

جواب های مدل ریاضی عملکرد کبد انسان با داده های فازی تحت مفهوم مشتق پذیری هاکوهارای توسعه یافته

مهران چه لابی^{*}، استادیار،

¹ گروه علوم پایه، واحد سوادکوه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد سوادکوه، سوادکوه، ایران. آدرس پست الکترونی me.chehelabi@iau.ac.ir

چکیده: یک مدل ریاضی ساده از عملکرد کبد انسان، دستگاهی خطی متشکل از دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. از آنجا که داده های آزمایشگاهی و مقادیر بالینی از روی اندازه گیری و سنجش ثبت می شوند، از ویژگی عدم قطعیت و نادقیقی برخوردارند. لحاظ نمودن عدم قطعیت داده ها، منجر به تولید نتایج با کیفیت بیشتر می شود. منطق فازی یک ابزار توانا جهت برخورد با عدم قطعیت است که امکان مشاهده اثرات عدم قطعیت داده ها، در فرایند حل مساله را فراهم می کند. در این مقاله، به مطالعه نظری و یافتن جواب های مدل مذکور همراه با داده های فازی، می پردازیم. برای این منظور، از مفهوم مشتق هاکوهارای توسعه یافته مربوط به تابع های فازی مقدار، استفاده می کنیم. ابتدا به تحلیل فرایند حل مساله در حالت کاملاً فازی، می پردازیم و شرایط کافی وجود جواب یکتا را به دست می آوریم. سپس، مساله را در دو حالت خاص مجزا، مورد مطالعه قرار می دهیم: ۱- حالتی که ضرایب اعداد حقیقی باشند و مقدار اولیه فازی باشد. ۲- حالتی که ضرایب اعداد فازی مثلثی متقارن و هم پهنا باشند و مقدار اولیه، عددی حقیقی باشد. در هر دو حالت، فرمول های جواب را به دست می آوریم و در انتها، با ارائه دو مثال، به تشریح و بکارگیری عملی نتایج، می پردازیم.

واژه های کلیدی: تابع های فازی مقدار، معادلات دیفرانسیل فازی، مشتق پذیری هاکوهارای توسعه یافته.

* مهران چه لابی، me.chehelabi@iau.ac.ir

Solutions to the mathematical model of human liver with fuzzy data under generalized Hukuhara differentiability concept

Mehran Chehlabi ^{1*}, Assistant Professor

¹ Department of Mathematics, Savadkooh Branch, Islamic Azad University, Savadkooh, Iran.

Abstract: A simple mathematical model of human liver action is a linear system consisting of two first-order differential equations. Since laboratory data and clinical values are recorded by measurement and estimation, they have the characteristic of uncertainty and inaccuracy. Taking into account the uncertainty of the data leads to the production of higher quality results. Fuzzy logic is a powerful tool for dealing with uncertainty, which provides the possibility of observing the effects of data uncertainty in the problem solving process. In this paper, from a theoretical point of view, we study and obtain the solutions of the mentioned model along with fuzzy data. For this end, we use the generalized Hukuhara differentiability concept, related to fuzzy-valued functions. First, we analyze the process of solving the problem in fully fuzzy case and obtain the sufficient conditions for the existence of a unique solution. Next, we study the problem in two separate special cases: 1- the case where the coefficients are real numbers and the initial value is fuzzy. 2- the case where the coefficients are symmetric triangular fuzzy numbers with the same width and the initial value is a real number. In both cases, we obtain the solution formulas and at the end, by presenting two examples, we practically explain and apply the results.

Keywords: *Fuzzy-valued functions, Fuzzy differential equations, Generalized Hukuhara differentiability.*

* Mehran Chehlabi. me.chehlabi@iaau.ac.ir

۱. مقدمه

های اندازه‌گیری، پایدار نبودن شرایط محیطی، وجود منابع نامعلوم خطا، از جمله عواملی هستند که باعث می‌شوند، نتایج آزمایشگاهی از ویژگی عدم قطعیت برخوردار باشند. به عنوان یک مثال شهودی، اگر داده‌های بالینی یک شخص در محدوده نرمال نباشد به طور قطع، نمی‌توان گفت که شخص دچار بیماری می‌شود. بنابراین، چنانچه عدم قطعیت موجود در پارامترها، در مدل (۱) لحاظ گردد، آنگاه با مدلی سر و کار خواهیم داشت که تفسیر جامع و مناسب تری از عملکرد کبد انسان ارائه می‌کند. قابل ذکر است که تعیین و نمایش عدم قطعیت موجود در پارامترها، بر عهده متخصص آزمایشگاه است که می‌طلبد، در این زمینه، از تجربه، دانش و مهارت کافی برخوردار باشد. تئوری مجموعه‌های فازی یک ابزار توانا برای نمایش داده‌های نادقیق و نامطمئن است و ریاضیات فازی، به ما اجازه می‌دهد تا داده‌ها را همراه با عدم قطعیت موجود در آنها بکار بگیریم و به تفسیر و حل مدل پردازیم. هدف این مقاله، مطالعه مدل (۱) و یافتن جوابهای تحلیلی آن، در حالتی که، ضرایب a ، b و d و مقدار اولیه I ، به صورت اعداد فازی داده شده‌اند، است.

۲.۱. پیشینه تحقیق

برای اولین بار، حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط نیوتن و لایبنیتز پایه‌گذاری شد. دانشمندان بزرگی چون لاگرانژ، لژاندر، ژاکوبی، کلبش، برنولی، مایر و همیلتون نقش مهمی در توسعه و حل معادلات دیفرانسیل ایفا نمودند [۹]. مدل (۱) یک نمونه از دستگاه دو معادله دیفرانسیل خطی به هم مرتبط، را نشان می‌دهد. نویسندگان در [۱۰]، مدل (۱) را، به حالتی که در آن، به جای مشتق معمولی، مشتق کسری کاپوتو در نظر گرفته شود، توسعه دادند و سپس به حل عددی مدل، بر اساس روش تجزیه آدومین پرداختند.

۱.۱. ادبیات مساله و ضرورت تحقیق

بسیاری از مسائل علوم طبیعی نظیر فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، هواشناسی و علوم مهندسی نظیر برق، مکانیک، کامپیوتر و هوش مصنوعی در قالب‌هایی از مدل‌های ریاضی طراحی و پیاده‌سازی می‌شوند [۱-۳]. چنانچه در مدل ریاضی تولید شده، داده‌ها و اطلاعات، مبهم، نامطمئن و نادقیق باشند، آنگاه تئوری مجموعه‌های فازی به طور معمول برای تحلیل آن مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴-۷]. بررسی و تحلیل عملکرد بخش‌های مختلف بدن انسان، یکی از موضوعات جالب و مورد توجه محققان است. یکی از این مدل‌های ریاضی، مدل ریاضی مربوط به عملکرد کبد انسان است که بر اساس نتایج به دست آمده از تست بروموسولفاتین (BSP) تولید می‌شود. این مدل در [۸]، در قالب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی، به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) + by(t), \\ y'(t) = ax(t) - (b+d)y(t), \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، $x(0) = I > 0$ و $y(0) = 0$ است. در این مدل، مجهولات $x(t)$ و $y(t)$ ، به ترتیب میزان ماده BSP موجود در خون و کبد را در لحظه t ، پس از تزریق اولیه در خون، نشان می‌دهند. a ، b و d ضرایب ثابت مثبت نامعلوم هستند که نرخ انتقال BSP را نشان می‌دهند. این ضرایب از طریق آزمایش و مشاهدات بالینی به دست می‌آیند.

از آنجا که نتایج آزمایشگاهی از طریق اندازه‌گیری و سنجش یافت می‌شوند، معمولاً "غیر قطعی و نادقیق هستند. به طور دقیق‌تر، کاهش دقت و اریب بودن دستگاه‌های اندازه‌گیری کننده در اثر فرسودگی با گذشت زمان، کالیبره نکردن ابزار

یافت می‌شود [۱۵-۱۷، ۱۹، ۲۰، ۲۵، ۲۶]. در حالت کلی، انتخاب جواب، بستگی دارد به اینکه چه رفتاری از جواب دستگاه، مورد انتظار است و کدام جواب، بهتر می‌تواند مدل تحت مطالعه را تفسیر کند [۲۷، ۲۸]. ما ابتدا به تحلیل مساله در حالتی که همه داده‌ها به صورت اعداد فازی غیر حقیقی هستند، می‌پردازیم و سپس به منظور یافتن جواب‌های تحلیلی، مساله را به مدل‌های ساده‌تری تجزیه می‌کنیم و با اعمال شرایط خاص، روی فازی بودن درایه‌های ماتریس ضرایب و مقادیر اولیه، به مطالعه نظری هر مدل می‌پردازیم.

۴.۱. مراحل تحقیق و یافته‌ها

ابتدا، جزئیات فرایند حل مساله در حالت کاملاً فازی، جهت یافتن جواب‌های تحلیلی، تشریح می‌دهیم و نتایج وجود جواب یکتا را فراهم می‌کنیم (داده شده به صورت قضیه ۱،۳). دشواری و پیچیدگی‌های محاسباتی برای رسیدن به جواب‌های تحلیلی، را تشریح داده و در ادامه، جهت ساده‌سازی و دستیابی به جواب‌های تحلیلی، مساله در دو حالت مجزا از فازی بودن پارامترها، مطالعه می‌کنیم: ۱- حالتی که ضرایب a, b و d اعداد حقیقی مثبت بوده و مقدار اولیه I عددی فازی است. ۲- حالتی که ضرایب a, b اعداد فازی مثلی مثبت هم پهنا بوده و d و I اعداد حقیقی مثبت هستند. در هر یک از این حالات، به فرمول‌های جواب دست می‌یابیم که توسط قضایای ۱،۴ و ۱،۵ داده شده‌اند. در پایان، با حل دو مثال، به تشریح و به کارگیری عملی نتایج یافت شده، می‌پردازیم.

۲. مفاهیم اولیه

در این بخش، تعاریف اولیه، نمادها و برخی نتایج ضروری را مطرح می‌کنیم. اولین مفهوم در منطق فازی، مفهوم مجموعه‌های فازی است، یعنی مجموعه‌ای که در آن هر عضو دارای درجه‌ای از عضویت بین صفر تا یک است. اعداد فازی، نمونه

تئوری مجموعه‌های فازی، به منظور مدل‌بندی کردن مفاهیم ذهنی که مرزهای غیر دقیق دارند، برای اولین بار توسط پروفیسور لطفی زاده به دنیای علمی معرفی شد. به محض پیدایش ایده یک تابع با مقادیر فازی، ایده بعضی از انواع معادلات دیفرانسیل فازی نیز به وجود آمد. یکی از موضوعات اساسی در مواجهه با معادلات دیفرانسیل فازی استفاده از یک مفهوم مناسب مشتق‌پذیری در محیط فازی است [۱۱-۱۴]. تاکنون اکثر تحقیقات در زمینه معادلات دیفرانسیل فازی، به معادلات از مرتبه اول (ببینید برای نمونه [۱۵-۲۰]) و تا حدودی هم از مرتبه دوم (ببینید [۲۱، ۲۲]) اختصاص داده شده‌اند. با این حال، تا آنجا که دانش ما اجازه می‌دهد، تاکنون روشی تحلیلی یا روشی عددی، برای حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی ارائه نشده است. در واقع، بطور کلی، حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی بسیار دشوار است و به ضرایب و پارامترهای فازی و مفهوم مشتق فازی که بکار گرفته می‌شود، بستگی دارد. دستگاه (۱) در حالت فازی، یک حالت خاص از دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی متشکل از دو معادله با دو مجهول را نشان می‌دهد و نوآوری این تحقیق، آن است که با اعمال شرایط مطلوب، فرمول جواب‌های تحلیلی منحصر به فرد این دستگاه را به دست می‌آورد.

