



دانشگاه کاشان
University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



حل معادله کلین-گوردن کسری زمانی فازی با استفاده از ترکیب دو روش تفاضلات متناهی و تبدیل دیفرانسیل کسری

زهرا صحرائی¹، دانشجوی دکتری، مریم عرب‌عامری^{1*}، دانشیار

¹ گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

چکیده

در این مقاله یک روش ترکیبی برای حل معادله دیفرانسیل کلین - گوردن کسری زمانی فازی ارائه می‌شود. روش مذکور، مبتنی بر ترکیب روش‌های تبدیل دیفرانسیل و تفاضلات متناهی است. به این ترتیب که با استفاده از تکنیک نیمه گسسته‌سازی، ابتدا شاخه پایینی معادله فازی کلین - گوردن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی کسری تبدیل می‌شود، سپس با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل کسری، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل حل می‌شود و جواب شاخه بالایی به دست می‌آید. در نهایت، با بکارگیری این روند برای شاخه بالایی معادله، جواب تقریبی شاخه بالایی و به دنبال آن، جواب تقریبی معادله کلین - گوردن کسری فازی به دست می‌آید. همگرایی روش مورد بررسی قرار می‌گیرد و با ارائه مثال‌های عددی، نشان داده می‌شود که این ایده، برای حل معادله فازی کسری از کارایی و دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین زمان اجرای محاسبات نشان می‌دهد، هزینه محاسباتی آن پایین است.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت 10 مهر ماه 1402

پذیرش 20 اسفند ماه 1402

کلمات کلیدی:

معادله کلین - گوردن کسری فازی

روش تبدیل دیفرانسیل کسری

روش تفاضلات متناهی

جواب تقریبی

همگرایی

© 1402 نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

1. مقدمه

الکترونیدرولیک، ارزیابی سیستم سلاح و مهندسی عمران توسط معادلات دیفرانسیل فازی مدل‌سازی می‌شوند. به همین دلیل است که مفهوم مشتق کسری فازی نیز در محاسبات فازی، مفهومی مهم و کاربردی است [4]. در ادامه، نمونه‌هایی از پژوهش‌های مرتبط با معادلات دیفرانسیل کسری فازی معرفی می‌شوند که نشانه اهمیت موضوع می‌باشد.

در سال 2011، ارشد¹ و همکارانش به اثبات نتایج و قضایایی در مورد وجود و منحصر به فردی جواب معادلات دیفرانسیل کسری فازی و دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط

از آنجایی که نظریه مجموعه‌های فازی ابزاری مناسب برای مدل‌سازی مسائل با عدم قطعیت است؛ در نتیجه، مفاهیم فازی برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مختلفی بکار گرفته شده‌اند [1]-[3].

معادلات دیفرانسیل فازی، یک مدل پرکاربرد در زمینه‌های مختلف علمی است، به عنوان مثال مسائل جمعیت،

* نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: zahrasahraye@pgs.usb.ac.ir (صحرائی)

arabameri@math.usb.ac.ir (عرب‌عامری)

¹ Arshad

سال، حریر¹⁶ و همکارانش به حل معادله تلگراف فازی زمان - مکان کسری پرداختند [15]. در سال 2019، آرمند¹⁷ و همکارانش قضیه مقدار میانگین کسری فازی را برای انتگرال و برخی ویژگی‌های مشتق هوکوهاری¹⁸ تعمیم یافته کاپوتو اثبات کردند و با استفاده از آن توانستند سری تیلور تعمیم یافته فازی را برای توابع فازی ارائه دهند [16]. در سال 2020، شاه¹⁹ و همکارانش جواب تحلیلی برخی معادلات دیفرانسیل فازی جزئی کسری خطی را با شرایط خاص، بررسی کردند؛ که این کار به کمک تبدیلات لاپلاس انجام شده است [17]. در همان سال، تعریفی جدید موسوم به مشتق کسری تطبیق‌پذیر فازی ارائه شد و تمام ویژگی‌ها مانند وجود و منحصربفردی جواب معادلات دیفرانسیل کسری تطبیق‌پذیر فازی مورد بررسی قرار گرفت [18]. همچنین در همان سال، علیجانی²⁰ و همکارانش روش هم‌محلی اسپلاین را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری فازی با مشتق هوکوهارا و مشتق هوکوهاری تعمیم یافته مورد بررسی قرار دادند [19]. در سال 2021، المفادل²¹ و همکارانش با تعمیم روش مستقیم لیاپانوف²² از حالت معمولی فازی به حالت کسری فازی، به نتایج جدیدی در خصوص پایداری جواب معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی دست یافتند [20]. در سال 2022، الحق²³ و همکارانش دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری فازی را با روش تبدیل دیفرانسیل کسری حل کردند [21].

هدف این مقاله، ارائه روشی برای حل معادله کلین-گوردن کسری فازی است. معادله کلین-گوردن حالت نسبیتی معادله شرودینگر است و برای ذرات کوانتومی با اسپین صفر بکار می‌رود. این معادله به اسم دو فیزیکدان به نام‌های کلین²⁴ و

اولیه فازی پرداختند [5]، [6]. در سال 2013، احمدیان¹ و همکارانش با روش تاو² و استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، معادله دیفرانسیل کسری فازی را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل کردند و جواب معادله دیفرانسیل کسری فازی را با دقتی بالا به دست آوردند [7]. در سال 2013، خدادادی³ و سلیک⁴، معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط اولیه فازی را با روش تکرار وردشی حل کردند [8]. در همان سال، ارشد، به بررسی وجود جواب معادلات دیفرانسیل کسری فازی پرداخت که در آن مشتق از نوع ریمان - لیوویل⁵ بود [9]. در سال 2014، تاکاچی⁶ و همکارانش معادلات دیفرانسیل کسری فازی با ضرایب فازی را مورد بررسی قرار دادند که با توجه به تعریف مشتقات فازی، دستگاه معادلات جبری فازی به دست آوردند و جواب‌های تقریبی معادلات را ارائه کردند [10]. در سال 2016، ریواز⁷ و همکارانش روشی مبتنی بر روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته ارائه کردند و به حل معادلات دیفرانسیل کسری فازی پرداختند [11]. در سال 2017، رحمان⁸ و احمد⁹ نیز جواب معادله دیفرانسیل کسری فازی خطی را با استفاده از تبدیل سومودوی¹⁰ فازی به دست آوردند [12]. در همان سال توماسیلو¹¹ و ماسیاس - دیاز¹² با استفاده از روش تکراری پیکارد¹³ معادلات دیفرانسیل کسری فازی را حل کردند [13]. در سال 2018، الارود¹⁴ و همکارانش با استفاده از روش سری توانی، دسته‌ای خاص از معادلات دیفرانسیل کسری فازی که مشتق در آن از نوع کاپوتو¹⁵ بود؛ را حل کردند [14]. در همان

¹ Ahmadian

² Tau

³ Khodadadi

⁴ Çelik

⁵ Riemann-Liouville

⁶ Takaci

⁷ Rivaz

⁸ Rahman

⁹ Ahmad

¹⁰ Sumudu

¹¹ Tomasiello

¹² Macías-Díaz

¹³ Picard

¹⁴ Alaroud

¹⁵ Caputo

¹⁶ Harir

¹⁷ Armand

¹⁸ Hukuhara

¹⁹ Shah

²⁰ Alijani

²¹ El Mfadel

²² Lyapunov

²³ Ul Haq

²⁴ Klein

به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r) + a \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x} \right)^2 + c \tilde{v}^2(x, t; r) + d \tilde{v}^2(x, t; r) = \tilde{k}(r) h(x, t),$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < T, \quad (1)$$

شرایط اولیه و مرزی نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, 0; r) &= \tilde{k}(r) f_1(x), \\ \tilde{v}_t(x, 0; r) &= \tilde{k}(r) f_2(x), 0 \leq x \leq L, \\ \tilde{v}(0, t; r) &= \tilde{k}(r) g_1(t), \\ \tilde{v}(L, t; r) &= \tilde{k}(r) g_2(t), 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

به طوری که $\tilde{v}(L, t; r)$ تغییر موقعیت موج را در مکان x و زمان t نمایش می دهد، a, b, c, d اعداد ثابت و f_1, f_2, g_1, g_2 و h توابعی معلوم هستند. توابع f_1 و f_2 به ترتیب تاب و سرعت موج نامیده می شوند، $\tilde{v}^2(x, t; r)$ نیروی غیرخطی، $\tilde{v}(x, t; r)$ تابعی فازی مقدار و $\tilde{k}(r) = [\underline{k}(r), \bar{k}(r)]$ عددی فازی می باشد. همچنین ${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r)$ مشتق کسری کاپوتو نسبت به t از مرتبه β می باشد.

در سال 2022، معادله کلین-گوردن کسری زمانی فازی با روشی نیمه تحلیلی توسط الشماری⁹ و همکارانش حل شده است [4]. همچنین در سال 2023، نیکام¹⁰ و همکارانش به حل این معادله با روش تجزیه لاپلاس-آدومیان¹¹ فازی پرداختند [29].

روش مورد نظر در این مقاله، روشی ترکیبی بر اساس دو روش تفاضلات متناهی و تبدیل دیفرانسیل کسری است؛ به این ترتیب که ابتدا با گسسته سازی مشتقات مکانی موجود در معادله، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و دستگاه حاصل با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل کسری حل می شود. روش تفاضلات متناهی، روشی

گوردن¹ نامگذاری شده است [22]. معادلات کلین-گوردن نقش مهمی در مسائل فیزیکی، زیست شناسی ریاضی، سینماتیک پلاسما، نظریه میدان کوانتومی و اپتیک غیرخطی دارند که کشف پدیده های متعددی مانند جابه جایی کریستال ها و رفتار ذرات بنیادی از کاربردهای مهم این معادلات است [4]. فرم کلی معادله کلین-گوردن مرتبه کسری قطعی به صورت زیر می باشد [23]:

$${}^c D_t^\beta v(x, t) = F \left(x, t, v(x, t), \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right),$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < T,$$

شرایط اولیه و مرزی نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$v(x, 0) = f_1(x), v_t(x, 0) = f_2(x), 0 \leq x \leq L,$$

و

$$v(0, t) = g_1(t), v(L, t) = g_2(t), 0 \leq t \leq T.$$

در سال 2011، معادله دیفرانسیل کلین-گوردن کسری غیرخطی توسط گلمانخانه² و همکارانش با استفاده از روش اغتشاش هموتوپی حل شد [24]. در سال 2013، گبریل³ و محمد⁴ با همین روش به حل معادله کلین-گوردن غیرخطی زمان-مکان کسری پرداختند [25]. در سال 2017، حسینی⁵ و همکارانش روشی موسوم به کوریاشوف⁶ اصلاح شده را برای حل معادلات کلین-گوردن کسری تطبیق پذیر بکار بردند [26]. در سال 2019 سینگ⁷ و همکارانش به وسیله الگوریتمی عددی که اساس کار آن ماتریس های عملیاتی توابع مقیاس لژاندر بود؛ به جواب تقریبی معادلات کلین-گوردن کسری دست یافتند [27]. در سال 2021، گنجی⁸ و همکارانش نیز، به وسیله ماتریس های عملیاتی به حل معادله کلین-گوردن کسری زمانی پرداختند [28].

