

# حل معادله کلین-گوردن کسری زمانی فازی با استفاده از ترکیب دو روش تفاضلات متناهی و تبدیل دیفرانسیل کسری

زهرا صحرائی<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری و مریم عرب‌عامری\*<sup>۲</sup>، دانشیار

<sup>۱</sup> گروه ریاضی - دانشکده ریاضی - دانشگاه سیستان و بلوچستان - زاهدان - ایران - (zahrasahraye@pgs.usb.ac.ir)

<sup>۲</sup> گروه ریاضی - دانشکده ریاضی - دانشگاه سیستان و بلوچستان - زاهدان - ایران - (arabameri@math.usb.ac.ir)

**چکیده:** در این مقاله یک روش ترکیبی برای حل معادله دیفرانسیل کلین - گوردن کسری زمانی فازی ارائه می‌شود. روش مذکور، مبتنی بر ترکیب روش‌های تبدیل دیفرانسیل و تفاضلات متناهی است، به این ترتیب که با استفاده از تکنیک نیمه گسسته‌سازی، ابتدا شاخه پایینی معادله فازی کلین - گوردن به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی کسری تبدیل می‌شود، سپس با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل کسری، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاصل حل می‌شود و جواب شاخه پایینی به دست می‌آید. در نهایت، با به‌کارگیری این روند برای شاخه بالایی معادله، جواب تقریبی شاخه بالایی و به دنبال آن، جواب تقریبی معادله کلین - گوردن کسری فازی به دست می‌آید. همگرایی روش مورد بررسی قرار می‌گیرد و با ارائه مثال‌های عددی، نشان داده می‌شود که این ایده، برای حل معادله فازی کسری از کارایی و دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین زمان اجرای محاسبات نشان می‌دهد، هزینه محاسباتی آن پایین است.

**واژه‌های کلیدی:** معادله کلین - گوردن کسری فازی، روش تبدیل دیفرانسیل کسری، روش تفاضلات متناهی، همگرایی.

\* نویسنده مسئول، arabameri@math.usb.ac.ir

# Solving the fuzzy time-fractional Klein-Gordon equation using the finite difference and differential transform methods

---

Zahra Sahraee <sup>1</sup>, PhD student, Maryam Arabameri <sup>2\*</sup>, Associate Professor

<sup>1</sup> Dept. Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran, zahrasahraye@pgs.usb.ac.ir

<sup>2</sup> Dept. Mathematics, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran, arabameri@math.usb.ac.ir

**Abstract:** In this paper, a hybrid method is presented to solve the fuzzy time-fractional Klein-Gordon equation. This method is a combination of finite difference and fractional differential transform methods. In this way, using the semi-discretization technique, the lower branch of the fuzzy Klein-Gordon equation is converted to a system of ordinary differential equations. Then, the obtained system of differential equations is solved by the fractional differential transform method, and the solution of the lower branch is obtained. Finally, by using the same procedure for the upper branch, the approximate solution of the upper branch, and the approximate solution of the fuzzy fractional Klein-Gordon equation is obtained. The convergence is examined, also, the efficiency and accuracy of this method are approved by solving some examples using the proposed method. Also, the CPU time shows the computational cost of this algorithm is low.

**Keywords:** *Fuzzy fractional Klein-Gordon equation; Fractional differential transform method; Finite difference method; Approximate solution; Convergence.*

\* Corresponding author, arabameri@math.usb.ac.ir

## ۱. مقدمه

کسری فازی را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل کردند و جواب معادله دیفرانسیل کسری فازی را با دقتی بالا به دست آوردند [۷]. در سال ۲۰۱۳، خدادادی<sup>۴</sup> و سلیک<sup>۵</sup>، معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط اولیه فازی را با روش تکرار وردشی حل کردند [۸]. در همان سال، ارشد، به بررسی وجود جواب معادلات دیفرانسیل کسری فازی پرداخت که در آن مشتق از نوع ریمان - لیوویل<sup>۶</sup> بود [۹]. در سال ۲۰۱۴، تاکاچی<sup>۷</sup> و همکارانش معادلات دیفرانسیل کسری فازی با ضرایب فازی را مورد بررسی قرار دادند که با توجه به تعریف مشتقات فازی، دستگاه معادلات جبری فازی به دست آوردند و جواب‌های تقریبی معادلات را ارائه کردند [۱۰]. در سال ۲۰۱۶، ریواز<sup>۸</sup> و همکارانش روشی مبتنی بر روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته ارائه کردند و به حل معادلات دیفرانسیل کسری فازی پرداختند [۱۱]. در سال ۲۰۱۷، رحمان<sup>۹</sup> و احمد<sup>۱۰</sup> نیز جواب معادله دیفرانسیل کسری فازی خطی را با استفاده از تبدیل سومودوی<sup>۱۱</sup> فازی به دست آوردند [۱۲]. در همان سال توماسیلو<sup>۱۲</sup> و ماسیاس - دیاز<sup>۱۳</sup> با استفاده از روش تکراری پیکارد<sup>۱۴</sup> معادلات دیفرانسیل کسری فازی را حل کردند [۱۳]. در سال ۲۰۱۸، الارود<sup>۱۵</sup> و همکارانش با استفاده از روش