۳.۱. روش تحقیق

روش تحقیق در این مقاله، به صورت کتابخانه‌ای است. با مطالعه مقالات مرتبط با معادلات دیفرانسیل فازی و استفاده از نتایج یافت شده قبلی، به تحلیل و حل مدل می‌پردازیم. برای این منظور، از مفهوم مشتق‌پذیری هاکوه‌رای توسعه یافته [۲۳]، استفاده می‌کنیم. قابل ذکر است که، این مفهوم مشتق، ابزاری توانا و قابل اجرا، در حل معادلات دیفرانسیل فازی است که بر اساس آن، به طور معمول، دو جواب با رفتارهای متفاوت (یک جواب با پهنای صعودی و جواب دیگر با پهنای نزولی)

هایی از مجموعه های فازی هستند که امروزه در ریاضیات فازی، به صورت علمی زیر، تعریف می شوند.

تعریف ۱،۲ [۷]. یک عدد فازی u ، به صورت

$$[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$$

که نمایش α -برش u نامیده می شود، نشان داده می شود و در آن $u^-(\alpha)$ ، تابع صعودی، کراندار، پیوسته چپ در

$[0, 1]$ و پیوسته راست در $\alpha = 0$ است، تابع $u^+(\alpha)$ نزولی،

کراندار، پیوسته چپ در $[0, 1]$ و پیوسته راست در $\alpha = 0$

است و برای هر $\alpha \in [0, 1]$ داریم: $u^-(\alpha) \leq u^+(\alpha)$.

به طور دقیق تر، برای $\alpha \in (0, 1]$ داریم:

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_u(x) \geq \alpha\},$$

که در آن، $\mu_u(x)$ درجه عضویت x در عدد فازی u است و

$$[u]^* = \text{supp}(u) = \text{cl}\{x \in \mathbb{R} : \mu_u(x) > 0\},$$

که تکیه گاه u نامیده می شود. در اینجا، $\text{cl}(A)$ بستار مجموعه

A است. مجموعه تمام اعداد فازی تعریف شده روی خط

حقیقی \mathbb{R} را با نماد \mathbb{R}_F نشان می دهیم. برای $u, v \in \mathbb{R}_F$ و

$\lambda \in \mathbb{R}$ داریم [۱۹]:

$$[u \oplus v]^\alpha = [u^-(\alpha) + v^-(\alpha), u^+(\alpha) + v^+(\alpha)],$$

$$[\lambda \odot u]^\alpha = \begin{cases} [\lambda u^-(\alpha), \lambda u^+(\alpha)]; & \lambda \geq 0 \\ [\lambda u^+(\alpha), \lambda u^-(\alpha)]; & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$[u \odot v]^\alpha = [\min\{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\}, \max\{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\}]$$

ملاحظه می کنیم که اعمال حسابی روی اعداد فازی به اعمال حسابی روی بازه ها، بر اساس نمایش α -برش اعداد فازی، انتقال می یابد. تعریف مشابه، برای عمل تفاضل، به صورت زیر است.

تعریف ۲،۲ [۱۹]. دو عدد $u, v \in \mathbb{R}_F$ را در نظر بگیرید. اگر

عدد فازی w وجود داشته باشد به طوری که $u = v \oplus w$

آنگاه w تفاضل هاکوها را (برای سادگی تفاضل H -) دو عدد u

و v نامیده شده و با $w = u \ominus v$ نشان داده می شود.

اگر $u \ominus v$ موجود باشد، آنگاه α -برش های آن خواهد شد:

$$[u \ominus v]^\alpha = [u^-(\alpha) - v^-(\alpha), u^+(\alpha) - v^+(\alpha)].$$

همچنین، می نویسیم: $u \ominus u = 0$ که عدد فازی 0 همراه با

α -برش های $\{0\} = [0]^\alpha$ است. برای برخی خواص تفاضل-

H مراجع [۱۵، ۲۰، ۲۵، ۲۹] را پیشنهاد می کنیم.

متر هاسدروف، یک متر معروف در مجموعه اعداد فازی است

که برای $u, v \in \mathbb{R}_F$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$D(u, v) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)|\}$$

مجموعه (\mathbb{R}_F, D) یک فضای متریک کامل است [۳۰].

در این مقاله، نیاز داریم تا اعداد فازی، از نظر علامت، شناسایی

شوند. برای این منظور از تعریف زیر استفاده می کنیم.

تعریف ۳،۲ [۱۷]. عدد فازی u را مثبت می نامیم، هرگاه:

$$u^-(\alpha) > 0, \forall \alpha \in [0, 1],$$

و آن را منفی می نامیم، هرگاه:

$$u^+(\alpha) < 0, \forall \alpha \in [0, 1].$$

عدد فازی u را عدد فازی تقریباً "صفر می نامیم، هرگاه برای

تمام $\alpha \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$u^-(\alpha) \leq 0, u^+(\alpha) \geq 0.$$

مجموعه اعداد فازی مثبت، منفی و تقریباً "صفر را به ترتیب با

نمادهای \mathbb{R}_F^+ ، \mathbb{R}_F^- و \mathbb{R}_F^0 نشان می دهیم.

$$[f(t)]^\alpha = [f^-(t; \alpha), f^+(t; \alpha)]$$

برای هر $t \in U$ و $\alpha \in [0, 1]$ نشان داده می‌شود.

اکنون به مفهوم مشتق‌پذیری هاکوهارای توسعه یافته، می‌پردازیم. تعریف ۲، ۴. [۲۳]. تابع $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ و نقطه $t \in U$ را در

نظر بگیرید. f, GH -مشتق‌پذیر در t نامیده می‌شود، هرگاه:

(۱): عضو $f'(t.) \in \mathbb{R}_F$ وجود داشته باشد به طوری‌که، برای

تمام $h > 0$ به اندازه کافی نزدیک به صفر تفاضلات- H ,

$$f(t.) \ominus f(t. - h) \text{ و } f(t. + h) \ominus f(t.)$$

داشته باشند و

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t. + h) \ominus f(t.)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t.) \ominus f(t. - h)}{h} = f'(t.),$$

یا

(۲): عضو $f'(t.) \in \mathbb{R}_F$ وجود داشته باشد به طوری‌که، برای

تمام $h > 0$ به اندازه کافی نزدیک به صفر تفاضلات- H .

$$f(t. - h) \ominus f(t.) \text{ و } f(t. + h) \ominus f(t.)$$

داشته باشند و

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t. - h) \ominus f(t.)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t.) \ominus f(t. + h)}{-h} = f'(t.),$$

در این مقاله، می‌گوییم تابع f ، f -(j) مشتق‌پذیر روی U است (برای $j \in \{1, 2\}$ ، هرگاه f در هر نقطه $t \in U$ یک تابع $-GH$ مشتق‌پذیر، در معنای (j) از تعریف فوق، باشد.

دو قضیه بعد، نحوه بکارگیری عملی مفهوم $-GH$ مشتق‌پذیری را مشخص می‌کنند.

قضیه ۲، ۱. [۳۱، ۳۲].

(۱). اگر $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ یک تابع (۱)-مشتق‌پذیر روی U باشد،

آنگاه برای هر مقدار ثابت $\alpha \in [0, 1]$ ، تابع‌های $f^-(t; \alpha)$ و

$f^+(t; \alpha)$ روی U ، مشتق‌پذیر بوده و داریم:

$$[f'(t)]^\alpha = [f^-(t; \alpha), f^+(t; \alpha)], \forall t \in U.$$

اعمال حسابی فازی روی مجموعه اعداد فازی مثبت یا منفی به

سادگی انجام می‌شوند. در واقع داریم:

$$[u \odot v]^\alpha = \begin{cases} [u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)]; & u, v \in \mathbb{R}_F^+, \\ [u^+(\alpha)v^+(\alpha), u^-(\alpha)v^-(\alpha)]; & u, v \in \mathbb{R}_F^-, \\ [u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha)]; & u \in \mathbb{R}_F^+, v \in \mathbb{R}_F^- \end{cases}$$

و اگر $v \in \mathbb{R}_F^+ \cup \mathbb{R}_F^-$ باشد، آنگاه:

$$\left[\frac{1}{v}\right]^\alpha = \left[\frac{1}{v^+(\alpha)}, \frac{1}{v^-(\alpha)}\right],$$

و برای $u \in \mathbb{R}_F$ عمل تقسیم $\frac{u}{v}$ به صورت $\frac{1}{v} \odot u$ تعریف می‌شود.

برخی خواص محاسباتی اعداد فازی مثبت و منفی در

[۱۷] داده شده است.

یک مجموعه از اعداد فازی پرکاربرد، به اعداد فازی مثلثی

شناخته شده‌اند. یک چنین عددی، با سه تایی

$$u = (u^l, u^c, u^r)$$

عدد و u^l و u^r به ترتیب مقادیر چپ و راست عدد نامیده

می‌شوند و داریم: $u^l < u^c < u^r$. هم چنین، u دارای α -برش

زیر است:

$$[u]^\alpha = [u^l + (u^c - u^l)\alpha, u^r - (u^r - u^c)\alpha].$$

مجموعه تمام اعداد فازی مثلثی را با نماد TR_F نشان می‌دهیم.

اگر $u = (u^l, u^c, u^r) \in TR_F$ داشته باشیم:

$$u^c - u^l = u^r - u^c = l_u,$$

آنگاه u را یک عدد فازی مثلثی متقارن با پهنا l_u می‌نامیم و

برای سادگی آن را با دوتایی $u = (u^c, l_u)$ نمایش می‌دهیم

و به سادگی می‌توان دید:

$$[u]^\alpha = [u^c + l_u(-1 + \alpha), u^c + l_u(1 - \alpha)].$$

در نمایی دیگر

$$u = u^c \ominus l_u(0, 1).$$

که در آن $(0, 1)$ عدد فازی مثلثی متقارن با راس صفر و پهنا

یک را نشان می‌دهد. مجموعه تمام اعداد فازی مثلثی متقارن را

با نماد $T^S \mathbb{R}_F$ نشان می‌دهیم.

در این مقاله، بازه‌ی حقیقی $U = (0, T)$ برای $T > 0$ ، ثابت

فرض می‌شود و یک تابع فازی مقدار $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ در فرم

$$f'(t) = (f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t))^t, \forall t \in U.$$

اکنون منظور از جواب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی، را مشخص می‌کنیم.

تعریف ۲.۷. فرض کنید $m, n > 0$ دو عدد طبیعی باشند.

دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'_1(t) = c_{11} \odot y_1(t) \oplus c_{12} \odot y_2(t) \oplus \dots \oplus c_{1n} \odot y_n(t), \\ y'_2(t) = c_{21} \odot y_1(t) \oplus c_{22} \odot y_2(t) \oplus \dots \oplus c_{2n} \odot y_n(t), \\ \vdots \\ y'_m(t) = c_{m1} \odot y_1(t) \oplus c_{m2} \odot y_2(t) \oplus \dots \oplus c_{mn} \odot y_n(t), \\ y_1(0) = y_{10}, y_2(0) = y_{20}, \dots, y_n(0) = y_{n0}. \end{cases} \quad (2)$$

که در آن $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ مقادیر اولیه معلوم و $t \in U$ است. اگر تمامی ضرایب c_{ij} ها و مقادیر اولیه y_{i0} ها، برای $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$ اعداد فازی باشند، آنگاه دستگاه (۲) کاملاً فازی نامیده می‌شود. چنانچه، تنها مقادیر اولیه y_{i0} ها، اعداد فازی باشند، آنگاه دستگاه (۲) یک دستگاه مقدار اولیه فازی گفته می‌شود. برای $k \in \{1, 2\}$ تابع برداری فازی مقدار $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^t$ از دستگاه (۲) نامیده می‌شود، هرگاه آن k -مشتق‌پذیر بوده و برای هر $t \in U$ در دستگاه (۲) صدق کند.

نکته ۱.۲. اگر $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^t$ جواب نوع (۱) از دستگاه (۲) باشد، پس هر y_i تابعی (۱)-مشتق‌پذیر است. این ایجاب می‌کند که پنهانهای $L_\alpha(y_i)$ تابع‌هایی صعودی باشند. همین‌طور، اگر تابع برداری $y(t)$ جواب نوع (۲) از دستگاه (۲) باشد، آنگاه $L_\alpha(y_i)$ تابع‌هایی نزولی هستند (برای جزئیات بیشتر مراجع [۲۴، ۲۵، ۲۷] پیشنهاد می‌شود).

۳. حل مدل ریاضی کبد انسان با داده‌های فازی

تحت GH-مشتق‌پذیری

(۲). اگر $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ یک تابع (۲)-مشتق‌پذیر روی U باشد،

آنگاه برای هر مقدار ثابت $\alpha \in [0, 1]$ ، تابع‌های $f^-(t; \alpha)$ و $f^+(t; \alpha)$ روی U ، مشتق‌پذیر بوده و داریم:

$$[f'(t)]^\alpha = [f^{+'}(t; \alpha), f^{-'}(t; \alpha)], \forall t \in U.$$

قضیه ۲.۲. [۱۵، ۲۸]. فرض کنید $j \in \{1, 2\}$ مقداری ثابت

است و $\lambda \in \mathbb{R}$ است. اگر $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ تابع‌هایی (j)-

مشتق‌پذیر روی U باشند، آنگاه تابع $f \oplus \lambda \odot g$ نیز (j)-

مشتق‌پذیر روی U بوده و داریم:

$$(f \oplus \lambda \odot g)'(t) = f'(t) \oplus \lambda \odot g'(t).$$

یکی از مفاهیم دیگر که در بخش‌های بعد، از آن استفاده خواهیم کرد مفهوم پهنای یک تابع مقدار شده فازی است.

تعریف ۲.۵. [۲۵، ۲۷]. تابع $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ همراه با α -برش

های $[f(t)]^\alpha = [f^-(t; \alpha), f^+(t; \alpha)]$ را در نظر بگیرید.

برای $\alpha \in [0, 1]$ ثابت، طول یا پهنای α -برش f ، تابع

$L_\alpha(f): U \rightarrow [0, +\infty)$ با ضابطه زیر است:

$$(L_\alpha(f))(t) = f^+(t; \alpha) - f^-(t; \alpha).$$

از آنجا که، جواب یک دستگاه معادلات را می‌تواند در قالب یک تابع برداری بیان نمود، لذا، تعریف مشتق‌پذیری یک تابع برداری مقدار شده فازی را، مطرح می‌کنیم.

تعریف ۲.۶. فرض کنید $j \in \{1, 2\}$ و عدد طبیعی $n > 1$

مقادیر ثابت باشند. فرض کنید تابع $f: U \rightarrow \mathbb{R}_F^n$ یک تابع

برداری فازی مقدار، باشد، به این معنا که

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))^t$$

(نمای t به معنای ترانواده است) و در آن $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}_F$ برای

$i = 1, 2, \dots, n$ ، تابع‌هایی فازی مقدار هستند. ما می‌گوییم

f ، (j)-مشتق‌پذیر روی U است، هرگاه f_i ها تابع‌هایی (j)-

مشتق‌پذیر روی U باشند و در این حالت، تعریف می‌کنیم:

بنابراین، ما به جواب نوع (۲) از دستگاه (۳)، به صورت $y(t) = (y_1(t), 0)^t$ همراه با $y_1(t)$ داده شده به صورت (۵)، می‌رسیم. اما این جواب نمی‌تواند جواب مطلوب و مورد انتظار باشد. زیرا بر اساس آن، مقدار BSP موجود در کبد (یعنی $y_2(t)$)، همواره صفر باقی می‌ماند. لذا، در ادامه، به مطالعه دستگاه (۳) تحت (۱) - مشتق‌پذیری می‌پردازیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم تابع های $y_1, y_2: U \rightarrow \mathbb{R}_F^+$ موجودند به طوری که $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ جواب نوع (۱) از دستگاه (۳) باشد. فرض کنید $\alpha \in [0, 1]$ دلخواه، اما، ثابت باشد. با در نظر گرفتن α -برش

$$[y_i(t)]^\alpha = [y_i^-(t; \alpha), y_i^+(t; \alpha)], i = 1, 2.$$

به وسیله قضیه ۱، ۲، داریم:

$$[y_i'(t)]^\alpha = [y_i'^-(t; \alpha), y_i'^+(t; \alpha)], i = 1, 2.$$

با جایگزینی در (۳) و استفاده از اعمال حساب فازی، به دستگاه غیر فازی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} y_1'^-(t; \alpha) = -a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) + b^-(\alpha)y_2^-(t; \alpha), \\ y_1'^+(t; \alpha) = -a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) + b^+(\alpha)y_2^+(t; \alpha), \\ y_2'^-(t; \alpha) = a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) - (b^+(\alpha) + d^+(\alpha))y_2^+(t; \alpha), \\ y_2'^+(t; \alpha) = a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) - (b^-(\alpha) + d^-(\alpha))y_2^-(t; \alpha), \\ y_1^-(0; \alpha) = I^-(\alpha), \\ y_1^+(0; \alpha) = I^+(\alpha), \\ y_2^-(0; \alpha) = 0, \\ y_2^+(0; \alpha) = 0. \end{cases}$$

(۶)

با تعریف ماتریس

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -a^+(\alpha) & b^-(\alpha) \\ \cdot & \cdot & a^+(\alpha) & -c^-(\alpha) \\ a^-(\alpha) & b^+(\alpha) & \cdot & \cdot \\ a^-(\alpha) & -c^+(\alpha) & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (۷)$$

و تابع برداری

در این بخش، به جزئیات حل مدل ریاضی کبد انسان که به صورت دستگاه زیر، متشکل از معادلات دیفرانسیل فازی، در نظر گرفته شده است، می‌پردازیم:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -a \odot y_1(t) \oplus b \odot y_2(t), t \in U, \\ y_2'(t) = a \odot y_1(t) \oplus (-1)(b + d) \odot y_2(t), \\ y_1(0) = I, \\ y_2(0) = 0, \end{cases} \quad (۳)$$

که در آن مقادیر I, d, b, a در حالت کلی، اعداد فازی مثبت هستند. چون $y_1(t)$ و $y_2(t)$ به ترتیب مقدار BSP در خون و کبد را، در لحظه t نشان می‌دهند، پس انتظار می‌رود، آنها تابع هایی فازی مقدار نامنفی باشند. ابتدا، اجازه دهید فرض کنیم $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ جواب نوع (۲) از دستگاه (۳) باشد. در این صورت، چون $y_2(0) = 0$ پس، طبق نکته ۱، ۲، باید داشته باشیم:

$$y_2(t) = 0, \forall t \in U.$$

لذا دستگاه (۳)، به یک معادله دیفرانسیل یک مجهولی زیر تقلیل می‌یابد:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -a \odot y_1(t), t \in U, \\ y_1(0) = I. \end{cases} \quad (۴)$$

طبق نکته ۳، ۴ در [۱۷]، جواب (۴)، در معادله زیر صدق می‌کند:

$$e^{t \odot a} \odot y_1(t) = I,$$

که به سادگی نتیجه می‌دهد:

$$[y_1(t)]^\alpha = [e^{-ta^-(\alpha)} I^-(\alpha), e^{-ta^+(\alpha)} I^+(\alpha)]. \quad (۵)$$

طبق خاصیت ۱ در [۲۷]، این تابع (۲) - مشتق‌پذیر بوده و به سادگی می‌توان چک کرد که آن در معادله (۴) صدق می‌کند.

$$\max\{|y_1^{-'}(t; \alpha) + a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) - b^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha)|, |y_1^{+'}(t; \alpha) + a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) - b^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha)|\} = 0,$$

همین طور:

$$\max\{|y_1^{-'}(t; \alpha) - a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) + c^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha)|, |y_1^{+'}(t; \alpha) - a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) + c^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha)|\} = 0.$$

که در آن $c = b + d$ است. چون α عددی دلخواه بوده است،

نتیجه می‌گیریم:

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|y_1^{-'}(t; \alpha) + a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) - b^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha)|, |y_1^{+'}(t; \alpha) + a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) - b^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha)|\} = 0,$$

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|y_1^{-'}(t; \alpha) - a^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha) + c^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha)|, |y_1^{+'}(t; \alpha) - a^+(\alpha)y_1^+(t; \alpha) + c^-(\alpha)y_1^-(t; \alpha)|\} = 0.$$

این دو تساوی اخیر، با عنایت به فرض اینکه $y_1(t)$ و $y_2(t)$ تابع های فازی مقدار مثبت و (۱)-مشتقپذیر هستند، به ترتیب، به این معنا هستند که:

$$D(y_1'(t), -a \odot y_1(t) \oplus b \odot y_2(t)) = 0,$$

و

$$D(y_2'(t), a \odot y_1(t) \oplus (-1)c \odot y_2(t)) = 0.$$

بنابراین، $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ جواب نوع (۱) از دستگاه

(۳) است. در نهایت، اگر $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^t$ جواب

$$z_\alpha(t) = (y_1^-(t; \alpha), y_1^+(t; \alpha), y_2^-(t; \alpha), y_2^+(t; \alpha))^t \quad (۸)$$

دستگاه (۶) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر، خلاصه نمود:

$$\begin{cases} z_\alpha'(t) = A_\alpha z_\alpha(t), & t \in U, \\ z_\alpha(0) = (I^-(\alpha), 0, I^+(\alpha), 0)^t. \end{cases} \quad (۹)$$

اکنون، در قضیه بعد، شرایط وجود جواب یکتای دستگاه (۹) را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱،۳.

(۱). اگر دستگاه فازی (۳)، روی بازه U دارای جواب یکتای

مثبت نوع (۱)، $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ همراه نمایش

$[y_i(t)]^\alpha = [y_i^-(t; \alpha), y_i^+(t; \alpha)]$ ، $i = 1, 2$ برش $-\alpha$

باشد، آنگاه برای هر $\alpha \in [0, 1]$ دلخواه ثابت، تابع برداری

$Z_\alpha(t)$ در (۸)، جواب یکتای دستگاه (۹) است.