در این مقاله، حالت فازی معادله کلین-گوردن کسری زمانی

¹ Gordon

² Golmankhaneh

³ Gepreel

⁴ Mohamed

⁵ Hosseini

⁶ Kudryashov

⁷ Singh

⁸ Ganji

⁹ Alshammari

¹⁰ Nikam

¹¹ Laplace-Adomian

شناخته شده و پراستفاده برای تقریب مشتقات مراتب مختلف می‌باشد. همچنین روش تبدیل دیفرانسیل، که اساس آن، محاسبه ضرایب بسط تیلور جواب مسئله بدون استفاده از مشتقات مراتب مختلف تابع است، برای اولین بار توسط ژو¹ در سال 1986 برای حل معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه معرفی شد. پس از آن برای حل مسائل مقدار مرزی، معادلات انتگرال، حسابان تغییرات و کنترل بهینه مورد استفاده قرار گرفت. به ویژه این روش در دهه‌های اخیر برای تحلیل بسیاری از پدیده‌های فیزیکی که رفتار تصادفی و کسری دارند، به کار رفته است [30].

1. به ازای هر $\tilde{A} \in E$ ، \tilde{A} نرمال باشد، یعنی

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \ni \tilde{A}(x_0) = 1,$$

2. به ازای هر $\tilde{A} \in E$ ، \tilde{A} یک مجموعه فازی محدب باشد

یعنی به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\tilde{A}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)\},$$

3. \tilde{A} نیمه پیوسته بالایی باشد یعنی برای هر $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\tilde{A}(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \tilde{A}(x)$$

4. مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : \tilde{A}(x) > 0\}$ فشرده باشد، آنگاه E

فضای اعداد فازی و هر $\tilde{A} \in E$ ، عدد فازی نامیده می‌شود.

تعریف 3.2 [15]. [عدد فازی] یک عدد فازی دلخواه $\tilde{A}[r]$ به

وسیله یک زوج مرتب از توابع $[\underline{a}(r), \bar{a}(r)]$ ، $0 \leq r \leq 1$

معرفی می‌شود که در شرایط زیر صدق کنند:

(1) $\underline{a}(r)$ تابع کراندار، نانزولی، در بازه $[0, 1]$ از چپ

پیوسته و در $x = 0$ از راست پیوسته می‌باشد.

(2) $\bar{a}(r)$ تابع کراندار، ناصعودی، در بازه $[0, 1]$ از چپ

پیوسته و در $x = 0$ از راست پیوسته می‌باشد.

(3) به ازای هر $0 \leq r \leq 1$ ، $\underline{a}(r) \leq \bar{a}(r)$

تعریف 4.2 [15]. عملگرهای جبری جمع، تفاضل و ضرب

اسکالر، برای اعداد فازی دلخواه $\tilde{A}[r] = [\underline{a}(r), \bar{a}(r)]$ و

$\tilde{B}[r] = [\underline{b}(r), \bar{b}(r)]$ و اسکالر دلخواه c به صورت زیر

تعریف می‌شوند:

جمع:

$$(\tilde{A} + \tilde{B}) = [\underline{a}(r) + \underline{b}(r), \bar{a}(r) + \bar{b}(r)].$$

تفاضل:

$$(\tilde{A} - \tilde{B}) = [\underline{a}(r) - \underline{b}(r), \bar{a}(r) - \bar{b}(r)].$$

ضرب اسکالر:

ادامه‌ی مقاله به شکل زیر تنظیم شده است. در بخش 2، مفاهیم فازی و در بخش 3، تعاریف و قضایای مورد استفاده در روش تبدیل دیفرانسیل کسری ارائه می‌شود. در بخش 4، روش ترکیبی مورد نظر معرفی و براساس آن فرآیند حل معادله کلین-گوردن فازی کسری زمانی طراحی می‌شود. در بخش 5، همگرایی روش پیشنهادی بررسی می‌شود. همچنین در بخش 6، نتایج عددی حاصل از حل معادله کلین-گوردن فازی کسری با روش ترکیبی در قالب جداول و نمودارها ارائه می‌شود. در نهایت در بخش 7، به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

2. تعاریف و مفاهیم مجموعه‌های فازی

تعریف 1.2 [15]. اگر X مجموعه مرجع با اعضای x در نظر

گرفته شود، مجموعه فازی A در X توسط زوج مرتب‌هایی به

شکل زیر بیان می‌شود:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}, \mu_A(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

$\mu_A(x)$ تابع عضویت یا درجه عضویت مجموعه فازی A نامیده

می‌شود که میزان تعلق به این مجموعه را نشان می‌دهد. در

صورتی که برد این تابع، مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ باشد، همان مجموعه

معمولی نتیجه می‌شود.

تعریف 2.2 [15]. [فضای اعداد فازی] فرض کنید مجموعه

3. تبدیل دیفرانسیل کسری

در این بخش، مفهوم تبدیل دیفرانسیل کسری تعریف و قضایای مربوط به آن ارائه می‌شود.

تعریف 1.3 [31]. تبدیل دیفرانسیل کسری مرتبه k ام تابع $u(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U^\alpha(k) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} [({}^c D_t^\alpha)^k u(t)]_{t=t_0},$$

$$0 < \alpha \leq 1, ({}^c D_t^\alpha)^k = \underbrace{{}^c D_t^\alpha \dots {}^c D_t^\alpha}_{k\text{-مرتبه}}, \quad (2)$$

به طوری که ${}^c D_t^\alpha$ مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α می‌باشد. همچنین معکوس تبدیل دیفرانسیل $U^\alpha(k)$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U^\alpha(k) (t - t_0)^{k\alpha}.$$

بنابراین n -امین تقریب تابع $u(t)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$u^n(t) = \sum_{k=0}^n U^\alpha(k) (t - t_0)^{k\alpha}.$$

قضیه 2.3 [31]. فرض کنید $U^\alpha(k)$ ، $V^\alpha(k)$ و $W^\alpha(k)$ به ترتیب، تبدیلات دیفرانسیل کسری توابع $u(t)$ ، $v(t)$ و $w(t)$ باشند،

• اگر $u(t) = v(t) \pm w(t)$ آنگاه

$$U^\alpha(k) = V^\alpha(k) \pm W^\alpha(k)$$

• اگر $u(t) = v(t) w(t)$ آنگاه

$$U^\alpha(k) = \sum_{s=0}^k V^\alpha(k-s) W^\alpha(s).$$

• اگر $u(t) = \lambda v(t)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$U^\alpha(k) = \lambda V^\alpha(k)$$

• اگر $u(t) = (t - t_0)^{m\alpha}$ آنگاه

$$U^\alpha(k) = \delta(k - m) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

$$c\tilde{A}[r] = \begin{cases} [c\underline{a}(r), c\bar{a}(r)], & c \geq 0, \\ [c\bar{a}(r), c\underline{a}(r)], & c < 0. \end{cases}$$

تعریف 5.2 [15]. برای دو عدد فازی دلخواه

$$\tilde{A} = [\underline{a}(r), \bar{a}(r)], \tilde{B}[r] = [\underline{b}(r), \bar{b}(r)] \text{ و } \tilde{A}[r] = [\underline{a}(r), \bar{a}(r)]$$

فقط اگر $\bar{a}(r) = \bar{b}(r)$ و $\underline{a}(r) = \underline{b}(r)$.

تعریف 6.2 [15]. مشتق کسری کاپوتوی تابع پیوسته $v(x)$ از مرتبه β ، که $x > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^c D_x^\beta v(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^x (x-\tau)^{m-\beta-1} v^{(m)}(\tau) d\tau, & m-1 < \beta < m \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^m}{dx^m} v(x), & \beta = m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

تعریف 7.2 [15]. فرض کنید $\tilde{v} \in C((0, a), E) \cap L^1(0, 1)$. یک تابع فازی مقدار باشد و برای هر $r \in [0, 1]$

$$[\tilde{v}(x)]^r = [\underline{v}(x; r), \bar{v}(x; r)]$$

آنگاه برای $x_0 \in (0, a)$ و $1 < \beta < 2$

(1) اگر \tilde{v} ، (1)-کاپوتو مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\bar{v}(x; r)$ و $\underline{v}(x; r)$ کاپوتو مشتق‌پذیرند و

$$[{}^c D_x^\beta \tilde{v}(x_0)]^r = [{}^c D_x^\beta \underline{v}(x_0; r), {}^c D_x^\beta \bar{v}(x_0; r)],$$

(2) اگر \tilde{v} ، (2)-کاپوتو مشتق‌پذیر باشد، آنگاه $\bar{v}(x; r)$ و $\underline{v}(x; r)$ کاپوتو مشتق‌پذیرند و

$$[{}^c D_x^\beta \tilde{v}(x_0)]^r = [{}^c D_x^\beta \bar{v}(x_0; r), {}^c D_x^\beta \underline{v}(x_0; r)],$$

