ تابع‌های فازی مقدار مثبت و (1)-مشتق‌پذیر هستند، به ترتیب، به این معنا هستند که:

$$D(y_1'(t), -a \odot y_1(t) \oplus b \odot y_2(t)) = 0,$$

و

$$D(y_2'(t), a \odot y_1(t) \oplus (-1)c \odot y_2(t)) = 0.$$

بنابراین، $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ جواب نوع (1) از دستگاه (3) است. در نهایت، اگر $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^t$ جواب مثبت نوع (1) دیگری از (3) باشد، آنگاه طبق قسمت (1)، واحدهای بالا و پایین مولفه‌های آن، یعنی $x_i^-(t; \alpha)$ و $x_i^+(t; \alpha)$ برای $i = 1, 2$ ، جواب دستگاه (9) هستند، که تناقض دارد با فرض اینکه $y_i^-(t; \alpha)$ و $y_i^+(t; \alpha)$ برای $i = 1, 2$ ، جواب مثبت یکتای (9) هستند. بنابراین $x(t) = y(t)$. ■

ما حالا، به ساختار جواب دستگاه ماتریسی (9) و فرآیند یافتن آن، اشاره می‌کنیم [33]. دستگاه (9) دارای جواب در شکل ماتریسی زیر است:

$$z_\alpha(t) = (y_1^-(t; \alpha), y_2^+(t; \alpha), y_1^+(t; \alpha), y_2^-(t; \alpha))^t \quad (8)$$

دستگاه (6) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر، خلاصه نمود:

$$\begin{cases} z'_\alpha(t) = A_\alpha z_\alpha(t), & t \in U, \\ z_{-\alpha}(0) = (I^-(\alpha), 0, I^+(\alpha), 0)^t. \end{cases} \quad (9)$$

اکنون، در قضیه بعد، شرایط وجود جواب یکتای دستگاه (9) را مطرح می‌کنیم.

قضیه 1.3

1. اگر دستگاه فازی (3)، روی بازه U دارای جواب

یکتای مثبت نوع (1)، $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ ، همراه نمایش α -برش $[y_i(t)]^\alpha = [y_i^-(t; \alpha), y_i^+(t; \alpha)]$ ، $i = 1, 2$ باشد، آنگاه برای هر $\alpha \in [0, 1]$ دلخواه ثابت، تابع برداری $z_\alpha(t)$ در رابطه (8)، جواب یکتای دستگاه (9) است.

2. اگر برای هر $\alpha \in [0, 1]$ دستگاه (9)، روی بازه U

دارای جواب یکتای $z_\alpha(t)$ در رابطه (8)، باشد، به طوری که $[y_i^-(t; \alpha), y_i^+(t; \alpha)]$ برای $i = 1, 2$ به عنوان α -برش تابع‌هایی فازی مقدار مثبت و (1)-مشتق‌پذیر روی U ، تعریف شده باشند، آنگاه، تابع $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ همراه با

$$[y_i(t)]^\alpha = [y_i^-(t; \alpha), y_i^+(t; \alpha)], \quad i = 1, 2.$$

جواب یکتای مثبت نوع (1)، از دستگاه (3) است.

اثبات: قسمت (1) واضح است. اجازه دهید به اثبات قسمت (2) بپردازیم. عدد $\alpha \in [0, 1]$ دلخواه، اما ثابت، بگیرد. چون $z_\alpha(t)$ جواب مثبت یکتای دستگاه (9) است، پس، مولفه‌های آن، یعنی $y_i^-(t; \alpha)$ و $y_i^+(t; \alpha)$ تابع‌های مثبت مشتق‌پذیر روی U و صادق در (6) هستند. لذا برای هر $t \in U$ داریم:

$$\begin{aligned} & \max\{|y_1^-(t; \alpha) + a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) \\ & \quad - b^-(\alpha)y_2^-(t; \alpha)|, |y_1^+(t; \alpha) \\ & \quad + a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) - b^+(\alpha)y_2^+(t; \alpha)|\} \\ & = 0, \end{aligned}$$

همین طور:

$$\begin{aligned}
 q_\alpha &= (a^+(\alpha)c^-(\alpha) - a^+(\alpha)b^-(\alpha)) \\
 &\quad \times (a^-(\alpha)c^+(\alpha) - a^-(\alpha)b^+(\alpha)) \\
 &= (a^+(\alpha)(b^-(\alpha) + d^-(\alpha)) \\
 &\quad - a^+(\alpha)b^-(\alpha)) \\
 &\quad \times (a^-(\alpha)(b^+(\alpha) + d^+(\alpha)) \\
 &\quad - a^-(\alpha)b^+(\alpha)) \\
 &= a^-(\alpha)a^+(\alpha)d^-(\alpha)d^+(\alpha) > 0.
 \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}
 \Delta_\alpha &= p_\alpha^2 - 4q_\alpha \\
 &= (a^-(\alpha)a^+(\alpha) \\
 &\quad + a^-(\alpha)b^-(\alpha) + a^+(\alpha)b^+(\alpha) + c^-(\alpha)c^+(\alpha))^2 \\
 &\quad - 4a^-(\alpha)a^+(\alpha)d^-(\alpha)d^+(\alpha) \\
 &> (a^-(\alpha)a^+(\alpha) + d^-(\alpha)d^+(\alpha))^2 \\
 &\quad - 4a^-(\alpha)a^+(\alpha)d^-(\alpha)d^+(\alpha) \\
 &= (a^-(\alpha)a^+(\alpha) - d^-(\alpha)d^+(\alpha))^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

بنابراین: $0 < \Delta_\alpha = p_\alpha^2 - 4q_\alpha < p_\alpha^2$ ، که نتیجه می‌دهد:

$$p_\alpha - \sqrt{\Delta_\alpha} > 0.$$

به این ترتیب، هر یک از $\lambda_{i\alpha}$ ها اعداد حقیقی هستند. همچنین، واضح است که:

$$\lambda_{1\alpha} < \lambda_{2\alpha} < \lambda_{3\alpha} < \lambda_{4\alpha}.$$

اکنون فرض کنید λ_α یک مقدار ویژه ماتریس A_α باشد. پس باید دترمینان ماتریس $A_\alpha - \lambda_\alpha I$ برابر صفر باشد. با محاسبه مستقیم، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda_\alpha & 0 & -a^+(\alpha) & b^+(\alpha) \\ 0 & -\lambda_\alpha & a^+(\alpha) & -c^-(\alpha) \\ -a^-(\alpha) & b^+(\alpha) & -\lambda_\alpha & 0 \\ a^-(\alpha) & -c^+(\alpha) & 0 & -\lambda_\alpha \end{vmatrix} \\
 &= \lambda_\alpha^4 \\
 &\quad - (a^-(\alpha)a^+(\alpha) \\
 &\quad + a^-(\alpha)b^-(\alpha) + a^+(\alpha)b^+(\alpha) + c^-(\alpha)c^+(\alpha))\lambda_\alpha^2 \\
 &\quad + (a^+(\alpha)c^-(\alpha) - a^+(\alpha)b^-(\alpha)) \\
 &\quad \times (a^-(\alpha)c^+(\alpha) - a^-(\alpha)b^+(\alpha)) = \lambda_\alpha^4 - p_\alpha\lambda_\alpha^2 + q_\alpha.
 \end{aligned}$$