(۲). اگر برای هر $\alpha \in [0, 1]$ دستگاه (۹)، روی بازه U دارای

جواب یکتای $Z_\alpha(t)$ در (۸)، باشد، به طوری که

$[y_i^-(t; \alpha), y_i^+(t; \alpha)]$ برای $i = 1, 2$ به عنوان $-\alpha$ -برش

تابع هایی فازی مقدار مثبت و (۱)-مشتقپذیر روی U ، تعریف

شده باشند، آنگاه، تابع $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ همراه با

$$[y_i(t)]^\alpha = [y_i^-(t; \alpha), y_i^+(t; \alpha)], i = 1, 2.$$

جواب یکتای مثبت نوع (۱)، از دستگاه (۳) است.

اثبات: قسمت (۱) واضح است. اجازه دهید به اثبات قسمت (۲)

بپردازیم. عدد $\alpha \in [0, 1]$ دلخواه، اما ثابت، بگیرد. چون

$Z_\alpha(t)$ جواب مثبت یکتای دستگاه (۹) است، پس، مولفه های

آن، یعنی $y_i^-(t; \alpha)$ و $y_i^+(t; \alpha)$ تابع های مثبت مشتقپذیر

روی U و صادق در (۶) هستند. لذا برای هر $t \in U$ داریم:

$$\lambda_{r\alpha} = \sqrt{\frac{p_\alpha - \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}}, \lambda_{i\alpha} = \sqrt{\frac{p_\alpha + \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}}$$

$$\Delta_\alpha = p_\alpha^2 - 4q_\alpha, \quad \text{که در آن:}$$

$$p_\alpha = a^-(\alpha)a^+(\alpha) + a^-(\alpha)b^-(\alpha) + a^+(\alpha)b^+(\alpha) + c^-(\alpha)c^+(\alpha),$$

$$q_\alpha = (a^+(\alpha)c^-(\alpha) - a^+(\alpha)b^-(\alpha)) \times (a^-(\alpha)c^+(\alpha) - a^-(\alpha)b^+(\alpha)),$$

$$\text{و } c = b + d \text{ است.}$$

اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم، $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ، $\lambda_{i\alpha}$ ها، اعداد حقیقی هستند. چون $a, b, d \in \mathbb{R}_F^+$ و در نتیجه $c \in \mathbb{R}_F^+$ ، پس، برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، تک تک جملات p_α مثبت بوده و لذا $p_\alpha > 0$ همچنین، داریم:

$$\begin{aligned} q_\alpha &= (a^+(\alpha)c^-(\alpha) - a^+(\alpha)b^-(\alpha)) \\ &\quad \times (a^-(\alpha)c^+(\alpha) - a^-(\alpha)b^+(\alpha)) \\ &= (a^+(\alpha)(b^-(\alpha) + d^-(\alpha)) \\ &\quad - a^+(\alpha)b^-(\alpha)) \\ &\quad \times (a^-(\alpha)(b^+(\alpha) + d^+(\alpha)) \\ &\quad - a^-(\alpha)b^+(\alpha)) \\ &= a^-(\alpha)a^+(\alpha)d^-(\alpha)d^+(\alpha) \\ &> 0. \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &= p_\alpha^2 - 4q_\alpha \\ &= (a^-(\alpha)a^+(\alpha) \\ &\quad + a^-(\alpha)b^-(\alpha) + a^+(\alpha)b^+(\alpha) + c^-(\alpha)c^+(\alpha))^2 \\ &\quad - 4(a^-(\alpha)a^+(\alpha)d^-(\alpha)d^+(\alpha)) \\ &> (a^-(\alpha)a^+(\alpha) + d^-(\alpha)d^+(\alpha))^2 \\ &\quad - 4a^-(\alpha)a^+(\alpha)d^-(\alpha)d^+(\alpha) \\ &= (a^-(\alpha)a^+(\alpha) - d^-(\alpha)d^+(\alpha))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

بنابراین: $0 < \Delta_\alpha = p_\alpha^2 - 4q_\alpha < p_\alpha^2$ که نتیجه می‌دهد:

مثبت نوع (۱) دیگری از (۳) باشد، آنگاه طبق قسمت (۱)، واحد های بالا و پایین مولفه های آن، یعنی $x_i^+(t; \alpha)$ و $x_i^-(t; \alpha)$

برای $i = 1, 2$ ، جواب دستگاه (۹) هستند، که تناقض دارد با فرض اینکه $y_i^+(t; \alpha)$ و $y_i^-(t; \alpha)$ برای $i = 1, 2$ جواب مثبت یکنای (۹) هستند. بنابراین $x(t) = y(t)$ □

ما حالا، به ساختار جواب دستگاه ماتریسی (۹) و فرایند یافتن آن، اشاره می‌کنیم [۳۳]. دستگاه (۹) دارای جواب در شکل ماتریسی زیر است:

$$z_\alpha(t) = e^{tA_\alpha} z_\alpha(0). \quad (10)$$

برای محاسبه e^{tA_α} با استفاده از نتایج ماتریسی و جبر خطی، کافی است فرم ژوردن ماتریس A_α یافت شود. اگر H_α ماتریسی باشد که ستون های آن بردارهای ویژه ماتریس A_α باشند، آنگاه فرم ژوردن A_α ماتریس $J_\alpha = H_\alpha^{-1} A_\alpha H_\alpha$ خواهد بود. با در اختیار داشتن این ماتریس داریم:

$$e^{tA_\alpha} = H_\alpha e^{tJ_\alpha} H_\alpha^{-1} \quad (11)$$

در نهایت، با جایگزینی (۱۱) در (۱۰)، تابع برداری $z_\alpha(t)$ یافت می‌شود. اما در این فرایند، ساختار ماتریس های e^{tA_α} و H_α به تمایز یا تکراری بودن مقادیر ویژه ماتریس A_α بستگی دارد، که در ادامه به آن می‌پردازیم.

خاصیت ۱،۳. فرض کنید $a, b, d \in \mathbb{R}_F^+$. برای ثابت دلخواه $\alpha \in [0, 1]$ ، ماتریس بلوکی A_α داده شده در (۷)، دارای چهار مقدار ویژه متمایز زیر است:

$$\lambda_{1\alpha} = -\sqrt{\frac{p_\alpha + \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}}, \lambda_{2\alpha} = -\sqrt{\frac{p_\alpha - \sqrt{\Delta_\alpha}}{2}}$$

نکته ۳، ۲. با توجه به قضیه ۱، ۳، به منظور اطمینان از وجود جواب مثبت نوع (۱) برای دستگاه (۳)، بر پایه حل دستگاه‌های (۹)، با محدودیت‌های زیادی مواجه هستیم که الزام می‌کند، مجموعه جواب‌های دستگاه‌های (۹)، از ویژگی‌های خاصی برخوردار باشند. برای نمونه، اگر $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ و $z_\alpha(t)$ و $z_\beta(t)$ معرفی شده در (۸)، به ترتیب جواب‌های دستگاه‌های (۹) متناظر با α و β روی U باشند، آنگاه، باید نامساوی‌های زیر برقرار باشند:

$$0 \leq y_i^-(t; \alpha) \leq y_i^-(t; \beta) \leq y_i^+(t; \beta) \leq y_i^+(t; \alpha), \forall t \in U, i = 1, 2.$$

علاوه بر این، با توجه به خاصیت ۳، ۱ و نکته ۱، ۳، حل هر دستگاه (۹)، حجم محاسباتی زیادی را در بر می‌گیرد. البته، این شرایط سخت وجود جواب و پیچیدگی‌های محاسباتی، مورد انتظار بوده است چرا که، دستگاه (۳)، نمایانگر مدل ریاضی کبد انسان، در حالت کاملاً فازی، است.

۴. حل مدل همراه با مقدار اولیه فازی

در این بخش، مدل (۳) را در حالتی که ضرایب a, b, d اعداد حقیقی مثبت بوده و تنها، مقدار اولیه I یک عدد فازی غیر حقیقی است، مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این حالت، دستگاه (۶)، به دستگاه ساده‌تر زیر، قابل بازنویسی است:

$$\begin{cases} y_1^-(t; \alpha) = -ay_1^+(t; \alpha) + by_2^-(t; \alpha), \\ y_1^+(t; \alpha) = -ay_1^-(t; \alpha) + by_2^+(t; \alpha), \\ y_2^-(t; \alpha) = ay_1^-(t; \alpha) - cy_2^+(t; \alpha), \\ y_2^+(t; \alpha) = ay_1^+(t; \alpha) - cy_2^-(t; \alpha), \\ y_1^-(0; \alpha) = I^-(\alpha), \\ y_1^+(0; \alpha) = I^+(\alpha), \\ y_2^-(0; \alpha) = 0, \\ y_2^+(0; \alpha) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

همراه با $c = b + d$ قابل توجه است که چون ضرایب، اعداد حقیقی هستند، در تبدیل دستگاه فازی (۳) به دستگاه غیر فازی (۱۲)، لزومی ندارد تابع‌های مقدار فازی $y_1(t)$ و $y_2(t)$

به این ترتیب، هر یک از $\lambda_{i\alpha}$ ها اعداد حقیقی هستند. همچنین، واضح است که:

$$\lambda_{1\alpha} < \lambda_{2\alpha} < \lambda_{3\alpha} < \lambda_{4\alpha}.$$

اکنون فرض کنید λ_α یک مقدار ویژه ماتریس A_α باشد. پس باید دترمینان ماتریس $A_\alpha - \lambda_\alpha I$ برابر صفر باشد. با محاسبه مستقیم، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda_\alpha & 0 & -a^+(\alpha) & b^+(\alpha) \\ 0 & -\lambda_\alpha & a^+(\alpha) & -c^-(\alpha) \\ -a^-(\alpha) & b^+(\alpha) & -\lambda_\alpha & 0 \\ a^-(\alpha) & -c^+(\alpha) & 0 & -\lambda_\alpha \end{vmatrix} \\ &= \lambda_\alpha^4 \\ &\quad - (a^-(\alpha)a^+(\alpha) \\ &\quad + a^-(\alpha)b^-(\alpha) + a^+(\alpha)b^+(\alpha) + c^-(\alpha)c^+(\alpha))\lambda_\alpha^3 \\ &\quad + (a^+(\alpha)c^-(\alpha) - a^+(\alpha)b^-(\alpha)) \\ &\quad \times (a^-(\alpha)c^+(\alpha) - a^-(\alpha)b^+(\alpha)) \\ &= \lambda_\alpha^4 - p_\alpha \lambda_\alpha^3 + q_\alpha. \end{aligned}$$

بنابراین، $\lambda_\alpha^4 - p_\alpha \lambda_\alpha^3 + q_\alpha = 0$ معادله مشخصه ماتریس A_α بوده که به وضوح، ریشه‌های آن، همان $\lambda_{i\alpha}$ ها، برای $i = 1, 2, 3, 4$ هستند. □