که در آن

$${}^c D_x^\beta \underline{v}(x_0; r) = \left[\frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^x (x-\tau)^{m-\beta-1} \underline{v}^{(m)}(\tau; r) d\tau \right]_{x=x_0},$$

$$m-1 < \beta < m \in \mathbb{N},$$

$${}^c D_x^\beta \bar{v}(x_0; r) = \left[\frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^x (x-\tau)^{m-\beta-1} \bar{v}^{(m)}(\tau; r) d\tau \right]_{x=x_0},$$

$$m-1 < \beta < m \in \mathbb{N}.$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < T,$$

$$\bar{v}(x, 0; r) = \bar{k}(r) f_1(x),$$

$$\bar{v}_t(x, 0; r) = \bar{k}(r) f_2(x), 0 \leq x \leq L,$$

$$\bar{v}(0, t; r) = \bar{k}(r) g_1(t),$$

$$\bar{v}(L, t; r) = \bar{k}(r) g_2(t), 0 \leq t \leq T.$$

(4)

اکنون روش مورد نظر برای تقریب جواب شاخه پایینی معادله کلین-گوردن کسری زمانی (3) تشریح می‌شود. همان‌طور که گفته شد متغیر t پیوسته نگه داشته و متغیر x به شکل گسسته تبدیل می‌شود. به این منظور بازه $[0, L]$ به N قسمت افراز می‌شود و نقاط متساوی‌الفاصله $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$ با فاصله $h = \frac{L}{N}$ تولید می‌شوند. با بکار بردن فرمول تفاضلات متناهی مرکزی برای تقریب مشتقات مرتبه اول و دوم مکانی، می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{v}(x_i, t; r) = \frac{\underline{v}(x_{i+1}, t; r) - \underline{v}(x_{i-1}, t; r)}{2h} - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \underline{v}(\eta, t; r), 0 < \eta < L.$$

(5)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{v}(x_i, t; r) = \frac{\underline{v}(x_{i-1}, t; r) - 2\underline{v}(x_i, t; r) + \underline{v}(x_{i+1}, t; r)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \underline{v}(\xi, t; r), 0 < \xi < L.$$

(6)

با فرض $\underline{v}(x_i, t; r) = \underline{v}_i(t; r)$ و صرف نظر کردن از خطای برشی $O(h^2)$ و جایگذاری تقریب‌های حاصل در معادله (3)، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر به دست می‌آید که در آن $\underline{u}_i(t; r)$ تقریبی از $\underline{v}_i(t; r)$ در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} & {}^c D_t^\beta \underline{u}_i(t; r) + \frac{a}{h^2} (\underline{u}_{i-1}(t; r) - 2\underline{u}_i(t; r) \\ & \quad + \underline{u}_{i+1}(t; r)) \\ & \quad + \frac{b}{4h^2} (\underline{u}_{i+1}(t; r) - \underline{u}_{i-1}(t; r))^2 \\ & \quad + c\underline{u}_i^2(t; r) + d\underline{u}_i(t; r) \\ & = \underline{k}(r) h_i(t), 1 \leq i \leq N-1, \end{aligned}$$

قضیه 3.3 [31]. اگر $u(t) = {}^c D_t^\beta v(t)$ و $m-1 < \beta \leq m$ آنگاه تبدیل دیفرانسیل (2) به صورت زیر می‌باشد:

$$U^\alpha(k) = \frac{\Gamma(k\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} V^\alpha \left(k + \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

4. حل معادله کلین-گوردن فازی کسری با استفاده

از روش پیشنهادی

در این بخش، به تشریح روش پیشنهادی که مبتنی بر روش تفاضلات متناهی و روش تبدیل دیفرانسیل کسری است، پرداخته می‌شود، به طوری که ابتدا با استفاده از تکنیک نیمه‌گسسته‌سازی، معادله اصلی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و برای حل دستگاه حاصل از روش تبدیل دیفرانسیل کسری استفاده می‌شود. به این ترتیب، جواب معادله در هر زمان دلخواه به صورت یک سری ارائه می‌شود.

طبق قواعدی که در حساب اعداد فازی بیان شد و با فرض اینکه تابع \bar{v} ، (1) -کاپوتو مشتق‌پذیر باشد، معادله (1) را می‌توان به دو شاخه پایینی و بالایی تبدیل کرد. برای توضیح روش، بدون کم شدن از کلیت فرض می‌شود، ضرایب موجود در معادله همگی مثبت باشند.

$$\begin{aligned} & {}^c D_t^\beta \underline{v}(x, t; r) + a \frac{\partial^2 \underline{v}(x, t; r)}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial \underline{v}(x, t; r)}{\partial x} \right)^2 \\ & \quad + c\underline{v}^2(x, t; r) + d\underline{v}(x, t; r) \\ & = \bar{k}(r) h(x, t), \end{aligned}$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < T,$$

$$\underline{v}(x, 0; r) = \underline{k}(r) f_1(x),$$

$$\underline{v}_t(x, 0; r) = \underline{k}(r) f_2(x), 0 \leq x \leq L,$$

$$\underline{v}(0, t; r) = \underline{k}(r) g_1(t),$$

$$\underline{v}(L, t; r) = \underline{k}(r) g_2(t), 0 \leq t \leq T.$$

(3)

$$\begin{aligned} & {}^c D_t^\beta \bar{v}(x, t; r) + a \frac{\partial^2 \bar{v}(x, t; r)}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial \bar{v}(x, t; r)}{\partial x} \right)^2 \\ & \quad + c\bar{v}^2(x, t; r) + d\bar{v}(x, t; r) \\ & = \bar{v}(r) h(x, t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_i^\alpha \left(k + \frac{\beta}{\alpha} \right) = & \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + \beta + 1)} \left[-\frac{a}{h^2} (\underline{U}_{i-1}^\alpha(k) \right. \\ & - 2\underline{U}_i^\alpha(k) + \underline{U}_{i+1}^\alpha(k)) \\ & - \frac{b}{4h^2} \sum_{l=0}^k (\underline{U}_{i+1}^\alpha(kl) \underline{U}_{i-1}^\alpha(k \\ & - l)) (\underline{U}_{i+1}^\alpha(l) - \underline{U}_{i-1}^\alpha(l)) \\ & - c \sum_{s=0}^k \underline{U}_i^\alpha(k-s) \underline{U}_i^\alpha(s) - d\underline{U}_i^\alpha(k) \\ & \left. + \underline{k}(r) \underline{H}_i^\alpha(k) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\underline{U}_i^\alpha(0) = \underline{k}(r) f_1(ih), \underline{U}_i^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} \right) = \underline{k}(r) f_2(ih), \quad (10)$$

$$\underline{U}_0^\alpha(k) = \underline{k}(r) G_1^\alpha(k), \underline{U}_N^\alpha(k) = \underline{k}(r) G_2^\alpha(k), \quad (11)$$

اکنون طبق تعریف معکوس تبدیل دیفرانسیل، می توان جواب معادله (3) را به شکل سری توانی زیر نوشت:

$$\underline{u}_i(t; r) = \underline{k}(r) \sum_{k=0}^{\infty} \underline{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (12)$$

همچنین با قطع کردن سری، می توان جواب تقریبی معادله (3) را به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} \underline{v}_i(t; r) & \approx \underline{u}_i^n(t; r) \\ & = \underline{k}(r) \sum_{k=0}^n \underline{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha}, \quad 0 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (13)$$

که $\underline{U}_i^\alpha(k)$ ها، ضرایب مجهولی هستند که باید محاسبه شوند. برخی ضرایب مجهول از رابطه بازگشتی (9) و برخی دیگر، از شرایط اولیه (10) و شرایط مرزی (11) به دست می آیند. همچنین ضرایب مجهول $\underline{U}_i^\alpha(1)$ ، $\underline{U}_i^\alpha(2)$ ، ...، $\underline{U}_i^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right)$ ، از شرایط اولیه معادله (3)، که مشتق در آن از مرتبه صحیح

$$\begin{aligned} \underline{u}_i(0; r) & = \underline{k}(r) f_1(x_i), \\ \frac{d\underline{u}_i(t=0; r)}{dt} & = \underline{k}(r) f_2(x_i), \\ \underline{u}_0(t; r) & = \underline{k}(r) g_1(t), \\ \underline{u}_N(t; r) & = \underline{k}(r) g_2(t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (7)$$

حال عملگر تبدیل دیفرانسیل کسری از مرتبه α را بر هر یک از معادلات دستگاه (7) اعمال می کنیم. همچنین فرض می کنیم $\underline{U}_i^\alpha(k)$ تبدیل دیفرانسیل مرتبه k از تابع $\underline{u}_i(t; r)$ باشد و توابع $\underline{g}_1(t)$ ، $\underline{g}_2(t)$ و $h(t)$ باشند، بنابراین با استفاده از قضایای 2.3 و 3.3 داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(k\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} \underline{U}_i^\alpha \left(k + \frac{\beta}{\alpha} \right) & + \frac{a}{h^2} (\underline{U}_{i-1}^\alpha(k) - 2\underline{U}_i^\alpha(k) \\ & + \underline{U}_{i+1}^\alpha(k)) \\ & + \frac{b}{4h^2} \sum_{l=0}^k (\underline{U}_{i+1}^\alpha(k-l) \\ & - \underline{U}_{i-1}^\alpha(k-l)) (\underline{U}_{i+1}^\alpha(l) - \underline{U}_{i-1}^\alpha(l)) \\ & + d\underline{U}_i^\alpha(k) + c \sum_{s=0}^k \underline{U}_i^\alpha(k-s) \underline{U}_i^\alpha(s) \\ & = \underline{k}(r) \underline{H}_i^\alpha(k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_i^\alpha(0) & = \underline{k}(r) f_1(x_i), \\ \underline{U}_i^\alpha \left(\frac{1}{\alpha} \right) & = \underline{k}(r) f_2(x_i), \\ \underline{U}_0^\alpha(k) & = \underline{k}(r) G_1^\alpha(k), \\ \underline{U}_N^\alpha(k) & = \underline{k}(r) G_2^\alpha(k), \end{aligned} \quad (8)$$

رابطه (8) بازنویسی و نتیجه می شود:

می‌گیرد. همچنین کران بالایی برای خطای مطلق جواب تقریبی شاخه پایینی به دست می‌آید. با روندی مشابه می‌توان کران بالایی برای خطای مطلق شاخه بالایی نیز به دست آورد. لازم به ذکر است نرم مورد استفاده در ادامه، نرم ماکسیمم می‌باشد؛ یعنی $\|\varphi_k\| = \max_t |\varphi_k(t)|$.