بنابراین، $\lambda_\alpha^4 - p_\alpha\lambda_\alpha^2 + q_\alpha = 0$ معادله مشخصه ماتریس A_α بوده که به وضوح، ریشه‌های آن، همان $\lambda_{i\alpha}$ ها، برای $i = 1, 2, 3, 4$ هستند. ■

$$z_\alpha(t) = e^{tA_\alpha} z_\alpha(0). \quad (10)$$

برای محاسبه e^{tA_α} با استفاده از نتایج ماتریسی و جبر خطی، کافی است فرم ژوردن ماتریس A_α یافت شود. اگر H_α ماتریسی باشد که ستون‌های آن بردارهای ویژه ماتریس A_α باشند، آنگاه فرم ژوردن A_α ماتریس $J_\alpha = H_\alpha^{-1}A_\alpha H_\alpha$ خواهد بود. با در اختیار داشتن این ماتریس داریم:

$$e^{tA_\alpha} = H_\alpha e^{tJ_\alpha} H_\alpha^{-1} \quad (11)$$

در نهایت، با جایگزینی (11) در (10)، تابع برداری $z_\alpha(t)$ یافت می‌شود. اما در این فرآیند، ساختار ماتریس‌های e^{tA_α} و H_α به تمایز یا تکراری بودن مقادیر ویژه ماتریس A_α بستگی دارد، که در ادامه به آن می‌پردازیم.

خاصیت 1.3. فرض کنید $a, b, d \in \mathbb{R}_F^+$. برای ثابت دلخواه $\alpha \in [0, 1]$ ، ماتریس بلوکی A_α داده شده در رابطه (7)، دارای چهار مقدار ویژه متمایز زیر است:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1\alpha} &= -\sqrt{\frac{p_\alpha + \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}}, \quad \lambda_{2\alpha} = -\sqrt{\frac{p_\alpha - \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}} \\
 \lambda_{3\alpha} &= \sqrt{\frac{p_\alpha - \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}}, \quad \lambda_{4\alpha} = \sqrt{\frac{p_\alpha + \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}}
 \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 \Delta_\alpha &= p_\alpha^2 - 4q_\alpha, \\
 p_\alpha &= a^-(\alpha)a^+(\alpha) + a^-(\alpha)b^-(\alpha) + a^+(\alpha)b^+(\alpha) \\
 &\quad + c^-(\alpha)c^+(\alpha), \\
 q_\alpha &= (a^+(\alpha)c^-(\alpha) - a^+(\alpha)b^-(\alpha)) \\
 &\quad \times (a^-(\alpha)c^+(\alpha) - a^-(\alpha)b^+(\alpha)),
 \end{aligned}$$

و $c = b + d$ است.

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم، $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ، اعداد حقیقی هستند. چون $a, b, d \in \mathbb{R}_F^+$ و در نتیجه $c \in \mathbb{R}_F^+$ ، پس، برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، تک تک جملات p_α مثبت بوده و لذا $p_\alpha > 0$ همچنین، داریم:

$$\begin{cases} y_1^-(t; \alpha) = -ay_1^+(t; \alpha) + by_2^-(t; \alpha), \\ y_1^+(t; \alpha) = -ay_1^-(t; \alpha) + by_2^+(t; \alpha), \\ y_2^-(t; \alpha) = ay_1^-(t; \alpha) - cy_2^+(t; \alpha), \\ y_2^+(t; \alpha) = ay_1^+(t; \alpha) - cy_2^-(t; \alpha), \\ y_1^-(0; \alpha) = I^-(\alpha), \\ y_1^+(0; \alpha) = I^+(\alpha), \\ y_2^-(0; \alpha) = 0, \\ y_2^+(0; \alpha) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

همراه با $c = b + d$. قابل توجه است که چون ضرایب، اعداد حقیقی هستند، در تبدیل دستگاه فازی (3) به دستگاه غیرفازی (12)، لزومی ندارد تابع‌های فازی مقدار $y_1(t)$ و $y_2(t)$ مثبت فرض شوند. لذا، طبق قضیه 1.3، کافی است مولفه‌های $y_i^-(t; \alpha)$ و $y_i^+(t; \alpha)$ برای $i \in \{1, 2\}$ از بردارهای جواب دستگاه (12)، به ترتیب، واحدهای پایین و بالای α -برش یک تابع فازی مقدار را، تعریف کنند.

برای یافتن جواب دستگاه (12)، بجای فرآیند مطرح شده در بخش قبل، می‌توانیم به صورت ساده‌تر زیر عمل کنیم. برای $i = 1, 2$ ، قرار دهید:

$$p_i(t; \alpha) = y_i^+(t; \alpha) - y_i^-(t; \alpha), t \in U, \alpha \in [0, 1],$$

$$q_i(t; \alpha) = y_i^+(t; \alpha) + y_i^-(t; \alpha), t \in U, \alpha \in [0, 1].$$

با تفریق معادله اول از معادله دوم و تفریق معادله سوم از معادله چهارم دستگاه (12)، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} p_1'(t; \alpha) = ap_1(t; \alpha) + bp_2(t; \alpha), \\ p_2'(t; \alpha) = ap_1(t; \alpha) + cp_2(t; \alpha). \end{cases} \quad (13)$$

این دستگاه، با توجه به مقادیر اولیه داده شده در رابطه (12)، دارای مقادیر اولیه زیر است:

$$p_1(0, \alpha) = I^+(\alpha) - I^-(\alpha), \quad p_2(0, \alpha) = 0.$$

به طور مشابه، با جمع دو معادله اول و دو معادله دوم (12)، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} q_1'(t; \alpha) = -aq_1(t; \alpha) + bq_2(t; \alpha), \\ q_2'(t; \alpha) = aq_1(t; \alpha) - cq_2(t; \alpha), \\ q_1(0; \alpha) = I^+(\alpha) + I^-(\alpha), \\ q_2(0; \alpha) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

نکته 1.3. با توجه به خاصیت 1.3، چون مقادیر ویژه ماتریس A_α همگی حقیقی و متمایز هستند، یادآوری می‌کنیم که فرم ژوردن آن، به صورت ماتریس قطری زیر است:

$$J_\alpha = \text{diag}(\lambda_{1\alpha}, \lambda_{2\alpha}, \lambda_{3\alpha}, \lambda_{4\alpha}),$$

و داریم:

$$e^{tJ_\alpha} = \text{diag}(e^{\lambda_{1\alpha}t}, e^{\lambda_{2\alpha}t}, e^{\lambda_{3\alpha}t}, e^{\lambda_{4\alpha}t}),$$