نکته ۳، ۱. با توجه به خاصیت ۱، ۳، چون مقادیر ویژه ماتریس A_α همگی حقیقی و متمایز هستند، یادآوری می‌کنیم که فرم ژوردن آن، به صورت ماتریس قطری زیر است:

$$J_\alpha = \text{diag}(\lambda_{1\alpha}, \lambda_{2\alpha}, \lambda_{3\alpha}, \lambda_{4\alpha}),$$

و داریم:

$$e^{tJ_\alpha} = \text{diag}(e^{\lambda_{1\alpha} t}, e^{\lambda_{2\alpha} t}, e^{\lambda_{3\alpha} t}, e^{\lambda_{4\alpha} t}),$$

همچنین، ماتریس H_α ، باید بگونه‌ای یافت شود که:

$$H_\alpha J_\alpha = A_\alpha H_\alpha$$

$$p_1(t; \alpha) = \left(\left(\frac{c - a + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{\lambda_1 t} + \left(\frac{a - c + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{\lambda_2 t} \right) (I^+(\alpha) - I^-(\alpha)), \quad (15)$$

$$p_2(t; \alpha) = \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) (I^+(\alpha) - I^-(\alpha)), \quad (16)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \frac{a + c - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + c + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (a + c)^2 - \varepsilon ad. \quad (17)$$

اثبات: ما دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۳) را براساس روش ذکر

شده در بخش قبل، با یافتن ماتریس ژوردن ماتریس ضرایب

دستگاه، یعنی

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & c \end{bmatrix}$$

حل می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که λ_1 و λ_2 داده شده در

(۱۷)، مقادیر ویژه A بوده و بردارهای ویژه متناظر، به ترتیب

$$v_1 = \left(1, \frac{\lambda_1 - a}{b} \right)^t,$$

$$v_2 = \left(1, \frac{\lambda_2 - a}{b} \right)^t.$$

هستند. در اینجا، توجه می‌کنیم که $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ است. زیرا

از اینکه a, b, d مثبت هستند، نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta = (a + c)^2 - \varepsilon ad = (a + b + d)^2 - \varepsilon ad > (a + d)^2 - \varepsilon ad = (a - d)^2 \geq 0,$$

مثبت فرض شوند. لذا، طبق قضیه ۱،۳، کافی است مولفه‌های $y_i^+(t; \alpha)$ و $y_i^-(t; \alpha)$ برای $i \in \{1, 2\}$ از بردارهای جواب دستگاه (۱۲)، به ترتیب، واحدهای پایین و بالای α -برش یک تابع فازی مقدار را، تعریف کنند.

برای یافتن جواب دستگاه (۱۲)، بجای فرایند مطرح شده در بخش قبل، می‌توانیم به صورت ساده‌تر زیر عمل کنیم. برای $i = 1, 2$ قرار دهید:

$$p_i(t; \alpha) = y_i^+(t; \alpha) - y_i^-(t; \alpha), \quad t \in U, \alpha \in [0, 1],$$

$$q_i(t; \alpha) = y_i^+(t; \alpha) + y_i^-(t; \alpha), \quad t \in U, \alpha \in [0, 1].$$

با تفریق معادله اول از معادله دوم و تفریق معادله سوم از معادله چهارم دستگاه (۱۲)، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} p_1'(t; \alpha) = ap_1(t; \alpha) + bp_2(t; \alpha), \\ p_2'(t; \alpha) = ap_1(t; \alpha) + cp_2(t; \alpha). \end{cases} \quad (13)$$

این دستگاه، با توجه به مقادیر اولیه داده شده در (۱۲)، دارای مقادیر اولیه زیر است:

$$p_1(0; \alpha) = I^+(\alpha) - I^-(\alpha), \quad p_2(0; \alpha) = 0.$$

به طور مشابه، با جمع دو معادله اول و دو معادله دوم (۱۲)، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} q_1'(t; \alpha) = -aq_1(t; \alpha) + bq_2(t; \alpha), \\ q_2'(t; \alpha) = aq_1(t; \alpha) - cq_2(t; \alpha), \\ q_1(0; \alpha) = I^+(\alpha) + I^-(\alpha), \\ q_2(0; \alpha) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

بنابراین، برای حل دستگاه 4×4 (۱۲) کافی است، دو دستگاه 2×2 مجزای (۱۳) و (۱۴) را حل کنیم (لذا حجم محاسبات کاهش می‌یابد [۳۴]). از آنجا که $p_i(t; \alpha)$ پهنای α -برش $y_i(t)$ از جواب دستگاه اصلی (۳)، است، پس باید مثبت باشد. لم زیر این اطمینان را فراهم می‌کند که، تابع‌های صادق در دستگاه (۱۳)، تابع‌های حقیقی مثبت، هستند.

لم ۱،۴. برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، دستگاه (۱۳) دارای جواب مثبت

زیر است:

$$a - c + \sqrt{\Delta} > 0.$$

به طور مشابه، اگر $a > c$ ، آنگاه از (۱۸) و نا مساوی اخیر، نتیجه می‌گیریم:

$$c - a + \sqrt{\Delta} > 0.$$

به این ترتیب، $p_1(t; \alpha) > 0$ و اثبات تمام است. □

حالا، به ساختار جواب مثبت دستگاه (۱۴)، می‌پردازیم.

لم ۲، ۴. برای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، دستگاه (۱۴) دارای جواب مثبت زیر است:

$$q_1(t; \alpha) = \left(\left(\frac{c - a + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{a - c + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_2 t} \right) (I^+(\alpha) + I^-(\alpha)), \quad (19)$$

$$q_2(t; \alpha) = \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) (I^+(\alpha) - I^-(\alpha)), \quad (20)$$

که در آن Δ ، λ_1 و λ_2 در (۱۷) داده شده‌اند.

اثبات: ماتریس ضرایب دستگاه (۱۴) به صورت زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} -a & b \\ a & -c \end{bmatrix}.$$

به سادگی می‌توان دید، B دارای مقادیر ویژه زیر است:

$$\mu_1 = \frac{-(a+c) + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \mu_2 = \frac{-(a+c) - \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(a+c)^2 - \epsilon ad} < |a+c| = a+c.$$

بنابراین:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b} & \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

با استفاده از این ماتریس‌ها، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1(t; \alpha) \\ p_2(t; \alpha) \end{pmatrix} &= H e^{tJ} H^{-1} \begin{pmatrix} p_1(0; \alpha) \\ p_2(0; \alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2b} & \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2b} \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdot \\ \cdot & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} & -\frac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} & \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I^+(\alpha) - I^-(\alpha) \\ \cdot \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{\lambda_1 t} + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{\lambda_2 t} \\ \left(\frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{\lambda_1 t} - \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{\epsilon b \sqrt{\Delta}} (I^+(\alpha) - I^-(\alpha)) \\ \frac{c-a-\sqrt{\Delta}}{\epsilon b \sqrt{\Delta}} (I^+(\alpha) - I^-(\alpha)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} (c-a+\sqrt{\Delta})(a-c+\sqrt{\Delta}) &= \Delta - (a-c)^2 \\ &= (a+c)^2 - \epsilon ad - (a-c)^2 \\ &= \epsilon a(c-d) = \epsilon ab. \end{aligned} \quad (18)$$

و همین‌طور:

$$(c-a-\sqrt{\Delta})(c-a+\sqrt{\Delta}) = -\epsilon ab.$$

لذا، $p_1(t; \alpha)$ و $p_2(t; \alpha)$ در (۱۵) و (۱۶)، جواب دستگاه

(۱۳) هستند. چون $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ به وضوح داریم

$p_2(t; \alpha) > 0$ در مورد $p_1(t; \alpha)$ اگر $a = c$ ، آنگاه به

وضوح آن یک تابع مثبت است. اگر $a < c$ ، پس:

$$c - a + \sqrt{\Delta} > 0.$$

از (۱۸) و اینکه a, b مثبت هستند، پی می‌بریم که

$$y_1(t) = \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_1 t) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_2 t) \right) \odot I \oplus (-1) \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_1 t) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_2 t) \right) \odot I, \quad (21)$$

$$y_2(t) = \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\sinh(\lambda_2 t) - \sinh(\lambda_1 t)) \odot I \oplus (-1) \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\cosh(\lambda_2 t) - \cosh(\lambda_1 t)) \odot I, \quad (22)$$

که در آن Δ , λ_1 و λ_2 در (۱۷) داده شده‌اند.

اثبات: از آنجا که طبق لم ۱،۴ و لم ۲،۴، تابع‌های q_i و p_i ، $i = 1, 2$ ، مثبت هستند و اینکه:

$$y_i^-(t; \alpha) = \frac{1}{\alpha} (q_i(t; \alpha) - p_i(t; \alpha)),$$

$$y_i^+(t; \alpha) = \frac{1}{\alpha} (q_i(t; \alpha) + p_i(t; \alpha)),$$

پس، برای هر $t \in U$ و $\alpha \in [0, 1]$ خواهیم داشت:

$$y_i^-(t; \alpha) \leq y_i^+(t; \alpha).$$

برای $i = 1$ ، به دست می‌آوریم:

که در آن $\Delta = (a+c)^2 - \varepsilon ad$ است. می‌بینیم که $\mu_1 = -\lambda_1$ و $\mu_2 = -\lambda_2$ پس از اثبات لم ۱،۴ داریم: $\mu_2 < \mu_1 < 0$. بنابراین، فرم ژوردن B می‌شود:

$$J = \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 \end{bmatrix}.$$

همچنین، با یافتن بردارهای ویژه B ، ماتریس H به صورت زیر یافت می‌شود:

$$H = \begin{bmatrix} a - \lambda_2 & a - \lambda_1 \\ b & b \end{bmatrix}.$$

به این ترتیب، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1(t; \alpha) \\ q_2(t; \alpha) \end{pmatrix} &= He^{tJ}H^{-1} \begin{pmatrix} q_1(0; \alpha) \\ q_2(0; \alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a - \lambda_2 & a - \lambda_1 \\ b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_1 t} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{a - c + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} & -\frac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{c - a + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} & \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I^+(\alpha) + I^-(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{c - a + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_2 t} + \left(\frac{a - c + \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_1 t} \\ \left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}} \right) (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \end{pmatrix} \\ &\quad \times (I^+(\alpha) + I^-(\alpha)). \end{aligned}$$

بنابراین، به تابع‌های (۱۹) و (۲۰) به عنوان جواب دستگاه (۱۴) دست می‌یابیم. چون $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ ، پس، $q_2(t; \alpha) > 0$ و مشابه اثبات لم ۱،۴، از (۱۸)، نتیجه می‌شود $q_1(t; \alpha) > 0$. \square

اکنون، با استفاده از دو لم قبل، به ساختار یکتای جواب دستگاه (۳)، دست می‌یابیم که در قضیه بعد، ارائه شده است.