الگوریتم (1): محاسبه جواب تقریبی شاخه پایینی معادله کلین-گوردن فازی کسری زمانی

- 1: Define $n, h, m, x, t, \alpha, \beta, r, L, a, b, c, d, f_1(x), f_2(x), G_1(k), G_2(k)$
- 2: Initialize U
- 3: for $i = 0$ to n do
- 4: $U[i, 0] \leftarrow (r - 1) * f_1(x[i])$
- 5: $U[i, \frac{1}{\alpha}] \leftarrow (r - 1) * f_2(x[i])$
- 6: end for
- 7: for $k = 0$ to m do
- 8: $U[0, k] \leftarrow (r - 1) * G_1(k)$
- 9: $U[n, k] \leftarrow (r - 1) * G_2(k)$
- 10: end for
- 11: for $i = 1$ to $n - 1$ do
- 12: for $k = 0$ to m do
- 13: $intermediate1 \leftarrow \Gamma((\alpha * k) + 1) / \Gamma(\alpha * k) + \beta + 1$
- 14: $intermediate2 \leftarrow \left[-\frac{a}{h^2} (U[i - 1, k] - 2U[i, k] + U[i + 1, k]) - \frac{b}{4h^2} \sum_{l=0}^k (U[i + 1, k - l] - U[i - 1, k - l]) (U[i + 1, l] - U[i - 1, l]) - c \sum_{s=0}^k U[i, k - s] U[i, s] - dU[i, k] + (r - 1) * H[i, k] \right]$
- 15: $U[i, k + \frac{\beta}{\alpha}] \leftarrow intermediate1 * intermediate2$
- 16: end for
- 17: end for
- 18: Initialize $u_{approximate}$ as an empty list
- 19: for $i = 1$ to $n - 1$ do
- 20: $S - Result \leftarrow 0$
- 21: for $k = 0$ to m do
- 22: $S - Result \leftarrow S - Result + U[i, k] * t^{(\alpha * k)}$
- 23: end for
- 24: Append $S - Result$ to $u_{approximate}$
- 25: end for
- 26: Return $u_{approximate}$

است، از طریق رابطه زیر به دست می‌آیند [31]:

$$U_i^\alpha(k) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[\frac{d^{k\alpha}}{dt^{k\alpha}} u_i(t; r) \right]_{t=0}, & k\alpha \in \mathbb{Z}^+, \\ \forall k = 0, 1, \dots, \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right), & \\ 0, & k\alpha \notin \mathbb{Z}^+, \end{cases} \quad (14)$$

β ، بزرگترین مرتبه مشتق کسری نسبت به متغیر t موجود در معادله (3) می‌باشد. با انجام مراحل فوق، تمام ضرایب مجهول $U_i^\alpha(k)$ ، $i = 0, 1, \dots, N$ در بسط سری (13)، به دست می‌آیند؛ که همان جواب تقریبی برای شاخه پایینی معادله کلین-گوردن فازی کسری زمانی می‌باشد.

روند الگوریتم محاسبه جواب شاخه پایینی در الگوریتم (1) قابل مشاهده است. با بکارگیری روندی مشابه، تقریبی از جواب شاخه بالایی معادله کلین-گوردن کسری زمانی فازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{v}_i(t; r) &\simeq \bar{u}_i^n(t; r) \\ &= \bar{k}(r) \sum_{k=0}^n \bar{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha}, 0 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن ضرایب مجهول $\bar{U}_i^\alpha(k)$ ، به‌ازای $i = 0, 1, \dots, N$ مشابه روندی که برای شاخه پایینی صورت گرفت، محاسبه می‌شوند. شبه‌کد الگوریتم محاسبه جواب بالایی، مشابه شبه‌کد جواب شاخه پایینی قابل نگارش است. بنابراین جواب تقریبی معادله کلین-گوردن فازی کسری زمانی (1)، که با ترکیب دو روش تبدیل دیفرانسیل کسری و تفاضلات متناهی حاصل شد، به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\begin{aligned} &[\tilde{v}(x_i, t)]^r \\ &\simeq \left[\bar{k}(r) \sum_{k=0}^n \bar{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha}, \bar{k}(r) \sum_{k=0}^n \bar{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha} \right], \\ &0 \leq i \leq N, t > 0, r \in [0, 1]. \end{aligned}$$

5. همگرایی

در این بخش همگرایی روش معرفی شده مورد بررسی قرار

مشتقات مرتبه اول و دوم $\underline{v}(x, t; r)$ توسط فرمول تفاضلات متناهی مرکزی به دست می‌آید. لذا می‌توان گفت $-\xi \in (0, L)$ ای و $\eta \in (0, L)$ ای وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned} & \| \underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i(t; r) \| \\ & \leq a \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \underline{v}(\xi, t; r)}{\partial x^4} \\ & \quad + b \frac{h^4}{36} \left(\frac{\partial^3 \underline{v}(\eta, t; r)}{\partial x^3} \right)^2, \end{aligned} \quad (18)$$

از طرفی بنا به رابطه (16)، برای $n \geq m \geq k_0$ می‌توان نوشت:

$$\| s_n - s_m \| \leq \frac{1 - \delta^{n-m}}{1 - \delta} \delta^{m-k_0+2} \| \varphi_{k_0} \|,$$

چون $0 < \delta < 1$ ، بنابراین $1 - \delta^{n-m} < 1$ و

$$\| s_n - s_m \| \leq \frac{1}{1 - \delta} \delta^{m-k_0+2} \| \varphi_{k_0} \|,$$

اگر $n \rightarrow \infty$ آنگاه $s_n \rightarrow \underline{u}_i(t; r)$ و داریم

$$\| \underline{u}_i(t; r) - s_m \| \leq \frac{1}{1 - \delta} \delta^{m-k_0+2} \| \varphi_{k_0} \|,$$

به عبارت دیگر

$$\| \underline{u}_i(t; r) - \underline{u}_i^m(t; r) \| \leq \frac{1}{1 - \delta} \delta^{m-k_0+2} \| \varphi_{k_0} \|, \quad (19)$$

با جایگذاری رابطه‌های (19) و (18) در رابطه (17)، اثبات کامل می‌شود. ■

6. نتایج عددی

در این بخش برای نشان دادن دقت و کارایی روش معرفی شده، برخی مثال‌های عددی مورد بحث قرار می‌گیرند. خطای مطلق جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی در نقطه گره دلخواه x_i و زمان دلخواه t ، به ازای تعداد تقسیمات N ، از فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

$$E_{lower}^{N,n} = | \underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t) |,$$

$$E_{upper}^{N,n} = | \bar{v}_i(t; r) - \bar{u}_i^n(t) |,$$

لم 1.5 [32]: فرض کنید $\varphi_k(t) = U_i^\alpha(k) t^{k\alpha}$ ، همچنین فرض کنید $k_0 \in \mathbb{N}_0$ و برای $j \geq k_0$ ، $0 < \delta < 1$ موجود باشد به طوری که $\| \varphi_{j+1} \| \leq \delta_{j+1} \| \varphi_j \|$ برقرار باشد. آنگاه سری $s_n = \sum_{k=0}^n \varphi_k$ کوشی خواهد بود و به ازای $n \geq m \geq k_0$ و $\delta = \max \{ \delta_{k_0}, \delta_{k_0+1}, \dots, \delta_n \}$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\| s_n - s_m \| \leq \frac{1 - \delta^{n-m}}{1 - \delta} \delta^{m-k_0+2} \| \varphi_{k_0} \|, \quad (16)$$

همچنین سری $\sum_{k=0}^\infty \varphi_k(t)$ به $\underline{v}_i(t; r)$ همگراست.

قضیه 2.5 [33]: فرض کنید $\underline{v}_i(t; r)$ در نقطه (x_i, t) ، جواب دقیق معادله (3) و $\underline{u}_i(t; r) = \underline{k}(r) \sum_{k=0}^\infty U_i^\alpha t^{k\alpha}$ تقریب نهایی از جواب معادله (7) باشد. همچنین فرض کنید $\underline{u}_i^n(t; r) = \underline{k}(r) \sum_{k=0}^n U_i^\alpha t^{k\alpha}$ معادله (3) باشد. به علاوه فرض کنید $k_0 \in \mathbb{N}_0$ ای موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \geq m \geq k_0$ ، $0 < \delta_j < 1$ موجود باشد به طوری که $\| \varphi_{j+1} \| \leq \delta_{j+1} \| \varphi_j \|$ آنگاه مادامی که $n \rightarrow \infty$ ، جواب $\underline{u}_i^n(t; r)$ به جواب دقیق $\underline{v}_i(t; r)$ همگراست و با فرض پیوستگی $\frac{\partial^4 \underline{v}}{\partial x^4}$ بر بازه $[0, L]$ ، $\xi \in (0, L)$ ای و $\eta \in (0, L)$ ای وجود دارند به طوری که

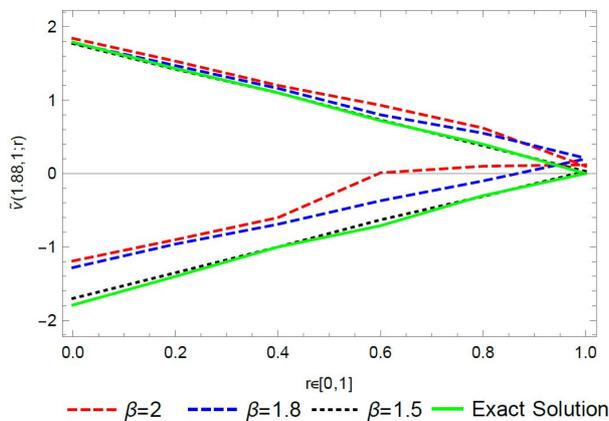
$$\begin{aligned} & \| \underline{v}_i^n(t; r) - \underline{u}_i^n(t; r) \| \\ & \leq a \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \underline{v}(\xi, t; r)}{\partial x^4} \\ & \quad + b \frac{h^4}{36} \left(\frac{\partial^3 \underline{v}(\eta, t; r)}{\partial x^3} \right)^2 \\ & \quad + \frac{1}{1 - \delta} \delta^{m-k_0+2} \| \varphi_{k_0} \|, \end{aligned}$$

برهان. با توجه به فرآیند حل معادله (3) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \| \underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t; r) \| \\ & = \| \underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i(t; r) + \underline{u}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t; r) \| \\ & \leq \| \underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i(t; r) \| \\ & \quad + \| \underline{u}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t; r) \|, \end{aligned} \quad (17)$$

که $\underline{u}_i(t; r)$ تقریبی از جواب $\underline{v}_i(t; r)$ است که از تقریب

ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/5, 1/8$ و $2, \pi, L = \pi$ در شکل (1) رسم شده است.