همچنین، ماتریس H_α باید به گونه‌ای یافت شود که:

$$H_\alpha J_\alpha = A_\alpha H_\alpha$$

نکته 2.3. با توجه به قضیه 1.3، به منظور اطمینان از وجود جواب مثبت نوع (1) برای دستگاه (3)، بر پایه حل دستگاه‌های (9)، با محدودیت‌های زیادی مواجه هستیم که الزام می‌کنند، مجموعه جواب‌های دستگاه‌های (9)، از ویژگی‌های خاصی برخوردار باشند. برای نمونه، اگر $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ و $z_\alpha(t)$ و $z_\beta(t)$ معرفی شده در رابطه (8)، به ترتیب جواب‌های دستگاه‌های (9) متناظر با α و β روی U باشند، آنگاه، باید نامساوی‌های زیر برقرار باشند:

$$0 \leq y_i^-(t; \alpha) \leq y_i^-(t; \beta) \leq y_i^+(t; \beta) \leq y_i^+(t; \alpha), \forall t \in U, i = 1, 2.$$

علاوه بر این، با توجه به خاصیت 1.3 و نکته 1.3، حل هر دستگاه (9)، حجم محاسباتی زیادی را در بر می‌گیرد. البته، این شرایط سخت وجود جواب و پیچیدگی‌های محاسباتی، مورد انتظار بوده است چرا که، دستگاه (3)، نمایانگر مدل ریاضی کبد انسان، در حالت کاملاً فازی، است.

4. حل مدل همراه با مقدار اولیه فازی

در این بخش، مدل (3) را در حالتی که ضرایب a, b, d اعداد حقیقی مثبت بوده و تنها، مقدار اولیه I یک عدد فازی غیرحقیقی است، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این حالت، دستگاه (6)، به دستگاه ساده‌تر زیر، قابل بازنویسی است:

$$\Delta = (a + c)^2 - 4ad = (a + b + d)^2 - 4ad > (a + d)^2 - 4ad = (a - d)^2 \geq 0,$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(a + c)^2 - 4ad} < |a + c| = a + c.$$

بنابراین:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b} & \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \end{bmatrix}.$$

با استفاده از این ماتریس‌ها، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1(t; \alpha) \\ p_2(t; \alpha) \end{pmatrix} &= He^{tJ}H^{-1} \begin{pmatrix} p_1(0; \alpha) \\ p_2(0; \alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b} & \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} & -\frac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} & \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I^+(\alpha) - I^-(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\kappa_1}{2\sqrt{\Delta}} e^{\lambda_1 t} + \frac{\kappa_2}{2\sqrt{\Delta}} e^{\lambda_2 t} \\ \frac{(c-a-\sqrt{\Delta})\kappa_1}{4b\sqrt{\Delta}} e^{\lambda_1 t} + \frac{\kappa_2\kappa_1}{4b\sqrt{\Delta}} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ &\quad \times (I^+(\alpha) - I^-(\alpha)). \end{aligned}$$

که در آن $\kappa_2 = a - c + \sqrt{\Delta}$ و $\kappa_1 = c - a + \sqrt{\Delta}$ چون

$$\begin{aligned} (c - a + \sqrt{\Delta})(a - c + \sqrt{\Delta}) &= \Delta - (a - c)^2 \\ &= (a + c)^2 - 4ad \\ -(a - c)^2 &= 4a(c - d) \\ &= 4ab. \end{aligned} \quad (18)$$

و همین طور:

$$(c - a - \sqrt{\Delta})(c - a + \sqrt{\Delta}) = -4ab.$$

لذا، $p_1(t; \alpha)$ و $p_2(t; \alpha)$ در روابط (15) و (16)، جواب دستگاه (13) هستند. چون $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ به وضوح داریم $p_2(t; \alpha) > 0$ در مورد $p_1(t; \alpha)$ اگر $a = c$ ، آنگاه به وضوح آن یک تابع مثبت است. اگر $a < c$ ، پس:

$$c - a + \sqrt{\Delta} > 0.$$

از رابطه (18) و اینکه a, b مثبت هستند، پی می‌بریم که:

بنابراین، برای حل دستگاه 4×4 (12) کافی است، دو دستگاه 2×2 مجزای (13) و (14) را حل کنیم (لذا حجم محاسبات کاهش می‌یابد [34]). از آنجا که $p_i(t; \alpha)$ پهنای α -برش $y_i(t)$ از جواب دستگاه اصلی (3) است، پس باید مثبت باشد. لم زیر این اطمینان را فراهم می‌کند که، تابع‌های صادق در دستگاه (13)، تابع‌های حقیقی مثبت، هستند.

لم 1.4. برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، دستگاه (13) دارای جواب مثبت زیر است:

$$\begin{aligned} p_1(t; \alpha) &= \left(\left(\frac{c - a + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{\lambda_1 t} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a - c + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{\lambda_2 t} \right) (I^+(\alpha) - I^-(\alpha)), \end{aligned} \quad (15)$$

$$p_2(t; \alpha) = \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) (I^+(\alpha) - I^-(\alpha)), \quad (16)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \frac{a + c - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + c + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad (17)$$

$$\Delta = (a + c)^2 - 4ad.$$

اثبات: ما دستگاه معادلات دیفرانسیل (13) را براساس روش ذکر شده در بخش قبل، با یافتن ماتریس ژوردن ماتریس ضرایب دستگاه، یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & c \end{bmatrix}$$

حل می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که λ_2 و λ_1 داده شده در رابطه (17)، مقادیر ویژه A بوده و بردارهای ویژه متناظر، به ترتیب:

$$v_1 = \left(1, \frac{\lambda_1 - a}{b} \right)^t,$$

$$v_2 = \left(1, \frac{\lambda_2 - a}{b} \right)^t.$$

هستند. در اینجا، توجه می‌کنیم که $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ زیرا از اینکه a, b, d مثبت هستند، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1(t; \alpha) \\ q_2(t; \alpha) \end{pmatrix} &= He^{tJ}H^{-1} \begin{pmatrix} q_1(0; \alpha) \\ q_2(0; \alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{a-c-\sqrt{\Delta}}{2b} & \frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_1 t} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} & -\frac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} & \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I^+(\alpha) + I^-(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_2 t} \\ \left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \right) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \end{pmatrix} \\ &\quad \times (I^+(\alpha) + I^-(\alpha)). \end{aligned}$$

بنابراین، به تابع‌های (19) و (20) به عنوان جواب دستگاه (14) دست می‌یابیم. چون $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ پس، $q_2(t; \alpha) > 0$ و مشابه اثبات لم 1.4، از (18)، نتیجه می‌شود $q_1(t; \alpha) > 0$. اکنون، با استفاده از دو لم قبل، به ساختار یکنای جواب دستگاه (3)، دست می‌یابیم که در قضیه بعد، ارائه شده است. **قضیه 1.4.** دستگاه (3) با ضرایب حقیقی مثبت a, b, d و مقدار اولیه فازی I دارای جواب نوع (1)، به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_1 t) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_2 t) \right) \odot I \\ &\quad \oplus (-1) \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_1 t) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_2 t) \right) \odot I, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\sinh(\lambda_2 t) - \sinh(\lambda_1 t)) \odot I \\ &\quad \oplus (-1) \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\cosh(\lambda_2 t) - \cosh(\lambda_1 t)) \\ &\quad \odot I, \end{aligned} \quad (22)$$

$$a - c + \sqrt{\Delta} > 0.$$

به طور مشابه، اگر $a > c$ ، آنگاه از رابطه (18) و نامساوی اخیر، نتیجه می‌گیریم:

$$c - a + \sqrt{\Delta} > 0.$$

به این ترتیب، $p_1(t; \alpha) > 0$ و اثبات تمام است. ■ حالا، به ساختار جواب مثبت دستگاه (14)، می‌پردازیم. **لم 2.4.** برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، دستگاه (14) دارای جواب مثبت زیر است:

$$\begin{aligned} q_1(t; \alpha) &= \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_1 t} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_2 t} \right) (I^+(\alpha) \\ &\quad + I^-(\alpha)), \end{aligned} \quad (19)$$

$$q_2(t; \alpha) = \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) (I^+(\alpha) + I^-(\alpha)), \quad (20)$$