از آنجا که نظریه مجموعه‌های فازی ابزاری مناسب برای مدل‌سازی مسائل با عدم قطعیت است؛ در نتیجه، مفاهیم فازی برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مختلفی به کار گرفته شده‌اند [۱، ۲، ۳].

معادلات دیفرانسیل فازی، یک مدل پرکاربرد در زمینه‌های مختلف علمی است، به عنوان مثال مسائل جمعیت، الکتروهایدرولیک، ارزیابی سیستم سلاح و مهندسی عمران توسط معادلات دیفرانسیل فازی مدل‌سازی می‌شوند. به همین دلیل است که مفهوم مشتق کسری فازی نیز در محاسبات فازی، مفهومی مهم و کاربردی است [۴]. در ادامه، نمونه‌هایی از پژوهش‌های مرتبط با معادلات دیفرانسیل کسری فازی معرفی می‌شوند که نشانه اهمیت موضوع می‌باشد.

در سال ۲۰۱۱، ارشد<sup>۱</sup> و همکارانش به اثبات نتایج و قضایایی در مورد وجود و منحصر بفردی جواب معادلات دیفرانسیل کسری فازی و دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط اولیه فازی پرداختند [۵، ۶]. در سال ۲۰۱۳، احمدیان<sup>۲</sup> و همکارانش با روش تاو<sup>۳</sup> و استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، معادله دیفرانسیل

<sup>9</sup> Rahman

<sup>10</sup> Ahmad

<sup>11</sup> Sumudu

<sup>12</sup> Tomasiello

<sup>13</sup> Macías-Díaz

<sup>14</sup> Picard

<sup>15</sup> Alaroud

<sup>1</sup> Arshad

<sup>2</sup> Ahmadian

<sup>3</sup> Tau

<sup>4</sup> Khodadadi

<sup>5</sup> Çelik

<sup>6</sup> Riemann-Liouville

<sup>7</sup> Takaci

<sup>8</sup> Rivaz

جدیدی در خصوص پایداری جواب معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی دست یافتند [۲۰]. در سال ۲۰۲۲، الحق<sup>۲۴</sup> و همکارانش دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری فازی را با روش تبدیل دیفرانسیل کسری حل کردند [۲۱].

هدف این مقاله، ارائه روشی برای حل معادله کلین - گوردن کسری فازی است. معادله کلین - گوردن حالت نسبیتی معادله شرودینگر است و برای ذرات کوانتومی با اسپین صفر به کار می‌رود. این معادله به اسم دو فیزیکدان به نام‌های کلین<sup>۲۵</sup> و گوردن<sup>۲۶</sup> نامگذاری شده است [۲۲]. معادلات کلین - گوردن نقش مهمی در مسائل فیزیکی، زیست‌شناسی ریاضی، سینماتیک پلاسما، نظریه میدان کوانتومی و اپتیک غیرخطی دارند که کشف پدیده‌های متعددی مانند جابه‌جایی کریستال‌ها و رفتار ذرات بنیادی از کاربردهای مهم این معادلات است [۴].

فرم کلی معادله کلین - گوردن مرتبه کسری قطعی به صورت زیر می‌باشد [۲۳]:

$${}^c D_t^\beta v(x, t) = F \left( x, t, v(x, t), \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right),$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < T,$$