شکل (1): نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی معادله (20) در $t = 1$ به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/5, 1/8, 2$ و $L = \pi, N = 10$.

در جدول (3)، بیشینه خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی هر دو شاخه بالایی و پایینی معادله (20)، به ازای $\beta = 2$ ، $r = 0.8$ و مقادیر متفاوت N برابر با $4, 8, 10, 16$ و 18 در زمان $t = 1$ نمایش داده شده است. در جدول (4)، بیشینه خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی هر دو شاخه بالایی و پایینی معادله (20)، به ازای $\beta = 2, r = 0.8, \alpha = 1$ و مقادیر متفاوت N برابر با $4, 8, 10, 16$ و 18 در زمان $t = 0.1$ قابل مشاهده است.

جدول (1): مقایسه خطای مطلق روش پیشنهادی و روش ارائه شده در مرجع [29] مربوط به شاخه پایینی معادله (20)، در نقطه $(x, t) = (1.36, 1)$ و به ازای $\beta = 2, \alpha = 1, N = 22, L = \frac{\pi}{2}, n = 70$.

r	روش پیشنهادی	روش [29]
	$E_{lower}^{22,70}$	خطای روش [29]
0	$2/076 \times 10^{-2}$	2/16599
0/2	$1/869 \times 10^{-2}$	1/81227
0/4	$1/662 \times 10^{-2}$	1/45895
0/6	$1/4538 \times 10^{-2}$	1/0563
0/8	$1/2471 \times 10^{-2}$	$7/52317 \times 10^{-1}$
1	$1/039 \times 10^{-2}$	$3/99 \times 10^{-1}$

که در آن $v_i(t; r)$ و $\bar{v}_i(t; r)$ به ترتیب جواب دقیق شاخه پایینی و بالایی معادله (1)، همچنین $\underline{u}_i^n(t)$ و $\bar{u}_i^n(t)$ به ترتیب جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی معادله (1)، به دست آمده از فرمول‌های (13) و (15) می‌باشند. همچنین ماکسیمم خطای مطلق جواب از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{lower}^n = \max_{1 \leq i \leq N-1} |v_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t)|,$$

$$E_{upper}^n = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\bar{v}_i(t; r) - \bar{u}_i^n(t)|.$$

مثال 1.6. معادله کلین-گوردن فازی کسری زمانی با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید [4], [29]:

$${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r) - \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x^2} + \tilde{v}(x, t; r) = 2 \sin(x),$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < 1$$

$$\tilde{v}(x, 0; r) = \tilde{k}(r) \sin(x),$$

$$\tilde{v}_t(x, 0; r) = \tilde{k}(r), 0 \leq x \leq L$$

$$\tilde{v}(0, t; r) = \tilde{k}(r) \sin(t),$$

$$\tilde{v}(L, t; r) = \tilde{k}(r)(\sin(L) + \sin(t)),$$

(20)

که

$$\tilde{k}(r) = [\underline{k}(r), \bar{k}(r)] = [r - 1, 1 - r].$$

جواب دقیق این معادله برای $\beta = 2$ ، عبارتست از: $\tilde{v}(x, t; r) = \tilde{k}(r)(\sin(x) + \sin(t))$ [4], [29].

این مثال با روش شرح داده شده، حل و نتایج حاصل از جداول (1) تا (5) و شکل (1) ارائه می‌شود. جدول (1)، شامل جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق روش پیشنهادی و روش ارائه شده در مرجع [29]، مربوط به شاخه پایینی معادله (20) در نقطه $(x, t) = (1.36, 1)$ به ازای مقادیر $\beta = 2, \alpha = 1, N = 22$ و $L = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. جدول (2)، شامل جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق روش پیشنهادی و روش ارائه شده در مرجع [29]، مربوط به شاخه بالایی معادله (20) در نقطه $(x, t) = (1.36, 1)$ به ازای مقادیر $\beta = 2, \alpha = 1, N = 22$ و $L = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. همچنین نمودار جواب دقیق معادله (20) به ازای $\beta = 2$ و جواب تقریبی شاخه بالایی و پایینی در نقطه $(1, 1/88)$ ، به

جدول (3): بیشینه خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی معادله (20) در لحظه $t = 1$ به ازای $\alpha = 1$, $r = 0.8$, $\beta = 2$ و مقادیر متفاوت N برابر با 4, 8, 10, 16 و 18.

E_{upper}^{20}	E_{lower}^{20}	N
0/6152	0/9132	4
0/3897	0/5830	8
0/2740	0/4104	10
0/0342	0/0513	16
0/0081	0/0122	18

جدول (4): بیشینه خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی معادله (20) در لحظه $t = 0.1$ به ازای $\alpha = 1$, $r = 0.8$, $\beta = 2$ و مقادیر متفاوت N برابر با 4, 8, 10, 16 و 18.

E_{upper}^{20}	E_{lower}^{20}	N
$8/029 \times 10^{-3}$	0/0119188	4
$7/9596 \times 10^{-3}$	0/0119077	8
$7/9308 \times 10^{-3}$	0/011876	10
$7/8218 \times 10^{-3}$	0/0117249	16
$7/7761 \times 10^{-3}$	0/0116581	18

جدول (2): مقایسه خطای مطلق روش پیشنهادی و روش ارائه شده در مرجع [29] مربوط به شاخه‌ی بالایی معادله (20)، در نقطه $(x, t) = (1.36, 1)$ و به ازای $n = 70$ و $\beta = 2$, $\alpha = 1$, $N = 22$, $L = \frac{\pi}{2}$.

روش پیشنهادی	روش [29]
r	خطای روش [29]
0	3×10^{-5}
0/2	$2/11 \times 10^{-3}$
0/4	$4/17 \times 10^{-3}$
0/6	$6/25 \times 10^{-3}$
0/8	$8/324 \times 10^{-3}$
1	$1/039 \times 10^{-2}$

جدول (5)، شامل بیشینه خطای مطلق و زمان انجام محاسبات ($CPUtime$) برحسب ثانیه، مربوط به جواب تقریبی هر دو شاخه پایینی و بالایی معادله (20) به ازای $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $N = 18$ و $L = \pi$ در زمان‌های $t = 0.001(s)$ و $t = 1(s)$ می‌باشد. با توجه به شرایط اولیه و مرزی معادله (20) به ازای $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$ و $a = b = c = d = 1$ شبه‌کد الگوریتم محاسبه جواب شاخه پایینی معادله (20) و خطای حاصل از این تقریب در الگوریتم (2) نمایش داده شده است.

جدول (5): زمان انجام محاسبات و بیشینه خطای مطلق معادله (20)، در زمان‌های t برابر با 1 و 0/001 به ازای $N = 18$, $L = \pi$ و $\alpha = 1$ و $\beta = 2$.

r	$t = 0/001 (s)$			$t = 1 (s)$		
	E_{lower}^{20}	E_{upper}^{20}	$CPUtime(s)$	E_{lower}^{20}	E_{upper}^{20}	$CPUtime(s)$
0	$1/9 \times 10^{-6}$	$1/2 \times 10^{-9}$	1/14	0/0203	$1/2 \times 10^{-5}$	1/14
0/2	$1/7 \times 10^{-6}$	2×10^{-7}	1/12	0/0183	$2/04 \times 10^{-3}$	1/11
0/4	$1/5 \times 10^{-6}$	4×10^{-7}	1/11	0/0162	$4/08 \times 10^{-3}$	1/12
0/6	$1/3 \times 10^{-6}$	6×10^{-7}	1/11	0/0142	$6/11 \times 10^{-3}$	1/12
0/8	$1/1 \times 10^{-6}$	8×10^{-7}	1/16	0/0122	$8/1 \times 10^{-3}$	1/11
1	$9/9 \times 10^{-6}$	$8/9 \times 10^{-7}$	1/14	0/0101	0/0101	1/14

$${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r) - \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x^2} + \tilde{v}(x, t; r) = 0,$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < T,$$

$$\tilde{v}(x, 0; r) = 0,$$

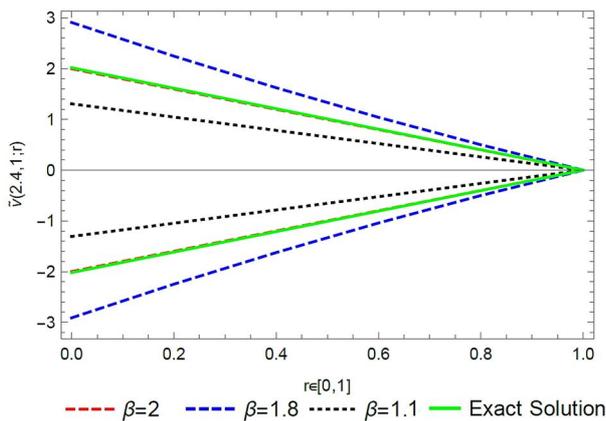
$$\tilde{v}_t(x, 0; r) = \tilde{k}(r)x, 0 \leq x \leq L,$$

$$\tilde{v}(0, t; r) = 0,$$

$$\tilde{v}(L, t; r) = \tilde{k}(r)L \sin(t),$$

$$\tilde{k}(r) = [\underline{k}(r), \bar{k}(r)] = [r - 1, 1 - r]. \quad (21)$$

جواب دقیق این معادله برای $\beta = 2$ ، عبارت است از: $\tilde{v}(x, t; r) = \tilde{k}(r)x \sin(t)$ [4]. این مثال با روش شرح داده شده، حل و نتایج حاصل در جدول (6) و شکل‌های (2)، (3) و (4) قابل مشاهده است. جدول (6)، شامل خطای مطلق حاصل از روش ترکیبی برای حل معادله (21)، به ازای $\beta = 2$ ، $n = 30$ و پارامتر r برابر با $0, 0/25, 0/5, 0/75$ و 1 در نقاط (x, t) برابر با $(0/4, 0/4)$ و $(0/8, 0/9)$ در طول بازه مکانی $[0, 1]$ می‌باشد. زمان انجام محاسبات نیز در جدول (6) قابل مشاهده است. همچنین نمودار جواب دقیق معادله (21) به ازای $\beta = 2$ و جواب تقریبی در نقطه $(2/4, 1)$ ، به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/1, 1/8, 2$ و $n = 30, L = 3$ در $r \in [0, 1]$ و $N = 10$ در شکل (2) رسم شده است.