که در آن Δ ، λ_1 و λ_2 در رابطه (17) داده شده‌اند. **اثبات:** ماتریس ضرایب دستگاه (14) به صورت زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} -a & b \\ a & -c \end{bmatrix}.$$

به سادگی می‌توان دید، B دارای مقادیر ویژه زیر است:

$$\mu_1 = \frac{-(a+c) + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{-(a+c) - \sqrt{\Delta}}{2},$$

که در آن $\Delta = (a+c)^2 - 4ad$ است. می‌بینیم که $\mu_1 = -\lambda_1$ و $\mu_2 = -\lambda_2$. پس از اثبات لم 1.4، داریم: $\mu_2 < \mu_1 < 0$. بنابراین، فرم ژوردن B می‌شود:

$$J = \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}.$$

همچنین، با یافتن بردارهای ویژه B ، ماتریس H به صورت زیر یافت می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{a-\lambda_2}{b} & \frac{a-\lambda_1}{b} \end{bmatrix}.$$

به این ترتیب، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 y_1^+(t; \alpha) &= \frac{1}{2}(q_1(t; \alpha) + p_1(t; \alpha)) \\
 &= -\left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\sinh(\lambda_1 t) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\sinh(\lambda_2 t)\right) I^-(\alpha) \\
 &\quad + \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh(\lambda_1 t) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh(\lambda_2 t)\right) I^+(\alpha).
 \end{aligned}$$

که برای هر $t \in U$ ، تابعی نزولی در α است. در نتیجه، $[y_1^-(t; \alpha), y_1^+(t; \alpha)]$ -برش‌های یک تابع فازی مقدار را تعریف می‌کنند، که به صورت $y_1(t)$ داده شده در رابطه (21)، بیان می‌شود. حالا، نشان می‌دهیم این تابع (1) -مشتق‌پذیر است. قرار دهید:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(t) &= \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh(\lambda_1 t) \\
 &\quad + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh(\lambda_2 t), \\
 \psi_1(t) &= \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\sinh(\lambda_1 t) \\
 &\quad + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\sinh(\lambda_2 t).
 \end{aligned}$$

چون برای هر $t > 0$ داریم $\varphi_1(t) > 0$ و $\psi_1(t) > 0$ و همچنین:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1'(t) &= \lambda_1 \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\sinh(\lambda_1 t) \\
 &\quad + \lambda_2 \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\sinh(\lambda_2 t) > 0, \\
 \psi_1'(t) &= \lambda_1 \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh(\lambda_1 t) \\
 &\quad + \lambda_2 \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh(\lambda_2 t) > 0,
 \end{aligned}$$

طبق قضیه 5، قسمت (a)، در مرجع [15]، هر یک از تابع‌های $I \odot \varphi_1(t)$ و $I \odot \psi_1(t)$ (1) -مشتق‌پذیر هستند. در

که در آن Δ ، λ_1 و λ_2 در رابطه (17) داده شده‌اند.

اثبات: از آنجا که طبق لم 1.4 و لم 2.4، تابع‌های p_i و q_i ، $i = 1, 2$ ، مثبت هستند و اینکه:

$$y_i^-(t; \alpha) = \frac{1}{2}(q_i(t; \alpha) - p_i(t; \alpha)),$$

$$y_i^+(t; \alpha) = \frac{1}{2}(q_i(t; \alpha) + p_i(t; \alpha)),$$

پس، برای هر $t \in U$ و $\alpha \in [0, 1]$ خواهیم داشت:

$$y_i^-(t; \alpha) \leq y_i^+(t; \alpha).$$

برای $i = 1$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 y_1^-(t; \alpha) &= \frac{1}{2}(q_1(t; \alpha) - p_1(t; \alpha)) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)(e^{-\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)(e^{-\lambda_2 t} + e^{\lambda_2 t})\right) I^-(\alpha) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)(e^{-\lambda_1 t} - e^{\lambda_1 t}) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)(e^{-\lambda_2 t} - e^{\lambda_2 t})\right) I^+(\alpha) \\
 &= \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh(\lambda_1 t) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\cosh(\lambda_2 t)\right) I^-(\alpha) \\
 &\quad - \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\sinh(\lambda_1 t) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\sinh(\lambda_2 t)\right) I^+(\alpha).
 \end{aligned}$$

چون $t > 0$ و $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ پس، ضرایب تابع‌های $I^-(\alpha)$ و $I^+(\alpha)$ در تساوی اخیر، به ترتیب، مثبت و منفی هستند. این نتیجه می‌دهد که، برای هر $t \in U$ ، تابع $y^-(t; \alpha)$ در α صعودی است. به طور مشابه، به دست می‌آوریم:

نتیجه، به وسیله قضیه 2.2، تابع $y_1(t)$ در رابطه (21)، (1) - مشتق پذیر است.

برای $i = 2$ ، مشابه با قسمت قبل، با محاسبه مستقیم، خواهیم یافت:

$$y_2^-(t; \alpha) = \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\sinh(\lambda_2 t) - \sinh(\lambda_1 t)) I^-(\alpha) - \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\cosh(\lambda_2 t) - \cosh(\lambda_1 t)) I^+(\alpha),$$

$$y_2^+(t; \alpha) = -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\cosh(\lambda_2 t) - \cosh(\lambda_1 t)) I^-(\alpha) - \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\sinh(\lambda_2 t) - \sinh(\lambda_1 t)) I^+(\alpha).$$

قرار دهید:

$$\varphi_2(t) = \cosh(\lambda_2 t) - \cosh(\lambda_1 t),$$

$$\psi_2(t) = \sinh(\lambda_2 t) - \sinh(\lambda_1 t).$$

می‌دانیم برای $\alpha > 0$ ، تابع‌های $\sinh(x)$ و $\cosh(x)$ مثبت و صعودی‌اند. پس، $\varphi_2(t) > 0$ و $\psi_2(t) > 0$ و لذا تابع‌های $y_2^-(t; \alpha)$ و $y_2^+(t; \alpha)$ به ترتیب صعودی و نزولی در α بوده و در نتیجه، آنها یک تابع فازی مقدار $y_2(t)$ را ایجاد می‌کنند که به صورت رابطه (22)، بیان می‌شود. همچنین، چون:

$$\varphi_2'(t) = \lambda_2 \sinh(\lambda_2 t) - \lambda_1 \sinh(\lambda_1 t) > 0,$$

$$\psi_2'(t) = \lambda_2 \cosh(\lambda_2 t) - \lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) > 0.$$

طبق قضیه 5، قسمت (a)، در مرجع [15]، هر یک از تابع‌های $\varphi_2(t) \odot I$ و $\psi_2(t) \odot I$ - مشتق پذیر هستند. در نتیجه، به وسیله قضیه 2.2، تابع $y_2(t)$ در (22)، (1) - مشتق پذیر است. در نهایت، با توجه به قضیه 1.3 قسمت (2)، تابع‌های $y_1(t)$ و $y_2(t)$ ، جواب نوع (1) از دستگاه (3) را تشکیل می‌دهند.