سری توانی، دسته‌ای خاص از معادلات دیفرانسیل کسری فازی که مشتق در آن از نوع کاپوتو<sup>۱۶</sup> بود؛ را حل کردند [۱۴]. در همان سال، حریر<sup>۱۷</sup> و همکارانش به حل معادله تلگراف فازی زمان - مکان کسری پرداختند [۱۵]. در سال ۲۰۱۹، آرمند<sup>۱۸</sup> و همکارانش قضیه مقدار میانگین کسری فازی را برای انتگرال و برخی ویژگی‌های مشتق هوکوهاری<sup>۱۹</sup> تعمیم یافته کاپوتو اثبات کردند و با استفاده از آن توانستند سری تیلور تعمیم یافته فازی را برای توابع فازی ارائه دهند [۱۶]. در سال ۲۰۲۰، شاه<sup>۲۰</sup> و همکارانش جواب تحلیلی برخی معادلات دیفرانسیل فازی جزئی کسری خطی را با شرایط خاص، بررسی کردند؛ که این کار به کمک تبدیلات لاپلاس انجام شده است [۱۷]. در همان سال، تعریفی جدید موسوم به مشتق کسری تطبیق‌پذیر فازی ارائه شد و تمام ویژگی‌ها مانند وجود و منحصربفردی جواب معادلات دیفرانسیل کسری تطبیق‌پذیر فازی مورد بررسی قرار گرفت [۱۸]. همچنین در همان سال، علیجانی<sup>۲۱</sup> و همکارانش روش هم‌محلی اسپلاین را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری فازی با مشتق هوکوهارا و مشتق هوکوهاری تعمیم یافته مورد بررسی قرار دادند [۱۹]. در سال ۲۰۲۱، المفادل<sup>۲۲</sup> و همکارانش با تعمیم روش مستقیم لیاپانوف<sup>۲۳</sup> از حالت معمولی فازی به حالت کسری فازی، به نتایج

<sup>22</sup> El Mfadel

<sup>23</sup> Lyapunov

<sup>24</sup> Ul Haq

<sup>25</sup> Klein

<sup>26</sup> Gordon

<sup>16</sup> Caputo

<sup>17</sup> Harir

<sup>18</sup> Armand

<sup>19</sup> Hukuhara

<sup>20</sup> Shah

<sup>21</sup> Alijani

در این مقاله، حالت فازی معادله کلین - گوردن کسری زمانی به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r) + a \frac{\partial^\gamma \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x^\gamma} + b \left( \frac{\partial \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x} \right)^\gamma + c \tilde{v}^\gamma(x, t; r) + d \tilde{v}^\gamma(x, t; r) = \tilde{k}(r) h(x, t),$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < T, \quad (1.1)$$

شرایط اولیه و مرزی نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$\tilde{v}(x, 0; r) = \tilde{k}(r) f_1(x),$$

$$\tilde{v}_t(x, 0; r) = \tilde{k}(r) f_2(x), 0 \leq x \leq L,$$

$$\tilde{v}(0, t; r) = \tilde{k}(r) g_1(t),$$

$$\tilde{v}(L, t; r) = \tilde{k}(r) g_2(t), 0 \leq t \leq T,$$

به طوری که  $\tilde{v}(L, t; r)$  تغییر موقعیت موج را در مکان  $x$  و زمان  $t$  نمایش می دهد،  $a, b, c$  و  $d$  اعداد ثابت و  $f_1, f_2, g_1, g_2, h$  توابعی معلوم هستند. توابع  $f_1$  و  $f_2$  به ترتیب تاب و سرعت موج نامیده می شوند،  $\tilde{v}^\gamma(x, t; r)$  نیروی غیرخطی،  $\tilde{v}(x, t; r)$  تابعی فازی مقدار و  $\tilde{k}(r) = [\underline{k}(r), \bar{k}(r)]$  عددی فازی

شرایط اولیه و مرزی نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$v(x, 0) = f_1(x), v_t(x, 0) = f_2(x), 0 \leq x \leq L,$$

و

$$v(0, t) = g_1(t), v(L, t) = g_2(t), 0 \leq t \leq T.$$

در سال ۲۰۱۱، معادله دیفرانسیل کلین - گوردن کسری غیرخطی توسط گلمانخانه<sup>۲۷</sup> و همکارانش با استفاده از روش اغتشاش هموتویی حل شد [۲۴]. در سال ۲۰۱۳، گیریل<sup>۲۸</sup> و محمد<sup>۲۹</sup> با همین روش به حل معادله کلین - گوردن غیرخطی زمان - مکان کسری پرداختند [۲۵]. در سال ۲۰۱۷، حسینی<sup>۳۰</sup> و همکارانش روشی موسوم به کوریاشوف<sup>۳۱</sup> اصلاح شده را برای حل معادلات کلین - گوردن کسری تطبیق پذیر به کار بردند [۲۶]. در سال ۲۰۱۹، سینگ<sup>۳۲</sup> و همکارانش به وسیله الگوریتمی عددی که اساس کار آن ماتریس های عملیاتی توابع مقیاس لژاندر بود؛ به جواب تقریبی معادلات کلین - گوردن کسری دست یافتند [۲۷]. در سال ۲۰۲۱، گنجی<sup>۳۳</sup> و همکارانش نیز، به وسیله ماتریس های عملیاتی به حل معادله کلین - گوردن کسری زمانی پرداختند [۲۸].