شکل (2): نمودار جواب معادله (21)، در $t = 1$ به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/1, 1/8, 2$ و $n = 30, L = 3$

شکل (3)، نمودار (آ)، جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (21) را به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/1, 1/6, 2$ و $n = 30$

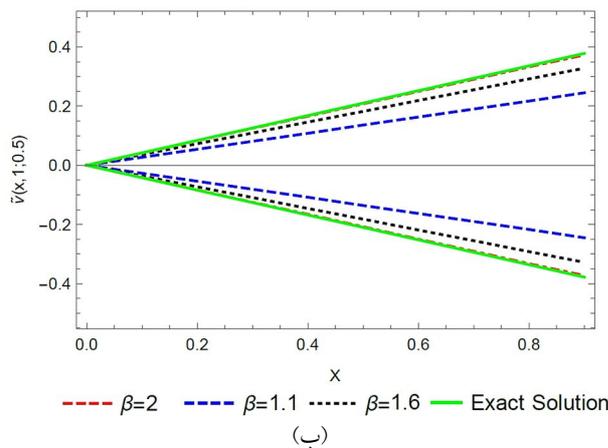
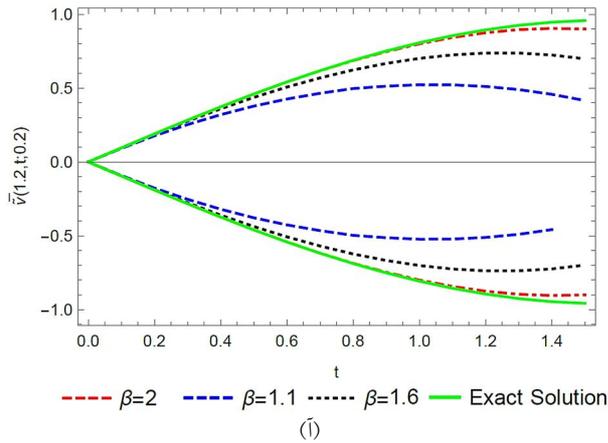
الگوریتم (2): شبه کد الگوریتم محاسبه جواب شاخه‌ی پایینی معادله (20)

```

1: Set uexact to (r - 1) * (sin(x) + sin(t))
2: Define n, h, m, x, t, alpha, r
3: Initialize U
4: for i = 0 to n do
5:   U[i, 0] ← (r - 1) * sin(x[i])
6:   U[i, 1] ← 0
7:   U[i, 2] ← (r - 1)
8:   U[i, 3] ← 0
9: end for
10: for k = 0 to m do
11:   U[0, k] ← (r - 1) *
      sum_{s=0}^{1000} ((-1)^s * Kroneker Delta [k, (2s+1)/alpha]) / (2s+1)!
12:   U[n, k] ← (r - 1) *
      sum_{s=0}^{1000} ((-1)^s * Kroneker Delta [k, (2s+1)/alpha]) / (2s+1)!
13: end for
14: for i = 1 to n - 1 do
15:   for k = 0 to m do
16:     intermediate1 ← Gamma [(alpha * k) + 1] / Gamma [(alpha * k) + 3]
17:     intermediate2 ← (U[i - 1, k] - 2U[i, k] + U[i + 1, k]) / h^2 - U[i, k] + 2 * sin(x[i]) * KronekerDelta[k]
18:     U[i, k + 4] ← intermediate1 * intermediate2
19:   end for
20: end for
21: Initialize uapproximate as an empty list
22: Initialize uu as an empty list
23: error ← 0
24: for i = 1 to n - 1 do
25:   S - Result ← 0
26:   for k = 0 to m do
27:     S - Result ← S - Result + U[i, k] * t^(alpha*k)
28:   end for
29: Append S-Result to uapproximate
30: Append uexact(x[i], t) to uu
31: Calculate the absolute value of uu[i]-uapproximate[i]
32: Append (abs(uu[i]-uapproximate[i])) to error
33: end for
34: Return uapproximate
35: Return error

```

مثال 2.6. معادله کلین - گوردن کسری زمانی فازی با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید [4]، [29]:



شکل (4): (آ) نمودار جواب تقریبی معادله (21)، به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/1$ و 2 و $r = 0.2, N = 10$ و $n = 30$ در بازه مکانی $[0, 1/5]$ (ب): نمودار جواب تقریبی معادله (21)، در لحظه $t = 1$ به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/1$ و 2 و $r = 0.5, n = 30$ در بازه مکانی $[0, 1]$.

مثال 3.6. معادله کلین-گوردن کسری زمانی فازی (غیرخطی) با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید [29]:

$${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r) = \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x} \right)^2 - \tilde{v}^2(x, t; r),$$

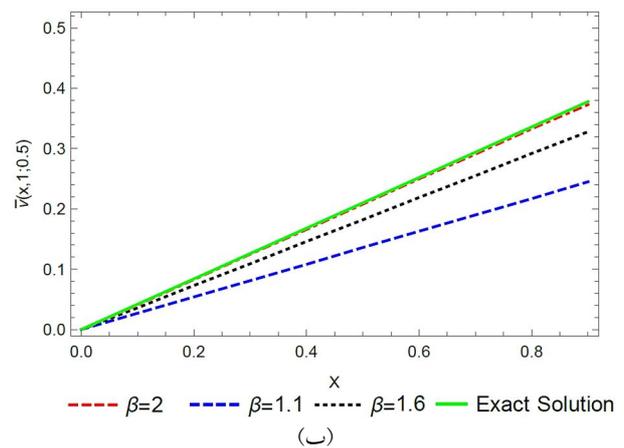
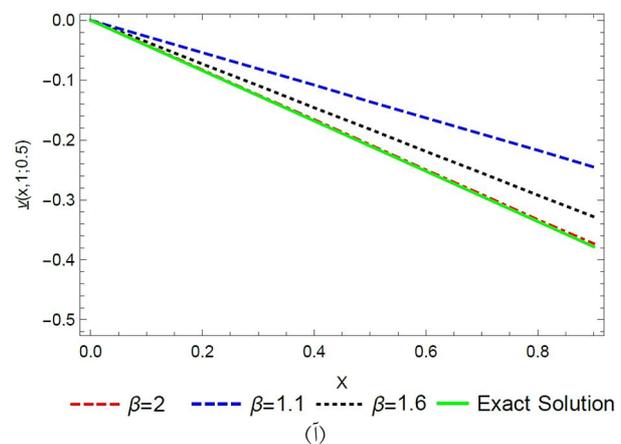
$$1 < \beta \leq 2, 0 \leq x \leq L, t > 0,$$

$$\tilde{v}(x, 0; r) = 0, \tilde{v}_t(x, 0; r) = \tilde{k}(r) e^x, 0 \leq x \leq L$$

$$\tilde{v}(0, t; r) = \tilde{k}(r) \sinh(t), \tilde{v}(L, t; r) = \tilde{k}(r)(e^L \sinh(t)),$$

(22)

با $r = 0.5$ در لحظه $t = 1$ و در طول بازه مکانی $[0, 1]$ با $h = 0.1$ و نمودار (ب)، جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (21) را به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/1$ و 2 و $n = 30, r = 0.5$ در لحظه $t = 1$ و در طول بازه مکانی $[0, 1]$ با $h = 0.1$ نشان می‌دهد. همچنین در شکل (4)، نمودار (آ)، جواب تقریبی هر دو شاخه پایینی و بالایی معادله (21) را به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/1$ و 2 و $r = 0.2, L = 2, n = 30, i = 6$ در طول بازه زمانی $[0, 1/5]$ و نمودار (ب)، جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی معادله (21)، را به ازای β برابر با $1/6, 1/1$ و 2 و $r = 0.5, n = 30$ در لحظه $t = 1$ در بازه مکانی $[0, 1]$ نشان می‌دهند.



شکل (3): (آ) نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (21)، در لحظه $t = 1$ به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/1$ و 2 و $r = 0.5, N = 10$ و $n = 30$ در بازه مکانی $[0, 1]$ (ب): نمودار جواب تقریبی شاخه بالایی معادله (21)، در لحظه $t = 1$ به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/1$ و 2 و $r = 0.5, N = 10$ و $n = 30$ در بازه مکانی $[0, 1]$.

که

$$\bar{k}(r) = [\underline{k}(r), \bar{k}(r)] = [r - 1, 1 - r].$$

جواب دقیق این معادله برای $\beta = 2$ عبارت است از:

$$\bar{v}(x, t; r) = \bar{k}(r)(e^x \sinh(t)) \quad [29].$$

نتایج حاصل از بکارگیری روش معرفی شده برای حل معادله (22) در جدول (7) و شکل‌های (5) و (6) قابل مشاهده است.