5. حل مدل همراه با ضرایب فازی مثلثی متقارن هم

پهنا

در این بخش، حالتی از مدل (3) را در نظر می‌گیریم که در آن ضرایب a ، b و $c = b + d$ به صورت اعداد فازی مثلثی متقارن هم پهنا، داده شده باشند. پس، با استفاده از نمادگذاری‌های

مطرح شده در بخش 2، داریم:

$$a = (a^c, l_a), \quad b = (b^c, l_b), \quad c = (c^c, l_c)$$

که در آن، $l_a = l_b = l_c$. این تساوی‌ها، با توجه به اینکه $c = b + d$ ، ایجاب می‌کند که d باید یک عدد حقیقی باشد و ما در واقع داریم $c^c = b^c + d$. همچنین، برخلاف بخش قبل، فرض می‌کنیم مقدار اولیه $y_1(0) = I$ ، یک عدد حقیقی است. در این بخش، نشان می‌دهیم که تحت مفروضات فوق، تابع برداری جواب نوع (1) از دستگاه (3)، وجود دارد و مولفه‌های آن، تابع‌های فازی مقدار مثلثی متقارن و هم پهنا، هستند. فرض کنید دستگاه (3) دارای جواب نوع (1)، به صورت $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ است که $y_i: U \rightarrow T^s \mathbb{R}_F^+$ ، همراه با α -برش‌های زیر باشند:

$$[y_i(t)]^\alpha = [y_i^c(t) + l_i(t)(-1 + \alpha), y_i^c(t) + l_i(t)(1 - \alpha)], \quad i = 1, 2.$$

چون هر یک از این تابع‌ها، متشکل از دو تابع مجهول $y_i^c(t)$ و $l_i(t)$ هستند، لذا، کافی است تا دستگاه (6)، متناظر با این تابع‌ها را، برای دو مقدار $\alpha = 0, 1$ ، حل کنیم. دستگاه (6)، متناظر با $\alpha = 1$ خواهد شد:

$$\begin{cases} y_1^{c'}(t) = -a^c y_1^c(t) + b^c y_2^c(t), \\ y_2^{c'}(t) = a^c y_1^c(t) - c^c y_2^c(t), \\ y_1^c(0) = I, \\ y_2^c(0) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

دستگاه (23)، جزء خانواده دستگاه‌های (14)، است. پس طبق لم 2.4، دارای جواب مثبت زیر است:

$$y_1^c(t) = \left(\left(\frac{c^c - a^c + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{a^c - c^c + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_2 t} \right) I, \quad (24)$$

$$y_2^c(t) = \frac{a^c}{\sqrt{\Delta}} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) I, \quad (25)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \frac{a^c + c^c - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a^c + c^c + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$L'(t) = l(y_1^c(s) + y_2^c(s)) + (a^c + b^c)e^{(a^c+b^c)t} \int_0^t l(y_1^c(s)) + y_2^c(s)e^{-(a^c+b^c)s} ds > 0.$$

به وسیله قسمت (a)، از قضیه 5 در مرجع [15]، تابع $L(t) \odot u_0$ (1) -مشتق‌پذیر است. لذا تابع‌های $y_i(t)$ در هر نقطه $t > 0$ (1) -مشتق‌پذیرند. در نتیجه، از قضیه 1.3 قسمت (2)، تابع‌های $y_i(t)$ جواب نوع (1) از دستگاه متناظر (3) هستند.

در پایان این بخش شبه کدی را که معرف الگوریتم فرآیند مطرح شده، در این مقاله است، مطرح می‌کنیم.

الگوریتم:

گام اول: درخواست وارد کردن داده‌ها به یکی از دو شکل زیر:

(i). مقادیر a, b, d را به صورت اعداد حقیقی و مقدار I را به صورت عدد فازی وارد کنید.

(ii). مقادیر a, b را به صورت اعداد فازی مثلی هم پهنا وارد کنید و مقادیر I, d را به صورت اعداد حقیقی وارد کنید.

گام دوم: اگر داده‌های ورودی در حالت (i) از گام اول، بوده‌اند، آنگاه، از فرمول‌های (21) و (22) استفاده کن و جواب‌ها را به عنوان خروجی نمایش بده. سپس، برای دریافت اطلاعات جدید به گام اول برگرد.

گام سوم: اگر داده‌های ورودی در حالت (ii) از گام اول، بوده‌اند، آنگاه، از فرمول (27) استفاده کن و جواب‌ها را به عنوان خروجی نمایش بده. سپس، برای دریافت اطلاعات جدید به گام اول برگرد.

6. مثال‌ها

مثال 1.6. مدل ریاضی کبد فرد A ، همراه با مقادیر بالینی $a = 2$ ، $b = 1$ و $d = 2$ و مقدار اولیه فازی I ، داده شده به صورت:

$$[I]^\alpha = [0/5 + 0/5 \alpha, 1/5 - 0/5 \alpha], \forall \alpha \in [0,1],$$

$$\Delta = (a^c + c^c)^2 - 4a^c d.$$

اکنون، دستگاه (6)، متناظر با $\alpha = 0$ را در نظر می‌گیریم. این دستگاه عبارت است از:

$$\begin{cases} l_1'(t) = (a^c + l)l_1(t) + (b^c - l)l_2(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ l_1'(t) = (a^c - l)l_1(t) + (b^c + l)l_2(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ l_2'(t) = (a^c - l)l_1(t) + (b^c + l + d)l_2(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ l_2'(t) = (a^c + l)l_1(t) + (b^c - l + d)l_2(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ l_1(0) = l_2(0) = 0. \end{cases}$$

در اینجا $l = l_a = l_b = l_c$. چون y_1^c و y_2^c جواب‌های (23) هستند، دستگاه فوق به دستگاه زیر تقلیل می‌یابد:

$$\begin{cases} y_1^c(t) - l_1(t) = -(a^c + l)(y_1^c(t) + l_1(t)) + (b^c - l)(y_2^c(t) - l_2(t)) \\ y_1^c(t) + l_1(t) = -(a^c - l)(y_1^c(t) - l_1(t)) + (b^c + l)(y_2^c(t) + l_2(t)) \\ y_2^c(t) - l_2(t) = (a^c - l)(y_1^c(t) - l_1(t)) - (b^c + l + d)(y_2^c(t) + l_2(t)) \\ y_2^c(t) + l_2(t) = (a^c + l)(y_1^c(t) + l_1(t)) - (b^c - l + d)(y_2^c(t) - l_2(t)) \\ l_1(0) = l_2(0) = 0. \end{cases}$$