قضیه ۱،۴. دستگاه (۳) با ضرایب حقیقی مثبت a, b, d و مقدار اولیه فازی I ، دارای جواب نوع (۱)، به صورت زیر است:

که برای هر $t \in U$ ، تابعی نزولی در α است. در نتیجه، $[y_1^-(t; \alpha), y_1^+(t; \alpha)]$ -برش‌های یک تابع فازی مقدار را تعریف می‌کنند، که به صورت $y_1(t)$ داده شده در (۲۱)، بیان می‌شود. حالا، نشان می‌دهیم این تابع (۱)-مشتق‌پذیر است. قرار دهید:

$$\varphi_1(t) = \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_1 t) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_2 t),$$

و

$$\psi_1(t) = \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_1 t) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_2 t).$$

چون برای هر $t > 0$ داریم: $\psi_1(t) > 0, \varphi_1(t) > 0$ و همچنین:

$$\varphi_1'(t) = \lambda_1 \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_1 t) + \lambda_2 \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_2 t) > 0,$$

$$\psi_1'(t) = \lambda_1 \left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_1 t) + \lambda_2 \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_2 t) > 0,$$

طبق قضیه ۵، قسمت (a)، در [۱۵]، هر یک از تابع‌های $\varphi_1(t) \odot I$ و $\psi_1(t) \odot I$ (۱)-مشتق‌پذیر هستند. در نتیجه، به وسیله قضیه ۲، ۲، تابع $y_1(t)$ در (۲۱)، (۱)-مشتق‌پذیر است.

برای $t = 2$ ، مشابه با قسمت قبل، با محاسبه مستقیم، خواهیم یافت:

$$\begin{aligned} y_1^-(t; \alpha) &= \frac{1}{\varphi} (q_{10}(t; \alpha) - p_{10}(t; \alpha)) \\ &= \frac{1}{\varphi} \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) (e^{-\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) (e^{-\lambda_2 t} + e^{\lambda_2 t}) \right) I^-(\alpha) \\ &\quad + \frac{1}{\varphi} \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) (e^{-\lambda_1 t} - e^{\lambda_1 t}) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) (e^{-\lambda_2 t} - e^{\lambda_2 t}) \right) I^+(\alpha) \\ &= \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_1 t) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_2 t) \right) I^-(\alpha) \\ &\quad - \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_1 t) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_2 t) \right) I^+(\alpha). \end{aligned}$$

چون $t > 0$ و $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ پس، ضرایب تابع‌های $I^-(\alpha)$ و $I^+(\alpha)$ در تساوی اخیر، به ترتیب، مثبت و منفی هستند. این نتیجه می‌دهد که، برای هر $t \in U$ ، تابع $y_1^-(t; \alpha)$ در α صعودی است. به طور مشابه، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_1^+(t; \alpha) &= \frac{1}{\varphi} (q_{10}(t; \alpha) + p_{10}(t; \alpha)) \\ &= - \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_1 t) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \sinh(\lambda_2 t) \right) I^-(\alpha) \\ &\quad + \left(\left(\frac{c-a+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_1 t) + \left(\frac{a-c+\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) \cosh(\lambda_2 t) \right) I^+(\alpha). \end{aligned}$$

که در آن، $l_a = l_b = l_c$ این تساوی ها، با توجه به اینکه $c = b + d$ ، ایجاب می‌کند که d باید یک عدد حقیقی باشد و ما در واقع داریم $c^c = b^c + d$. همچنین، برخلاف بخش قبل، فرض می‌کنیم مقدار اولیه $y_1(0) = I$ ، یک عدد حقیقی است. در این بخش، نشان می‌دهیم که تحت مفروضات فوق، تابع برداری جواب نوع (۱) از دستگاه (۳)، وجود دارد و مولفه های آن، تابع های فازی مقدار مثلثی متقارن و هم پهنا، هستند.

فرض کنید دستگاه (۳) دارای جواب نوع (۱)، به صورت $y_i: U \rightarrow T^s \mathbb{R}_F^+$ است که $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$ همراه با α -برش های زیر باشند:

$$[y_i(t)]^\alpha = [y_i^c(t) + l_i(t)(-1 + \alpha), y_i^c(t) + l_i(t)(1 - \alpha)], i = 1, 2.$$

چون هر یک از این تابع ها، مشکل از دو تابع مجهول $y_i^c(t)$ و $l_i(t)$ هستند، لذا، کافی است تا دستگاه (۶)، متناظر با این تابع ها را، برای دو مقدار $\alpha = 0, 1$ ، حل کنیم. دستگاه (۶)، متناظر با $\alpha = 1$ خواهد شد:

$$\begin{cases} y_1^c(t) = -a^c y_1^c(t) + b^c y_2^c(t), \\ y_2^c(t) = a^c y_1^c(t) - c^c y_2^c(t), \\ y_1^c(0) = I, \\ y_2^c(0) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

دستگاه (۲۳)، جزء خانواده دستگاه های (۱۴)، است. پس طبق لم ۲،۴، دارای جواب مثبت زیر است:

$$y_1^c(t) = \left(\frac{c^c - a^c + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_1 t} + \left(\frac{a^c - c^c + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}} \right) e^{-\lambda_2 t} I, \quad (24)$$

$$y_2^c(t) = \frac{a^c}{\sqrt{\Delta}} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) I, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y_1^-(t; \alpha) &= \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\sinh(\lambda_2 t) - \sinh(\lambda_1 t)) I^-(\alpha) \\ &\quad - \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\cosh(\lambda_2 t) - \cosh(\lambda_1 t)) I^+(\alpha), \\ y_2^+(t; \alpha) &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\cosh(\lambda_2 t) - \cosh(\lambda_1 t)) I^-(\alpha) \\ &\quad - \frac{a}{\sqrt{\Delta}} (\sinh(\lambda_2 t) - \sinh(\lambda_1 t)) I^+(\alpha). \end{aligned}$$

قرار دهید:

$$\varphi_2(t) = \cosh(\lambda_2 t) - \cosh(\lambda_1 t),$$

$$\psi_2(t) = \sinh(\lambda_2 t) - \sinh(\lambda_1 t).$$

می‌دانیم برای $x > 0$ ، تابع های $\sinh(x)$ و $\cosh(x)$ مثبت و صعودی اند. پس، $\varphi_2(t) > 0$ و $\psi_2(t) > 0$ و لذا تابع های $y_1^-(t; \alpha)$ و $y_2^+(t; \alpha)$ به ترتیب صعودی و نزولی در α بوده و در نتیجه، آنها یک تابع فازی مقدار $y_2(t)$ را ایجاد می‌کنند که به صورت (۲۲)، بیان می‌شود. همچنین، چون:

$$\varphi_2'(t) = \lambda_2 \sinh(\lambda_2 t) - \lambda_1 \sinh(\lambda_1 t) > 0,$$

$$\psi_2'(t) = \lambda_2 \cosh(\lambda_2 t) - \lambda_1 \cosh(\lambda_1 t) > 0.$$

طبق قضیه ۵، قسمت (a)، در [۱۵]، هر یک از تابع های $\varphi_2(t) \odot I$ و $\psi_2(t) \odot I$ (۱)-مشتقپذیر هستند. در نتیجه، به وسیله قضیه ۲،۲، تابع $y_2(t)$ در (۲۲)، (۱)-مشتقپذیر است. در نهایت، با توجه به قضیه ۱،۳، قسمت (۲)، تابع های $y_1(t)$ و $y_2(t)$ ، جواب نوع (۱) از دستگاه (۳) را تشکیل می‌دهند.

۵. حل مدل همراه با ضرایب فازی مثلثی متقارن هم پهنا

در این بخش، حالتی از مدل (۳) را در نظر می‌گیریم که در آن، ضرایب $a, b, c = b + d$ به صورت اعداد فازی مثلثی متقارن هم پهنا، داده شده باشند. پس، با استفاده از نماد گذاری های مطرح شده در بخش ۲، داریم:

$$a = (a^c, l_a), b = (b^c, l_b), c = (c^c, l_c)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \frac{a^c + c^c - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a^c + c^c + \sqrt{\Delta}}{2},$$

$$\Delta = (a^c + c^c)^2 - 4a^c d.$$

اکنون، دستگاه (۶)، متناظر با $\alpha = 0$ را در نظر می‌گیریم. این

دستگاه عبارت است از:

$$\begin{cases} l_1'(t) = (a^c + l)l_1(t) + (b^c - l)l_2(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ l_2'(t) = (a^c - l)l_1(t) + (b^c + l)l_2(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ l_1'(t) = (a^c - l)l_1(t) + (b^c + l + d)l_2(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ l_2'(t) = (a^c + l)l_1(t) + (b^c - l + d)l_2(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ l_1(0) = l_2(0) = 0. \end{cases}$$

در اینجا $l = l_a = l_b = l_c$ چون y_1^c و y_2^c جواب های

(۲۳) هستند، دستگاه فوق به دستگاه زیر تقلیل می‌یابد:

$$\begin{cases} y_1^c(t) - l_1(t) = -(a^c + l)(y_1^c(t) + l_1(t)) + (b^c - l)(y_2^c(t) - l_2(t)) \\ y_2^c(t) + l_2(t) = -(a^c - l)(y_1^c(t) - l_1(t)) + (b^c + l)(y_2^c(t) + l_2(t)) \\ y_1^c(t) - l_2(t) = (a^c - l)(y_1^c(t) - l_1(t)) - (b^c + l + d)(y_2^c(t) + l_2(t)) \\ y_2^c(t) + l_1(t) = (a^c + l)(y_1^c(t) + l_1(t)) - (b^c - l + d)(y_2^c(t) - l_2(t)) \\ l_1(0) = l_2(0) = 0. \end{cases}$$

از تفاضل دو معادله اول (یا دو معادله دوم) دستگاه اخیر، به

سادگی نتیجه می‌شود: $l_1(t) = l_2(t)$ برای سادگی،

جایگزین می‌کنیم: $L(t) = l_1(t)$ با قرار دادن در یکی از

معادلات دستگاه اخیر و پس از ساده کردن، به معادله دیفرانسیل

ساده زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} L'(t) = (a^c + b^c)L(t) + l(y_1^c(t) + y_2^c(t)), \\ L(0) = 0, \end{cases}$$

که دارای جواب زیر است:

$$L(t) = e^{(a^c + b^c)t} \int_0^t l(y_1^c(s) + y_2^c(s)) e^{-(a^c + b^c)s} ds. \quad (26)$$

اکنون، این نتایج را در قضیه زیر، کامل می‌کنیم.

قضیه ۱،۵. دستگاه (۳) همراه با اعداد فازی مثلثی متقارن مثبت

$a = (a^c, l)$ و $b = (b^c, l)$ و مقادیر حقیقی نامنفی d

$y_1(0) = I$ ، دارای جواب نوع (۱)، به صورت زیر است:

$$y_i(t) = y_i^c(t) \oplus L(t) \odot u., \quad t > 0, i = 1, 2,$$

(۲۷)

که در آن $u. = (0, 1) \in T^s \mathbb{R}_F$ و تابع های $y_1^c(t)$

و $y_2^c(t)$ در (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) داده شده‌اند.

اثبات: چون از لم ۲،۴ داریم $y_1^c(t) > 0$ و $y_2^c(t) > 0$

پس، برای هر $t > 0$ تابع $L(t)$ در (۲۶)، مثبت است. لذا، تابع

های $y_i(t)$ در (۲۷) خوش تعریف هستند. همچنین، چون

$$\begin{aligned} L'(t) &= l(y_1^c(t) + y_2^c(t)) \\ &+ (a^c \\ &+ b^c)e^{(a^c + b^c)t} \int_0^t l(y_1^c(s)) \\ &+ y_2^c(s)) e^{-(a^c + b^c)s} ds > 0. \end{aligned}$$

به وسیله قسمت (a)، از قضیه ۵ در [۱۵]، تابع $L(t) \odot u.$

(۱) - مشتقپذیر است. لذا تابع های $y_i(t)$ در هر نقطه $t > 0$

(۱) - مشتقپذیرند. در نتیجه، از قضیه ۱،۳ قسمت (۲)، تابع های

$y_i(t)$ جواب نوع (۱) از دستگاه متناظر (۳) هستند. \square

در پایان این بخش شبه کدی را که معرف الگوریتم فرایند مطرح

شده، در این مقاله است، مطرح می‌کنیم.