جدول (7)، خطای مطلق حاصل از روش ترکیبی را برای حل معادله (22)، به ازای $\beta = 2$ ، $n = 25$ ، $N = 10$ و r برابر با 0، 0/25، 0/5، 0/75 و 1، در نقاط (x, t) برابر با (0/5، 0/5) و (0/8، 0/2) در طول بازه مکانی $[0, 1]$ و زمان انجام محاسبات را برحسب ثانیه نشان می‌دهد. شکل (5)، نمودارهای (آ) و

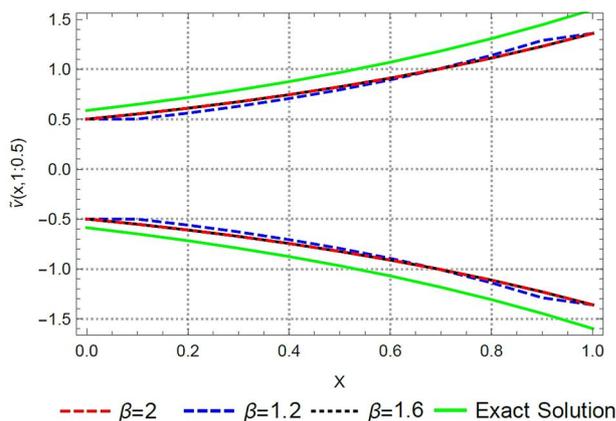
(ب)، به ترتیب، نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی معادله (22)، به ازای مقادیر β برابر با 1/6، 1/2 و 2، $r = 0.5$ و $n = 25$ در $t = 1$ ، در طول بازه مکانی $[0, 1]$ می‌باشند. همچنین شکل (6)، نمودار (آ)، جواب تقریبی هر دو شاخه پایینی و بالایی معادله (22)، به ازای مقادیر β برابر با 1/6، 1/2 و 2، $r = 0.5$ و $n = 25$ در طول بازه مکانی $[0, 1]$ را نشان می‌دهد و نمودار (ب)، نمودار جواب دقیق معادله (22) و جواب تقریبی را به ازای مقادیر مختلف β برابر با 1/6، 1/2، 2، $r \in [0, 1]$ ، $h = 0.1$ ، $L = 1$ و $n = 25$ در نقطه (1، 1)، نمایش می‌دهد.

جدول (6): خطای مطلق روش پیشنهادی مربوط به معادله (21)، در نقاط $(x, t) = (0/4, 0/4)$ و $(x, t) = (0/8, 0/9)$ به ازای $N = 10$ ، $\beta = 2$ ، $L = 1$ و $n = 30$.

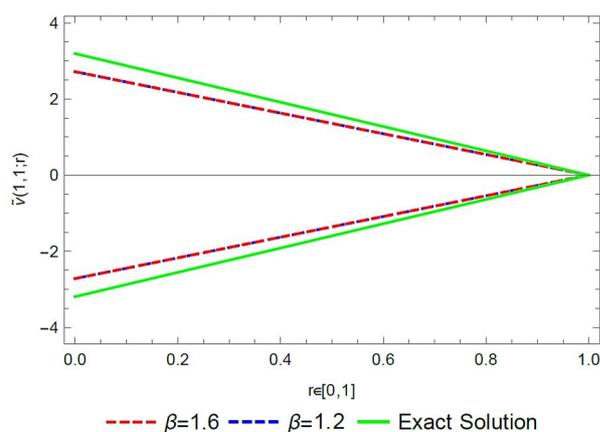
r	$x=0/4, t=0/4$			$x=0/8, t=0/9$		
	E_{lower}^{20}	E_{upper}^{20}	CPUtime(s)	E_{lower}^{20}	E_{upper}^{20}	CPUtime(s)
0	$3/4 \times 10^{-5}$	$3/4 \times 10^{-5}$	0/89	$3/8 \times 10^{-3}$	$3/8 \times 10^{-3}$	0/87
0/25	$2/5 \times 10^{-5}$	$2/5 \times 10^{-5}$	0/89	$2/8 \times 10^{-3}$	$2/8 \times 10^{-3}$	0/89
0/5	$1/7 \times 10^{-5}$	$1/7 \times 10^{-5}$	0/89	$1/9 \times 10^{-3}$	$1/9 \times 10^{-3}$	0/89
0/75	$8/5 \times 10^{-6}$	$8/5 \times 10^{-5}$	0/89	$9/6 \times 10^{-3}$	$9/6 \times 10^{-34}$	0/87
1	0/0000	0/0000	0/91	0/0000	0/0000	0/89

جدول (7): خطای روش پیشنهادی مربوط به معادله (22) برای نقاط $(x, t) = (0/5, 0/5)$ و $(x, t) = (0/8, 0/2)$ به ازای $N = 10$ و $\beta = 2$.

r	$x=0/5, t=0/5$			$x=0/8, t=0/2$		
	$E_{lower}^{10,25}$	$E_{upper}^{10,25}$	CPUtime(s)	$E_{lower}^{10,25}$	$E_{upper}^{10,25}$	CPUtime(s)
0	$3/4 \times 10^{-2}$	$3/4 \times 10^{-2}$	1/42	$2/9 \times 10^{-3}$	$2/9 \times 10^{-3}$	1/39
0/25	$2/6 \times 10^{-2}$	$2/6 \times 10^{-2}$	1/42	$2/2 \times 10^{-3}$	$2/2 \times 10^{-3}$	1/40
0/5	$1/7 \times 10^{-2}$	$1/7 \times 10^{-2}$	1/42	$1/4 \times 10^{-3}$	$1/4 \times 10^{-3}$	1/42
0/75	$8/6 \times 10^{-3}$	$8/6 \times 10^{-3}$	1/44	$7/4 \times 10^{-4}$	$7/4 \times 10^{-4}$	1/40
1	0/0000	0/0000	1/44	0/0000	0/0000	1/42

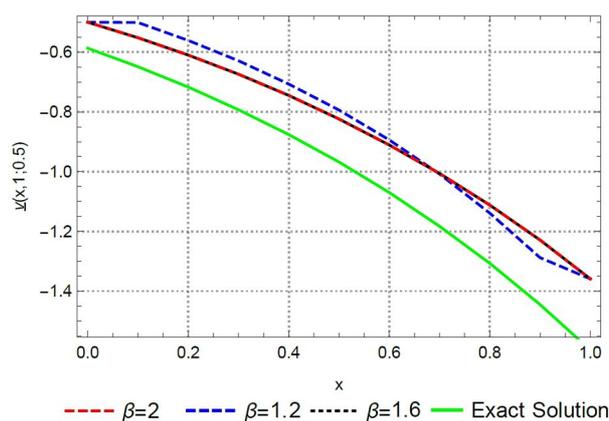


(ا)

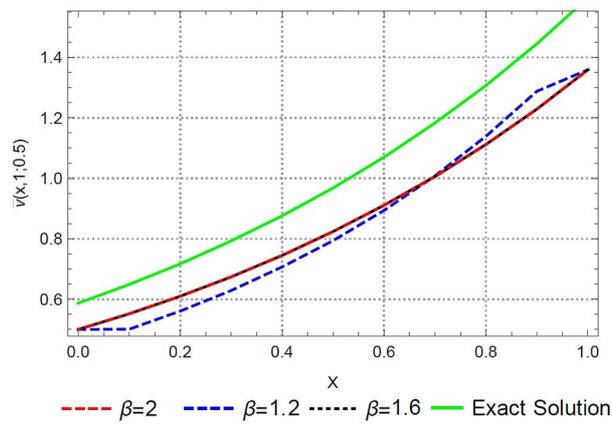


(ب)

شکل (6): (ا) نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (22)، در لحظه $t = 1$ ، به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/2$ و 2 و $r = 0.5$ و $n = 25$ در طول بازه مکانی $[0, 1]$ و (ب): نمودار جواب تقریبی معادله (22)، در نقطه $(1, 1)$ ، به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/2$ و 2 و $r \in [0, 1]$ و $n = 25$.



(ا)



(ب)

شکل (5): (ا) نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (22)، در لحظه $t = 1$ ، به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/2$ و 2 و $r = 0.5$ و $n = 25$ در طول بازه مکانی $[0, 1]$ و (ب): نمودار جواب تقریبی شاخه بالایی معادله (22)، به ازای مقادیر مختلف β برابر با $1/6, 1/2$ و 2 و $r = 0.5$ و $n = 25$ در طول بازه مکانی $[0, 1]$.

7. نتیجه گیری

همچنین، کران بالایی برای خطای جواب حاصل از روش به دست آمد. الگوریتم روش پیشنهادی به سادگی قابل پیاده سازی است و نتایج حاصل از شبیه سازی عددی نشان می دهد دقت و کارایی روش قابل توجه است. همچنین پایین بودن زمان اجرای محاسبات نیز می تواند به عنوان نقطه قوت روش لحاظ شود. مقایسه روش با روش های موجود برای حل معادله کلین-گوردن فازی نشان داد، این روش از دقت قابل قبولی برخوردار است. برای حل معادلات با مشتقات جزئی، روش تبدیل دیفرانسیل دوبعدی نیز قابل استفاده است؛ ولی در این مقاله، همانگونه که ذکر شد، با استفاده تکنیک نیمه گسسته سازی با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مواجهیم که برای حل

معادله کلین-گوردن فازی، یکی از معادلات پر کاربرد در ریاضی - فیزیک است. همانند سایر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی، غیرخطی بودن این معادله نیز سبب می شود، یافتن جواب تحلیلی آن سخت یا حتی غیرممکن باشد. لذا ساختن روش های عددی برای به دست آوردن تقریبی از جواب معادله دارای اهمیت است. در این مقاله، روشی ترکیبی بر اساس دو روش تفاضلات متناهی و تبدیل دیفرانسیل کسری برای حل عددی معادله مذکور معرفی و استفاده شد.

مکانی [34] و استفاده از روش‌های بهینه‌سازی [35]، [36] برطرف کنیم. روش مورد استفاده در این مقاله، با در نظر گرفتن تمام معایب و مزایایش برای حل عددی بسیاری از معادلات ديفرانسیل با مشتقات جزئی کسری (اعم از خطی و غیرخطی) که از مسائل مربوط به فیزیک، مهندسی برق، مهندسی مکانیک و مهندسی شیمی ناشی می‌شوند، قابل استفاده است.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافعی ندارند.