از تفاضل دو معادله اول (یا دو معادله دوم) دستگاه اخیر، به سادگی نتیجه می‌شود: $l_1(t) = l_2(t)$. برای سادگی، جایگزین می‌کنیم: $L(t) = l_1(t)$. با قرار دادن در یکی از معادلات دستگاه اخیر و پس از ساده کردن، به معادله دیفرانسیل ساده زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} L'(t) = (a^c + b^c)L(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)), \\ L(0) = 0, \end{cases}$$

که دارای جواب زیر است:

$$L(t) = e^{(a^c+b^c)t} \int_0^t l(y_1^c(s) + y_2^c(s))e^{-(a^c+b^c)s} ds. \quad (26)$$

اکنون، این نتایج را در قضیه زیر، کامل می‌کنیم.

قضیه 1.5. دستگاه (3) همراه با اعداد فازی مثلی متقارن مثبت $a = (a^c, l)$ و $b = (b^c, l)$ و مقادیر حقیقی نامنفی d ، $I = y_1(0)$ دارای جواب نوع (1)، به صورت زیر است:

$$y_i(t) = y_i^c(t) \oplus L(t) \odot u_0, \quad t > 0, i = 1, 2, \quad (27)$$

که در آن $u_0 = (0, 1) \in T^s \mathbb{R}_F$ و تابع‌های $y_1^c(t)$ ، $y_2^c(t)$ و $L(t)$ در (24)، (25) و (26) داده شده‌اند.

اثبات: چون از لم 2.4 داریم $y_1^c(t) > 0$ و $y_2^c(t) > 0$ ، پس، برای هر $t > 0$ ، تابع $L(t)$ در (26)، مثبت است. لذا، تابع‌های $y_i(t)$ در (27) خوش‌تعریف هستند. همچنین، چون:

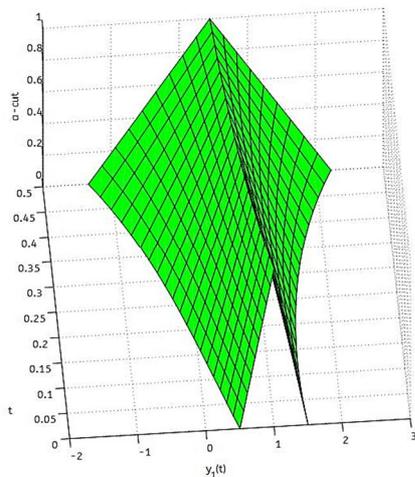
برش‌های $[y_1(t)]^\alpha$ و $[y_2(t)]^\alpha$ با افزایش زمان، افزایش می‌یابد. به عبارتی دیگر، همان‌طور که مورد انتظار است، با افزایش زمان، میزان نادقیقی و عدم اطمینان مقادیر BSP موجود در خون و کبد فرد A ، افزایش می‌یابد. برای مشاهده این مقادیر، نتایج محاسباتی مربوط به سه زمان متفاوت، در جدول (1)، داده شده است. برای نمونه، پس از نیم ساعت از تزریق BSP، مقدار آن در خون و کبد فرد A ، طبق جدول (1)، به ترتیب، اعداد فازی حدوداً $0/31$ و $0/45$ است.

مثال 2.6. مدل ریاضی کبد فرد B ، همراه با مقادیر بالینی فازی $a = (2,1)$ ، $b = (1,1)$ و مقادیر حقیقی $d = 2$ و $l = 3$ در نظر بگیرید. با توجه به رابطه (3)، در این مثال، هدف یافتن جواب‌های دستگاه فازی زیر است:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -(2,1) \odot y_1(t) \oplus (1,1)y_2(t), \\ y_2'(t) = (2,1) \odot y_1(t) \oplus (-1)(3,1)y_2(t), \\ y_1(0) = I, \\ y_2(0) = 0, \end{cases} \quad (31)$$

در اینجا $c = b + d = (3,1)$ است. با استفاده از (17)، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= (a^c + c^c)^2 - 4a^c d = 9, \\ \lambda_1 &= \frac{a^c + c^c - \sqrt{\Delta}}{2} = 1, \\ \lambda_2 &= \frac{a^c + c^c + \sqrt{\Delta}}{2} = 4. \end{aligned}$$



در نظر بگیرید. با توجه به رابطه (3)، در این مثال، هدف یافتن جواب‌های دستگاه مقدار اولیه فازی زیر است:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2 \odot y_1(t) \oplus y_2(t), t > 0, \\ y_2'(t) = 2 \odot y_1(t) \oplus (-3)y_2(t), \\ y_1(0) = I, \\ y_2(0) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

با استفاده از رابطه (17) و اینکه $c = b + d = 3$ ، داریم:

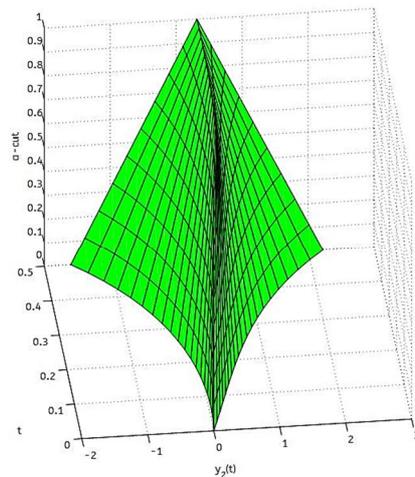
$$\begin{aligned} \Delta &= (a + c)^2 - 4ad = 9, \\ \lambda_1 &= \frac{a + c - \sqrt{\Delta}}{2} = 1, \\ \lambda_2 &= \frac{a + c + \sqrt{\Delta}}{2} = 4. \end{aligned}$$

با جایگزینی در رابطه‌های (21) و (22)، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \left(\frac{2}{3} \cosh(t) + \frac{1}{3} \cosh(4t) \right) \odot I \\ &\quad \oplus (-1) \left(\frac{2}{3} \sinh(t) + \frac{1}{3} \sinh(4t) \right) \\ &\quad \odot I, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \frac{2}{3} (\sinh(4t) - \sinh(t)) \odot I \\ &\quad \oplus \left(-\frac{2}{3} \right) (\cosh(4t) - \cosh(t)) \odot I, \end{aligned} \quad (30)$$

گرافیک این تابع‌ها در شکل (1)، نشان داده شده است. شکل (1)، نشان می‌دهد که برای هر مقدار ثابت $\alpha \in [0,1]$ پهنای $-\alpha$



شکل (1): گرافیک جواب‌ها از مثال 1.6.