الگوریتم:

گام اول: درخواست وارد کردن داده‌ها به یکی از دو شکل زیر:

(i). مقادیر a, b, d را به صورت اعداد حقیقی و مقدار I را

به صورت عدد فازی وارد کنید.

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2 \odot y_1(t) \oplus y_2(t), t > 0, \\ y_2'(t) = 2 \odot y_1(t) \oplus (-3)y_2(t), \\ y_1(0) = I, \\ y_2(0) = 0. \end{cases}$$

(۲۸)

با استفاده از (۱۷) و اینکه $c = b + d = 3$ ، داریم:

$$\Delta = (a + c)^2 - 4ad = 9,$$

$$\lambda_1 = \frac{a + c - \sqrt{\Delta}}{2} = 1,$$

$$\lambda_2 = \frac{a + c + \sqrt{\Delta}}{2} = 4.$$

با جایگزینی در فرمول‌های (۲۱) و (۲۲)، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_1(t) = & \left(\frac{2}{3} \cosh(t) + \frac{1}{3} \cosh(4t) \right) \odot I \\ & \oplus (-1) \left(\frac{2}{3} \sinh(t) + \frac{1}{3} \sinh(4t) \right) \\ & \odot I, \end{aligned}$$

(۲۹)

$$\begin{aligned} y_2(t) = & \frac{2}{3} (\sinh(4t) - \sinh(t)) \odot I \\ & \oplus \left(-\frac{2}{3} \right) (\cosh(4t) - \cosh(t)) \\ & \odot I, \end{aligned}$$

(۳۰)

(ii). مقادیر a, b را به صورت اعداد فازی مثلثی هم پهنا وارد کنید و مقادیر I, d را به صورت اعداد حقیقی وارد کنید.

گام دوم: اگر داده‌های ورودی در حالت (i) از گام اول، بوده‌اند، آنگاه، از فرمول‌های (۲۱) و (۲۲) استفاده کن و جواب‌ها را به عنوان خروجی نمایش بده. سپس، برای دریافت اطلاعات جدید به گام اول برگرد.

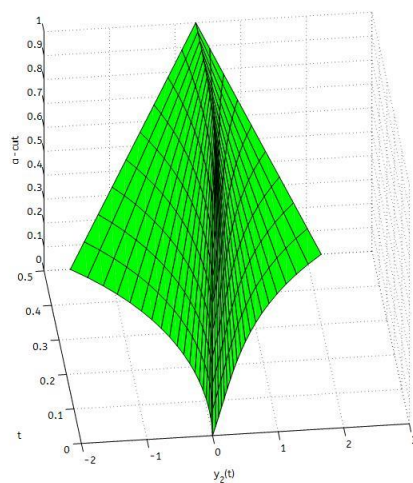
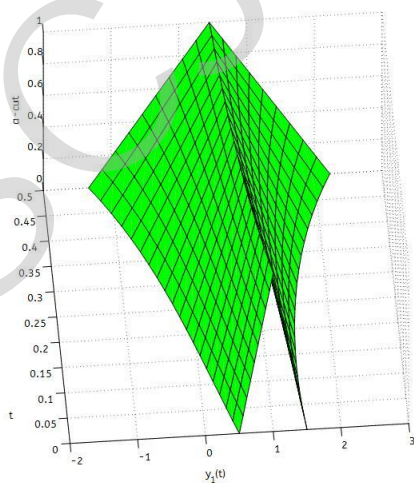
گام سوم: اگر داده‌های ورودی در حالت (ii) از گام اول، بوده‌اند، آنگاه، از فرمول (۲۷) استفاده کن و جواب‌ها را به عنوان خروجی نمایش بده. سپس، برای دریافت اطلاعات جدید به گام اول برگرد.

۶. مثال‌ها

مثال ۱,۶. مدل ریاضی کبد فرد A ، همراه با مقادیر بالینی $a = 2, b = 1, d = 2$ و مقدار اولیه فازی I داده شده به صورت

$$[I]^\alpha = [0.5 + 0.5\alpha, 1.5 - 0.5\alpha], \forall \alpha \in [0, 1],$$

در نظر بگیرید. با توجه به (۳)، در این مثال، هدف یافتن جواب‌های دستگاه مقدار اولیه فازی زیر است:



شکل (۱): گرافیک جواب‌ها از مثال ۱,۶.

جدول (۱): نتایج فازی تست BSP شخص A در سه زمان

زمان بر حسب ساعت (t)	BSP موجود در خون $[y_1(t)]^\alpha$	BSP موجود در کبد $[y_2(t)]^\alpha$
۰/۲۵	$[-۰/۲۴ + ۰/۸۸\alpha, ۱/۵۳ - ۰/۸۸\alpha]$	$[-۰/۲ + ۰/۴۸\alpha, ۰/۷۵ - ۰/۴۸\alpha]$
۰/۵	$[-۱/۳۳ + ۱/۷۸\alpha, ۲/۲۳ - ۱/۷۸\alpha]$	$[-۱/۶ + ۱/۹۱\alpha, ۲/۲۲ - ۱/۹۱\alpha]$
۰/۷۵	$[-۳/۷۲ + ۴/۰۵\alpha, ۴/۳۸ - ۴/۰۵\alpha]$	$[-۵/۷۱ + ۵/۹۹\alpha, ۶/۲۷ - ۵/۹۹\alpha]$

در اینجا $c = b + d = (۳,۱)$ است. با استفاده از (۱۷)، داریم:

$$\Delta = (a^c + c^c)^2 - \varepsilon a^c d = ۹,$$

$$\lambda_1 = \frac{a^c + c^c - \sqrt{\Delta}}{۲} = ۱,$$

$$\lambda_2 = \frac{a^c + c^c + \sqrt{\Delta}}{۲} = ۴.$$

با جایگزینی در فرمول‌های (۲۴) و (۲۵) و پس از ساده کردن، به دست می‌آوریم:

$$y_1^c(t) = ۲e^{-t} + e^{-\varepsilon t},$$

$$y_2^c(t) = ۲e^{-t} - ۲e^{-\varepsilon t}.$$

با جایگزینی این تابع‌ها در (۲۶)، به دست می‌آوریم:

$$L(t) = e^{(a^c + b^c)t} \int_0^t l(y_1^c(s)) + y_2^c(s) e^{-(a^c + b^c)s} ds \\ = \frac{1}{\varepsilon} e^{\varepsilon t} - e^{-t} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon t}.$$

در نهایت، از (۲۷) تابع‌های جواب خواهند شد:

گرافیک این تابع‌ها در شکل (۱)، نشان داده شده است. شکل (۱)، نشان می‌دهد که برای هر مقدار ثابت $\alpha \in [0, 1]$ پهنای α -برش‌های $[y_1(t)]^\alpha$ و $[y_2(t)]^\alpha$ با افزایش زمان، افزایش می‌یابد. به عبارتی دیگر، همان‌طور که مورد انتظار است، با افزایش زمان، میزان نادقیقی و عدم اطمینان مقادیر BSP موجود در خون و کبد فرد A، افزایش می‌یابد. برای مشاهده این مقادیر، نتایج محاسباتی مربوط به سه زمان متفاوت، در جدول (۱)، داده شده است. برای نمونه، پس از نیم ساعت از تزریق BSP، مقدار آن در خون و کبد فرد A، طبق جدول ۱، به ترتیب، اعداد فازی حدوداً "۰/۴۵ و ۰/۳۱" است.

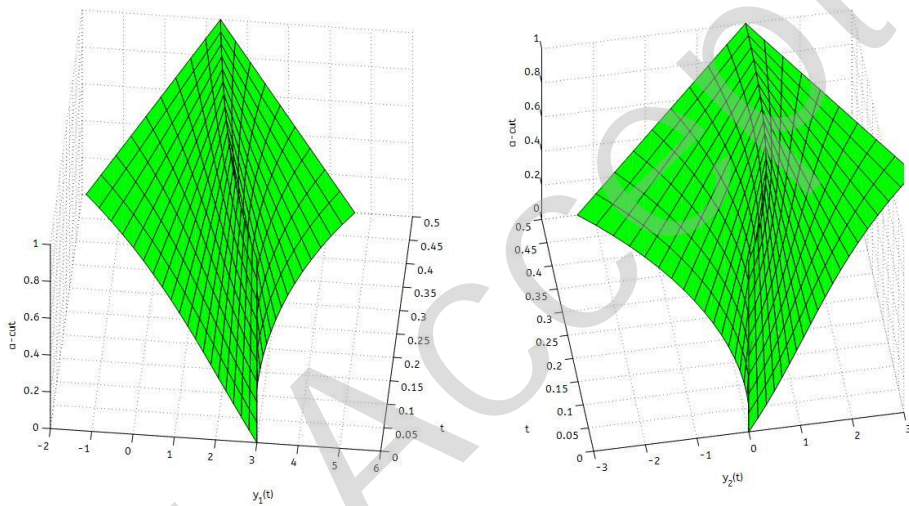
مثال ۲,۶. مدل ریاضی کبد فرد B، همراه با مقادیر بالینی فازی $a = (۲,۱)$ ، $b = (۱,۱)$ و مقادیر حقیقی $d = ۲$ و $\varepsilon = ۳$ در نظر بگیرید. با توجه به (۳)، در این مثال، هدف یافتن جواب‌های دستگاه فازی زیر است:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -(۲,۱) \odot y_1(t) \oplus (۱,۱) y_2(t), \\ y_2'(t) = (۲,۱) \odot y_1(t) \oplus (-۱)(۳,۱) y_2(t), \\ y_1(0) = I, \\ y_2(0) = 0, \end{cases} \quad (۳۱)$$

گرافیک این تابع‌ها در شکل (۲)، نشان داده شده است و مقادیر آنها، در سه زمان متفاوت، در جدول (۲)، داده شده است.

$$y_1(t) = (2e^{-t} + e^{-\varepsilon t}) \oplus \left(\frac{1}{V} e^{\varepsilon t} - e^{-t} + \frac{1}{V} e^{-\varepsilon t} \right) \odot (0,1), \quad (32)$$

$$y_2(t) = (2e^{-t} - 2e^{-\varepsilon t}) \oplus \left(\frac{1}{V} e^{\varepsilon t} - e^{-t} + \frac{1}{V} e^{-\varepsilon t} \right) \odot (0,1). \quad (33)$$



شکل (۲): گرافیک جواب‌ها از مثال ۱,۶.