آن از تبدیل ديفرانسیل کسری یک بعدی استفاده می‌شود. مزیت این کار، پیاده‌سازی ساده‌تر الگوریتم نسبت به استفاده از روش تبدیل ديفرانسیل دوبعدی می‌باشد، ولی از طرفی با وارد کردن روش تفاضلات متناهی، روش ترکیبی متاثر از خطای گسسته‌سازی و خطای گرد کردن ناشی از طول گام خیلی کوچک خواهد بود. از دیگر نقاط ضعف این روش، این است که دامنه همگرایی روش تبدیل ديفرانسیل معمولاً کوچک است و این موضوع سبب می‌شود که برای زمان‌های بزرگ، دقت خیلی خوبی حاصل نشود. برای ادامه کار درصدد هستیم در صورت امکان، این مشکلات را با آزمودن فرمول‌های تفاضلات متناهی مرتبه بالا (روش‌های فشرده) برای تقریب مشتقات

مراجع

- [1] H. Moradi Farahani, J. Asgari, and M. Zakeri, "A Surveying on Type-2 Fuzzy Logic: Its Genesis and Its Application," *Soft Comput. J.*, vol. 2, no. 1, pp. 22-43, 2013, doi: 20.1001.1.23223707.1392.2.1.58.2 [In Persian].
- [2] A. Akrami and M. Parsamanesh, "Investigation of a mathematical fuzzy epidemic model for the spread of coronavirus in a population," *Soft Comput. J.*, vol. 11, no. 1, pp. 2-9, 2022, doi: 10.22052/scj.2022.246053.1045 [In Persian].
- [3] R. Akhoondi and R. Hosseini, "A Novel Fuzzy-Genetic Differential Evolutionary Algorithm for Optimization of A Fuzzy Expert Systems Applied to Heart Disease Prediction," *Soft Comput. J.*, vol. 6, no. 2, pp. 32-47, 2018, doi: 20.1001.1.23223707.1396.6.2.3.7 [In Persian].
- [4] M. Alshammari, W.W. Mohammed, and M. Yar, "Novel analysis of fuzzy fractional Klein-Gordon model via semianalytical method," *Function Spaces*, pp. 1-9, 2022, doi: 10.1155/2022/40020269.
- [5] S. Arshad and V. Lupulescu, "On the fractional differential equations with uncertainty," *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, vol. 74, no. 11, pp. 3685-3693, 2011, doi: 10.1016/j.na.2011.02.048.
- [6] S. Arshad and V. Lupulescu, "Fractional differential equation with the fuzzy initial condition," *Electron. J. Differ. Equ.*, vol. 2011, no. 34, pp. 1-8, 2011.
- [7] A. Ahmadian, M. Suleiman, S. Salahshour, and D. Baleanu, "Jacobi operational matrix for solving a fuzzy linear fractional differential equation," *Adv. Differ. Equ.*, vol. 2013, no. 1, pp. 1-29, 2013, doi: 10.1186/1687-1847-2013-104.
- [8] E. Khodadadi and E. Celik, "The variational iteration method for fuzzy fractional differential equations with uncertainty," *Fix. Point Theory Appl.*, vol. 2013, pp. 1-7, 2013, doi: 10.1186/1687-1812-2013-13.
- [9] S. Arshad, "On existence and uniqueness of solution of fuzzy fractional differential equations," *J. Fuzzy Syst.*, vol. 10, no. 6, pp. 137-151, 2013.
- [10] D. Takaci, A. Takaci, and A. Takaci, "On the operational solutions of fuzzy fractional differential equations," *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 17, pp. 1100-1113, 2014, doi: 10.2478/s13540-014-0216-y.
- [11] A. Rivaz, O.S. Fard, and T.A. Bidgoli, "Solving fuzzy fractional differential equations by a generalized differential transform method," *SeMA*

- J., vol. 73, pp. 149-170, 2016, doi: 10.1007/s40324-015-0016-x.
- [12] N.A. Rahman and M.Z. Ahmad, "Solving fuzzy fractional differential equations using fuzzy Sumudu transform," *J. Nonlinear Sci. Appl.*, vol. 10, no. 5, pp. 2620-2632, 2017, doi: 10.22436/jnsa.010.05.28.
- [13] S. Tomasiello and J.E. Macias-Diaz, "Note on a Picard-like method for Caputo fuzzy fractional differential equations," *Appl. Math. Inf. Sci.*, vol. 11, no. 1, pp. 281-287, 2017, doi: 10.18576/amis/110134.
- [14] M. Alaroud, M. Al-Smadi, R.R. Ahmad, and U.K.S. Din, "Computational optimization of residual power series algorithm for certain classes of fuzzy fractional differential equations," *J. Differ. Equ.*, vol. 2018, pp. 1-11, 2018, doi: 10.1155/2018/8686502.
- [15] A. Harir, S. Melliani, and L.S. Chadli, "Fuzzy space-time fractional telegraph equations," *J. Math. Trends Technol.*, vol. 64, no. 2, pp. 101-108, 2018, doi: 10.1155/2019/5734190.
- [16] A. Armand, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, and Z. Gouyandeh, "The fuzzy generalized Taylor's expansion with application in fractional differential equations," *Int. J. Fuzzy Syst.*, vol. 16, no. 2, pp. 57-72, 2019, doi: 10.22111/IJFS.2019.4542.
- [17] K. Shah, A.R. Seadawy, and M. Arfan, "Evaluation of one dimensional fuzzy fractional partial differential equations," *Alexandria Eng. J.*, vol. 59, no. 5, pp. 3347-3353, 2020, doi: 10.1016/j.aej.2020.05.005.
- [18] O.A. Arqub and M. Al-Smadi, "Fuzzy conformable fractional differential equations: novel extended approach and new numerical solutions," *Soft Comput.*, vol. 24, no. 16, pp. 12501-12522, 2020, doi: 10.1007/s00500-020-04687-0.
- [19] Z. Alijani, D. Baleanu, B. Shiri, and G.C. Wu, "Spline collocation methods for systems of fuzzy fractional differential equations," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 131, p. 109510, 2020, doi: 10.1016/j.chaos.2019.109510.
- [20] A. El Mfadel, S. Melliani, and M.H. Elomari, "A note on the stability analysis of fuzzy nonlinear fractional differential equations involving the Caputo fractional derivative," *J. Math. Math. Sci.*, vol. 2021, pp. 1-6, 2021, doi: 10.1155/2021/7488524.
- [21] E.U. Haq, Q.M. U. Hassan, J. Ahmad, and K. Ehsan, "Fuzzy solution of system of fuzzy fractional problems using a reliable method," *Alexandria Eng. J.*, vol. 61, no. 4, pp. 3051-3058, 2022, doi: 10.1016/j.aej.2021.08.034.
- [22] J.J. Sakurai and E.D. Commins, *Modern Quantum Mechanics*, Revised ed. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1995, doi: 10.1119/1.17781.
- [23] M. Mulimani and S. Kumbinarasaiah, "A numerical study on the nonlinear fractional Klein-Gordon equation," *J. Umm Al-Qura Univ. Appl. Sci.*, pp. 1-22, 2023, doi: 10.1007/s43994-023-00091-0.
- [24] A.K. Golmankhaneh, A.K. Golmankhaneh, and D. Baleanu, "On nonlinear fractional Klein-Gordon equation," *Signal Process.*, vol. 91, no. 3, pp. 446-451, 2011, doi: 10.1016/j.sigpro.2010.04.016.
- [25] K.A. Gepreel and M.S. Mohamed, "Analytical approximate solution for nonlinear spacetime fractional Klein-Gordon equation," *Chin. Phys. B*, vol. 22, no. 1, p. 010201, 2013, doi: 10.1088/1674-1056/22/1/010201.
- [26] K. Hosseini, P. Mayeli, and R. Ansari, "Modified Kudryashov method for solving the conformable time-fractional Klein-Gordon equations with quadratic and cubic nonlinearities," *Optik*, vol. 130, pp. 737-742, 2017, doi: 10.1016/j.ijleo.2016.10.136.
- [27] H. Singh, D. Kumar, J. Singh, and C.S. Singh, "A reliable numerical algorithm for the fractional Klein-Gordon equation," *Eng. Trans.*, vol. 67, no. 1, pp. 21-34, 2019, doi: 10.24423/EngTrans.910.20190214.
- [28] R.M. Ganji, H. Jafari, M. Kgarose, and A.

- Mohammadi, "Numerical solutions of timefractional Klein-Gordon equations by clique polynomials," *Alexandria Eng. J.*, vol. 60, no. 5, pp. 4563-4571, 2021, doi: 10.1016/j.aej.2021.03.026.
- [29] V.R. Nikam, S.B. Gaikwad, S.A. Tarate, and K.A. Kshirsagar, "Fuzzy Laplace-Adomian Decomposition Method for Approximating Solutions of Time Fractional Klein-Gordon Equations in a Fuzzy Environment," *Eur. Chem. Bull.*, vol. 12, no. 8, pp. 5926-5943, 2023, doi: 10.1155/2022/3864053.
- [30] S.H. Hashemi Mehne, "Differential transform method: A comprehensive review and analysis," *Iran. J. Numer. Anal. Optim.*, vol. 12, no. 3, pp. 629-657, 2022, doi: 10.22067/IJNAO.2022.77130.1153.
- [31] V.S. Erturk, S. Momani, and Z. Odibat, "Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 13, no. 8, pp. 1642-1654, 2008, doi: 10.1016/j.cnsns.2007.02.006.
- [32] Z. Odibat, S. Kumar, N. Shawagfeh, A. Alsaedi, and T. Hayat, "A study on the convergence conditions of generalized differential transform method," *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 40, pp. 40-48, 2016, doi: 10.1002/mma.3961.
- [33] Z. Sahraee and M. Arabameri, "A semi-discretization method based on finite difference and differential transform methods to solve the time-fractional telegraph equation," *Symmetry*, vol. 15, no. 9, p. 1759, 2023, doi: 10.3390/sym15091759.
- [34] H. Porki, M. Arabameri, and R. Gharechahi, "Numerical solution of nonlinear fractional Riccati differential equations using compact finite difference method," *Iran. J. Numer. Anal. Optim.*, vol. 12, no. 3, pp. 585-606, 2022, doi: 10.22067/IJNAO.2022.76489.1129.
- [35] Z. Avazzadeh, H. Hassani, P. Agarwal, S. Mehrabi, M.J. Ebadi, and M.K. Hosseini Asl, "Optimal study on fractional fascioliasis disease model based on generalized Fibonacci polynomials," *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 46, no. 8, pp. 9332-9350, 2023, doi: 10.1002/mma.9057.
- [36] Z. Avazzadeh, H. Hassani, M. J. Ebadi, P. Agarwal, M. Poursadeghfard, and E. Naraghirad, "Optimal approximation of fractional order brain tumor model using generalized Laguerre polynomials," *Iran. J. Sci.*, vol. 47, no. 2, pp. 501-513, 2023, doi: 10.1007/s40995-022-01388-1.