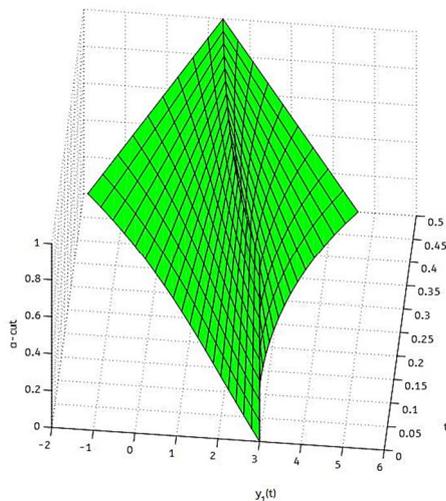
جدول (1): نتایج فازی تست BSP شخص A در سه زمان

زمان بر حسب ساعت (t)	BSP موجود در خون $([y_1(t)]^\alpha)$	BSP موجود در کبد $([y_2(t)]^\alpha)$
0/25	$[-0.24 + 0.88\alpha, 1.53 - 0.88\alpha]$	$[-0.2 + 0.48\alpha, 0.75 - 0.48\alpha]$
0/5	$[-1.33 + 1.78\alpha, 2.23 - 1.78\alpha]$	$[-1.6 + 1.91\alpha, 2.22 - 1.91\alpha]$
0/75	$[-3.72 + 4.05\alpha, 4.38 - 4.05\alpha]$	$[-5.71 + 5.99\alpha, 6.27 - 5.99\alpha]$

گرافیک این تابع‌ها در شکل (2)، نشان داده شده است و مقادیر آنها، در سه زمان متفاوت، در جدول (2)، داده شده است. نکته 1.6 قابل توجه است که، چون رابطه‌های (21)، (22) و (27) جواب‌های دستگاه فازی (3) هستند، پس به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ -برش آنها در دستگاه معمولی متناظر (6) صدق می‌کند. لذا، به ازای $\alpha = 1$ ، فرمول‌های یافت شده، جواب دستگاه معمولی (1) را فراهم خواهند کرد. برای آزمایش، اجازه دهید تا جواب‌های یافت شده در مثال‌های این بخش را در نظر بگیریم. در مثال 1.6 داریم $[I]^1 = 1$. پس، از رابطه‌های (29) و (30) به سادگی، نتیجه می‌گیریم که:

$$[y_1(t)]^1 = \frac{1}{3}(2e^{-t} + e^{-4t}),$$

$$[y_2(t)]^1 = \frac{2}{3}(e^{-t} - e^{-4t}).$$



با جایگزینی در رابطه‌های (24) و (25) و پس از ساده کردن، به دست می‌آوریم:

$$y_1^c(t) = 2e^{-t} + e^{-4t},$$

$$y_2^c(t) = 2e^{-t} - 2e^{-4t}.$$

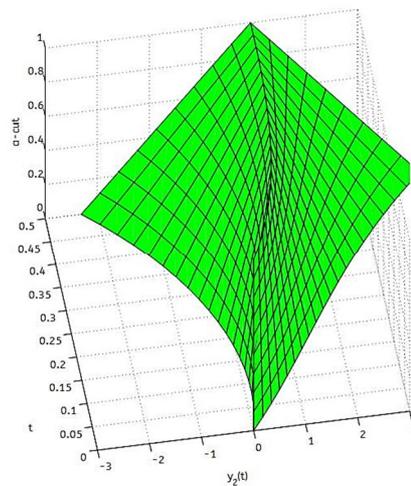
با جایگزینی این تابع‌ها در رابطه (26)، به دست می‌آوریم:

$$L(t) = e^{(a^c+b^c)t} \int_0^t l(y_1^c(s) + y_2^c(s))e^{-(a^c+b^c)s} ds = \frac{6}{7}e^{3t} - e^{-t} + \frac{1}{7}e^{-4t}.$$

در نهایت، از رابطه (27) تابع‌های جواب خواهند شد:

$$y_1(t) = (2e^{-t} + e^{-4t}) \oplus \left(\frac{6}{7}e^{3t} - e^{-t} + \frac{1}{7}e^{-4t}\right) \odot (0,1), \quad (32)$$

$$y_2(t) = (2e^{-t} - 2e^{-4t}) \oplus \left(\frac{6}{7}e^{3t} - e^{-t} + \frac{1}{7}e^{-4t}\right) \odot (0,1). \quad (33)$$



شکل (2): گرافیک جواب‌ها از مثال 1.6

جدول (2): نتایج فازی تست BSP شخص B در سه زمان

زمان بر حسب ساعت (t)	BSP موجود در خون $[y_1(t)]^\alpha$	BSP موجود در کبد $[y_2(t)]^\alpha$
0/25	$[1.58 + 1.09\alpha, 3.25 - 1.09\alpha]$	$[-0.27 + 1.09\alpha, 1.91 - 1.09\alpha]$
0/5	$[-1.67 + 3.25\alpha, 4.84 - 3.25\alpha]$	$[-2.31 + 3.25\alpha, 4.2 - 3.25\alpha]$
0/75	$[-6.5 + 7.67\alpha, 8.83 - 7.67\alpha]$	$[-6.82 + 7.67\alpha, 8.51 - 7.67\alpha]$

7. نتیجه گیری

در این مقاله، مدل ریاضی عملکرد کبد انسان مطابق آزمون بروموسولفاتین، به عنوان یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل فازی مطالعه شده و شرایط کافی وجود جواب یکتا تحت مشتق پذیری هاکوهارای توسعه یافته، یافت شده‌اند. همچنین، فرمول‌های جواب به صورت تابع‌هایی فازی مقدار، در دو حالت مجزای (1) ضرایب فازی بوده ولی مقادیر اولیه غیرفازی، (2) مقادیر اولیه فازی بوده ولی ضرایب غیرفازی، یافت شده‌اند.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافی ندارند.

به سادگی، ملاحظه می‌شود که این توابع، جواب‌های دستگاه معمولی متناظر به دستگاه (28)، یعنی، دستگاه زیر، هستند:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t), & t > 0, \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - 3y_2(t), \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \end{cases}$$

به طور مشابه، از رابطه‌های (32) و (33)، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} [y_1(t)]^1 &= e^{-t} + \frac{1}{7}e^{-2t} + \frac{6}{7}e^{3t} + e^{-4t}, \\ [y_2(t)]^1 &= e^{-t} - \frac{13}{7}e^{-4t} + \frac{6}{7}e^{3t}, \end{aligned}$$

که جواب‌های دستگاه معمولی متناظر با دستگاه (31)، یعنی، دستگاه زیر، هستند:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t), & t > 0, \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - 3y_2(t), \\ y_1(0) = 3, \\ y_2(0) = 0, \end{cases}$$