جدول (۲): نتایج فازی تست BSP شخص B در سه زمان

زمان بر حسب ساعت (t)	BSP موجود در خون $([y_1(t)]^\alpha)$	BSP موجود در کبد $([y_2(t)]^\alpha)$
۰/۲۵	$[1/58 + 1/09\alpha, 3/25 - 1/09\alpha]$	$[-0/27 + 1/09\alpha, 1/91 - 1/09\alpha]$
۰/۵	$[-1/67 + 3/25\alpha, 4/84 - 3/25\alpha]$	$[-2/31 + 3/25\alpha, 4/2 - 3/25\alpha]$
۰/۷۵	$[-6/5 + 7/67\alpha, 8/83 - 7/67\alpha]$	$[-6/82 + 7/67\alpha, 8/51 - 7/67\alpha]$

مجزای ۱- ضرایب فازی بوده ولی مقادیر اولیه غیر فازی، ۲- مقادیر اولیه فازی بوده ولی ضرایب غیر فازی، یافت شده اند.

سپاسگزاری

نویسنده از سردبیر و داوران محترم ناشناس که با پیشنهادات و راهنمایی های خویش باعث افزایش کیفیت و بهبود مقاله حاضر گردیده اند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارد.

مراجع

[1] J. Casanovas, F. Rossell, "Averaging fuzzy biopolymers", Fuzzy Sets and Systems, 152: ۱۳۹-۱۵۸, ۲۰۰۵.

[2] Z. Ding, H. Shen, A. Kandel, "Performance analysis of service composition based on fuzzy differential equations", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 19: 164-178, 2010. DOI: [10.1109/TFUZZ.2010.2089633](https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2010.2089633)

[3] M. Hanss, "Applied Fuzzy Arithmetic: An Introduction with Engineering Applications", Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[۴] ح. مرادی فراهانی، ج. عسگری، م. ذاکری، مروری بر منطق فازی نوع-۲: از پیدایش تا کاربرد، مجله محاسبات نرم، شماره ۳، ص. ۴۳-۲۲، ۱۳۹۲.

[20.1001.1.23223707.1392.2.1.58.2](https://doi.org/10.1001.1.23223707.1392.2.1.58.2)

[۵] ع. اکرمی، م. پارسامنش، بررسی یک مدل اپیدمیک فازی ریاضی برای انتشار ویروس کرونا در یک جمعیت، مجله محاسبات نرم، شماره ۱، ص. ۹-۲، ۱۴۰۱.

[10.22052/scj.2022.246053.1045](https://doi.org/10.22052/scj.2022.246053.1045)

[۶] ر. آخوندی، ر. حسینی، ارائه مدل هوشمند هایبریدی فازی-تکامل ژنتیکی تفاضل در یک سیستم خبره فازی برای پیش بینی

نکته ۱،۶. قابل توجه است که، چون فرمول های (۲۱)، (۲۲) و (۲۷) جواب های دستگاه فازی (۳) هستند، پس بازای هر $\alpha \in [0, 1]$ -برش آنها در دستگاه معمولی متناظر (۶) صدق می کند. لذا، بازای $\alpha = 1$ ، فرمول های یافت شده، جواب دستگاه معمولی (۱) را فراهم خواهند کرد. برای آزمایش، اجازه دهید تا جواب های یافت شده در مثال های این بخش را در نظر بگیریم. در مثال ۱،۶ داریم: $[I] = 1$. پس، از (۲۹) و (۳۰) به سادگی، نتیجه می گیریم که:

$$[y_1(t)]' = \frac{1}{3}(2e^{-t} + e^{-\varepsilon t}),$$

$$[y_2(t)]' = \frac{2}{3}(e^{-t} - e^{-\varepsilon t}).$$

به سادگی، ملاحظه می شود که این توابع، جواب های دستگاه معمولی متناظر به دستگاه (۲۸)، یعنی، دستگاه زیر، هستند:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t), & t > 0, \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - 3y_2(t), \\ y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = 0, \end{cases}$$

به طور مشابه، از (۳۲) و (۳۳)، نتیجه می گیریم:

$$[y_1(t)]' = e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{e}}e^{-\varepsilon t} + \frac{7}{\sqrt{e}}e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t},$$

$$[y_2(t)]' = e^{-t} - \frac{13}{\sqrt{e}}e^{-\varepsilon t} + \frac{7}{\sqrt{e}}e^{\varepsilon t},$$

که جواب های دستگاه معمولی متناظر با دستگاه (۳۱)، یعنی، دستگاه زیر، هستند:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) + y_2(t), & t > 0, \\ y_2'(t) = 2y_1(t) - 3y_2(t), \\ y_1(0) = 3, \\ y_2(0) = 0, \end{cases}$$

۷. نتیجه گیری

در این مقاله، مدل ریاضی عملکرد کبد انسان مطابق تست بروموسولفالتین، به عنوان یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل فازی مطالعه شده و شرایط کافی وجود جواب یکتا تحت مشتق پذیری هاگوهاری توسعه یافته، یافت شده اند. هم چنین، فرمول های جواب به صورت تابع هایی فازی مقدار، در دو حالت

Information Sciences, 181: 2177–2188, 2011.
<https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.01.023>

[14] V. F. Wasques, E. Esmi, L. C. Barros, P. Sussner, “The generalized fuzzy derivative is interactive”, Information Sciences, 519: 93-109, ۲۰۲۰.

<https://doi.org/10.1016/j.ins.2020.01.042>

[15] B. Bede, I. J. Rudas, A. L. Bencsik, “First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability”, Information Sciences, 177: 1648–1662, 2007.
<https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.08.021>

[16] B. Bede, S. G. Gal, “Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability”, Communications in Mathematical Analysis, 9 (2): 22–41, 2010.

[17] M. Chehlabi, T. Allahviranloo, “Positive or negative solutions to first-order fully fuzzy linear differential equations under generalized differentiability”, Applied Soft Computing, 70: ۳۵۹–۳۷۰, ۲۰۱۸.

<https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.05.040>

[18] M. Chehlabi, T. Allahviranloo, “Existence of generalized Hukuhara differentiable solutions to a class of first-order fuzzy differential equations in dual form”, Fuzzy Sets and Systems, 478: 108839, 2024.
<https://doi.org/10.1016/j.fss.2023.108839>

[19] A. Khastan, J. J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, “Variation of constant formula for first order fuzzy differential equations”, Fuzzy Sets and Systems, 177: 20-33, 2011.
<https://doi.org/10.1016/j.fss.2011.02.020>

خطر ابتلا به بیماری قلبی، مجله محاسبات نرم، شماره ۲، ص. ۴۷–۳۲، ۱۳۹۶.

[20.1001.1.23223707.1396.6.2.3.7](https://doi.org/10.1001.1.23223707.1396.6.2.3.7)

[7] C. Wu, Z. Gong, “On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions I”, Fuzzy Sets and Systems, 120: 523–532, 2001.
[https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(99\)00057-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(99)00057-3)

[8] L. Celechovska, “A simple mathematical model of the human liver”, Applications of Mathematics, 49: 227-246, 2004.
doi.org/10.1023/B:APOM.0000042364.85016.7d

[9] L. P. Lebedev, M. J. Cloud, “The Calculus of Variations and Functional Analysis with Optimal Control and Applications in Mechanics”, World Scientific, Pages 1-98, 2003.
<https://doi.org/10.1142/5374>

[۱۰] م. شبیبی، ز. زین العابدینی چرندابی، ح. محمدی، ش. رضاپور، بررسی مدل ریاضی کبد انسان با رویکرد مشتق کسری کاپوتو، مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی، شماره ۱۱، ص. ۷۵۰–۷۶۰، ۱۴۰۰.

Doi.[10.22055/jamm.2022.37102.1918](https://doi.org/10.22055/jamm.2022.37102.1918)

[11] L. C. Barros, F. S. Pedro, “Fuzzy differential equations with interactive derivative”, Fuzzy Sets and Systems, 309: 64–80, 2017.
<https://doi.org/10.1016/j.fss.2016.04.002>

[12] J. J. Buckley, T. Feuring, “Fuzzy differential equations”, Fuzzy Sets and Systems, 110: 43–۵۴, ۲۰۰۰. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00141-9](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00141-9)

[13] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, M. D. Jiménez-Gamero, “Generalized derivative and π -derivative for set-valued functions”,

- [27] M. Z. Ahmad, M. K. Hasan, B. De Baets, "Analytical and numerical solutions of fuzzy differential equations", *Information Sciences*, ۲۳۶: ۱۵۶-۱۶۷, ۲۰۱۳. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.02.026>
- [28] B. Bede, T. C. Bhaskar, V. Lakshmikantham, "Perspectives of fuzzy initial value problems", *Communication in Applied Analysis*, 11(3): ۳۳۹-۳۵۸, ۲۰۰۷.
- [29] M. Chehlabi, "Trapezoidal approximation operators preserving the most indicators of fuzzy numbers-relationships and applications", *Soft Computing*, 26: 7081-7105, 2022. Doi: ۱۰.۱۰۰۷/s۰۰۵۰۰-۰۲۲-۰۷۱۷۲-y
- [30] P. Diamond, P. Kloeden, "Metric Spaces of Fuzzy Sets", World Scientific, Singapore, 1994. https://doi.org/10.1142/9789814447010_0001
- [31] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, "Comparison between some approaches to solve fuzzy differential equations", *Fuzzy Sets and Systems*, 160: 1517-1527, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2008.10.002>
- [32] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, "On new solutions of fuzzy differential equations", *Chaos Solitons Fractals*, 38, 112-119, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.10.043>
- [۳۳] ت. اپوستل، جبر خطی: نخستین درس به همراه کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل، مترجم: ملک منصور شریف، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۸۲.
- [34] R. Ezzati, Solving fuzzy linear systems, *Soft Computing*, 15: 193-197, ۲۰۱۱. DOI: [10.1007/s00500-009-0537-7](https://doi.org/10.1007/s00500-009-0537-7)
- [20] A. Khastan, R. Rodríguez-López, "On the solutions to first order linear fuzzy differential equations", *Fuzzy Sets and Systems*, 295: 114-۱۳۵, ۲۰۱۶. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2015.06.005>
- [21] E. ElJaoui, S. Melliani, L. S. Chadli, "Solving second-order fuzzy differential equations by the fuzzy Laplace transform method", *Advances in Difference Equations*, 66, 2015. Doi: 10.1186/s13662-015-0414-x
- [22] L. Hooshangian, "Analytic Solution of fuzzy second order differential equations under H-derivation", *Theory of Approximation and Applications*, 11 (1): 99-115, 2017. <https://civilica.com/doc/1726721>
- [23] B. Bede, S. G. Gal, "Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations", *Fuzzy Sets and Systems*, 151: 581-۵۹۹, ۲۰۰۵. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.08.001>
- [24] B. Bede, L. Stefanini, "Solution of fuzzy differential equations with generalized differentiability using LU-parametric representation", *EUSFLAT*, 785-790, 2011. DOI: [10.2991/eusflat.2011.106](https://doi.org/10.2991/eusflat.2011.106)
- [25] T. Allahviranloo, M. Chehlabi, "Solving fuzzy differential equations based on the length function properties", *Soft Computing*, 19: 307-۳۲۰, ۲۰۱۵. doi: [10.1007/s00500-014-1254-4](https://doi.org/10.1007/s00500-014-1254-4)
- [26] A. Khastan, R. Rodríguez-López, "On linear fuzzy differential equations by differential inclusions' approach", *Fuzzy Sets and Systems*, ۳۸۷: ۴۹-۶۷, ۲۰۲۰. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2019.05.014>

SCU Accepted