مراجع

- [1] J. Casanovas and F. Rossell, "Averaging fuzzy biopolymers," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 152, pp. 139-158, 2005.
- [2] Z. Ding, H. Shen, and A. Kandel, "Performance analysis of service composition based on fuzzy differential equations," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 19, pp. 164-178, 2010, doi: 10.1109/TFUZZ.2010.2089633.
- [3] M. Hanss, *Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2005.
- [4] H. Moradi Farahani, J. Asgari, and M. Zakeri, "A Surveying on Type-2 Fuzzy Logic: Its Genesis and Its Application," *Soft Comput. J.*, vol. 2, no. 1, pp. 22-43, 2013, dor: 20.1001.1.23223707.1392.2.1.58.2 [In Persian].
- [5] A. Akrami and M. Parsamanesh, "Investigation of a mathematical fuzzy epidemic model for the spread of coronavirus in a population," *Soft Comput. J.*, vol. 11, no. 1, pp. 2-9, 2022, doi: 10.22052/scj.2022.246053.1045 [In Persian].
- [6] R. Akhoondi and R. Hosseini, "A Novel Fuzzy-Genetic Differential Evolutionary Algorithm for Optimization of A Fuzzy Expert Systems Applied to Heart Disease Prediction," *Soft Comput. J.*, vol. 6, no. 2, pp. 32-47, 2018, dor: 20.1001.1.23223707.1396.6.2.3.7 [In Persian].
- [7] C. Wu and Z. Gong, "On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions I," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 120, pp. 523-532, 2001, doi: 10.1016/S0165-0114(99)00057-3.
- [8] L. Celechovska, "A simple mathematical model of the human liver," *Appl. Math.*, vol. 49, pp. 227-246, 2004, doi: 10.1023/B:APOM.0000042364.85016.7d.
- [9] L.P. Lebedev and M.J. Cloud, *The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics*. Singapore:

- World Scientific, 2003, pp. 1-98, doi: 10.1142/5374.
- [10] M. Shabibi, Z. Zeinalabedini Charandabi, H. Mohammadi, and S. Rezapour, "Investigation of mathematical model of human liver by Caputo fractional derivative approach," *J. Adv. Math. Model.*, vol. 11, no. 4, pp. 750-760, 2021, doi: 10.22055/jamm.2022.37102.1918 [In Persian].
- [11] L.C. Barros and F.S. Pedro, "Fuzzy differential equations with interactive derivative," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 309, pp. 64-80, 2017, doi: 10.1016/j.fss.2016.04.002.
- [12] J.J. Buckley and T. Feuring, "Fuzzy differential equations," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 110, pp. 43-54, 2000, doi: 10.1016/S0165-0114(98)00141-9.
- [13] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, and M.D. Jimenez-Gamero, "Generalized derivative and π -derivative for set-valued functions," *Inf. Sci.*, vol. 181, pp. 2177-2188, 2011, doi: 10.1016/j.ins.2011.01.023.
- [14] V.F. Wasques, E. Esmi, L. C. Barros, and P. Sussner, "The generalized fuzzy derivative is interactive," *Inf. Sci.*, vol. 519, pp. 93-109, 2020, doi: 10.1016/j.ins.2020.01.042.
- [15] B. Bede, I.J. Rudas, and A.L. Bencsik, "First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability," *Inf. Sci.*, vol. 177, pp. 1648-1662, 2007, doi: 10.1016/j.ins.2006.08.021.
- [16] B. Bede and S.G. Gal, "Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability," *Commun. Math. Anal.*, vol. 9, no. 2, pp. 22-41, 2010.
- [17] M. Chehlabi and T. Allahviranloo, "Positive or negative solutions to first-order fully fuzzy linear differential equations under generalized differentiability," *Appl. Soft Comput.*, vol. 70, pp. 359-370, 2018, doi: 10.1016/j.asoc.2018.05.040.
- [18] M. Chehlabi and T. Allahviranloo, "Existence of generalized Hukuhara differentiable solutions to a class of first-order fuzzy differential equations in dual form," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 478, p. 108839, 2024, doi: 10.1016/j.fss.2023.108839.
- [19] A. Khastan, J.J. Nieto, and R. Rodriguez-Lopez, "Variation of constant formula for first order fuzzy differential equations," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 177, pp. 20-33, 2011, doi: 10.1016/j.fss.2011.02.020.
- [20] A. Khastan and R. Rodriguez-Lopez, "On the solutions to first order linear fuzzy differential equations," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 295, pp. 114-135, 2016, doi: 10.1016/j.fss.2015.06.005.
- [21] E. ElJaoui, S. Melliani, and L. S. Chadli, "Solving second-order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method," *Adv. Differ. Equ.*, vol. 2015, p. 66, 2015, doi: 10.1186/s13662-015-0414-x.
- [22] L. Hooshangian, "Analytic solution of fuzzy second order differential equations under H-derivation," *Theory Approx. Appl.*, vol. 11, no. 1, pp. 99-115, 2017.
- [23] B. Bede and S.G. Gal, "Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 151, pp. 581-599, 2005, doi: 10.1016/j.fss.2004.08.001.
- [24] B. Bede and L. Stefanini, "Solution of fuzzy differential equations with generalized differentiability using LU-parametric representation," in *Proc. 7th Conf. Eur. Soc. Fuzzy Logic Technol. (EUSFLAT)*, 2011, pp. 785-790, doi: 10.2991/eusflat.2011.106.
- [25] T. Allahviranloo and M. Chehlabi, "Solving fuzzy differential equations based on the length function properties," *Soft Comput.*, vol. 19, pp. 307-320, 2015, doi: 10.1007/s00500-014-1254-4.
- [26] A. Khastan and R. Rodriguez-Lopez, "On linear fuzzy differential equations by differential inclusions' approach," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 387, pp. 49-67, 2020, doi: 10.1016/j.fss.2019.05.014.
- [27] M.Z. Ahmad, M.K. Hasan, and B. De Baets, "Analytical and numerical solutions of fuzzy differential equations," *Inf. Sci.*, vol. 236, pp. 156-167, 2013, doi: 10.1016/j.ins.2013.02.026.
- [28] B. Bede, T.C. Bhaskar, and V. Lakshmikantham, "Perspectives of fuzzy initial value problems," *Commun. Appl. Anal.*, vol. 11, no. 3, pp. 339-358, 2007.
- [29] M. Chehlabi, "Trapezoidal approximation operators preserving the most indicators of fuzzy numbers-relationships and applications," *Soft Comput.*, vol. 26, pp. 7081-7105, 2022, doi: 10.1007/s00500-022-07172-y.
- [30] P. Diamond and P. Kloeden, *Metric Spaces of Fuzzy Sets*. Singapore: World Scientific, 1994, doi: 10.1142/9789814447010_0001.
- [31] Y. Chalco-Cano and H. Roman-Flores, "Comparison between some approaches to solve fuzzy differential equations," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 160, pp. 1517-1527, 2009, doi: 10.1016/j.fss.2008.10.002.
- [32] Y. Chalco-Cano and H. Roman-Flores, "On new solutions of fuzzy differential equations," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 38, pp. 112-119, 2008, doi: 10.1016/j.chaos.2006.10.043.
- [33] T.M. Apostol, *Linear Algebra: A First Course with Applications to Differential Equations*, 1st Ed., Wiley-Interscience, 1997.
- [34] R. Ezzati, "Solving fuzzy linear systems," *Soft Comput.*, vol. 15, pp. 193-197, 2011, doi: 10.1007/s00500-009-0537-7.