<sup>31</sup> Kudryashov

<sup>32</sup> Singh

<sup>33</sup> Ganji

<sup>27</sup> Golmankhaneh

<sup>28</sup> Gepreel

<sup>29</sup> Mohamed

<sup>30</sup> Hosseini

می‌باشد. همچنین  ${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r)$  مشتق کسری کاپوتو نسبت به  $t$  از مرتبه  $\beta$  می‌باشد.

در سال ۲۰۲۲، معادله کلین - گوردن کسری زمانی فازی با روشی نیمه‌تحلیلی توسط الشماری<sup>۳۴</sup> و همکارانش حل شده است [۴]. همچنین در سال ۲۰۲۳، نیکام<sup>۳۵</sup> و همکارانش به حل این معادله با روش تجزیه لاپلاس - آدومیان<sup>۳۶</sup> فازی پرداختند [۲۹].

روش موردنظر در این مقاله، روشی ترکیبی براساس دو روش تفاضلات متناهی و تبدیل دیفرانسیل کسری است؛ به این ترتیب که ابتدا با گسسته‌سازی مشتقات مکانی موجود در معادله، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و دستگاه حاصل با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل کسری حل می‌شود. روش تفاضلات متناهی، روشی شناخته شده و پرستفاده برای تقریب مشتقات مراتب مختلف می‌باشد. همچنین روش تبدیل دیفرانسیل، که اساس آن، محاسبه ضرایب بسط تیلور جواب مسئله بدون استفاده از مشتقات مراتب مختلف تابع است، برای اولین بار توسط ژو<sup>۳۷</sup> در سال ۱۹۸۶ برای حل معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه معرفی شد. پس از آن برای حل مسائل مقدار مرزی، معادلات انتگرال، حسابان تغییرات و کنترل بهینه مورد استفاده قرار گرفت. به ویژه این روش در دهه‌های اخیر برای تحلیل بسیاری از پدیده‌های فیزیکی که رفتار

تصادفی و کسری دارند، به‌کار رفته است [۳۰]. همچنین روش تبدیل دیفرانسیل کسری برای حل معادلات دیفرانسیل کسری توسعه داده شده است [۳۱].

ادامه‌ی مقاله به شکل زیر تنظیم شده است. در بخش ۲، مفاهیم فازی و در بخش ۳، تعاریف و قضایای مورد استفاده در روش تبدیل دیفرانسیل کسری ارائه می‌شود. در بخش ۴، روش ترکیبی موردنظر معرفی و براساس آن فرآیند حل معادله کلین - گوردن فازی کسری زمانی طراحی می‌شود. در بخش ۵، همگرایی روش پیشنهادی بررسی می‌شود. همچنین در بخش ۶، نتایج عددی حاصل از حل معادله کلین - گوردن فازی کسری با روش ترکیبی در قالب جداول و نمودارها ارائه می‌شود. در نهایت در بخش ۷، به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

## ۲. تعاریف و مفاهیم مجموعه‌های فازی

تعریف ۱.۰۲ [۱۵] اگر  $X$  مجموعه مرجع با اعضای  $x$  در نظر گرفته شود، مجموعه‌ی فازی  $A$  در  $X$  توسط زوج مرتب‌هایی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}, \mu_A(x): \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

$\mu_A(x)$  تابع عضویت یا درجه عضویت مجموعه‌ی فازی  $A$  نامیده می‌شود که میزان تعلق به این مجموعه

<sup>37</sup> Zhou

<sup>34</sup> Alshammari

<sup>35</sup> Nikam

<sup>36</sup> Laplace-Adomian

را نشان می‌دهد. در صورتی که برد این تابع، مجموعه‌ی  $\{0, 1\}$  باشد، همان مجموعه معمولی نتیجه می‌شود.  
 شرایط زیر صدق کنند:

(۱)  $\underline{a}(r)$  تابع کراندار، نانزولی، در بازه  $(0, 1)$  از

چپ پیوسته و در  $x = 0$  از راست پیوسته می‌باشد.

(۲)  $\bar{a}(r)$  تابع کراندار، ناصعودی، در بازه  $(0, 1)$

از چپ پیوسته و در  $x = 0$  از راست پیوسته می‌باشد.

(۳) به‌ازای هر  $0 \leq r \leq 1$ ،  $\underline{a}(r) \leq \bar{a}(r)$

تعریف ۴.۲. [۱۵] عملگرهای جبری جمع، تفاضل و

ضرب اسکالر، برای اعداد فازی دلخواه  $\tilde{A}[r] =$

$\tilde{B}[r] = [\underline{b}(r), \bar{b}(r)]$  و  $[\underline{a}(r), \bar{a}(r)]$  و

اسکالر دلخواه  $c$  به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

جمع:

$$(\tilde{A} + \tilde{B}) = [\underline{a}(r) + \underline{b}(r), \bar{a}(r) + \bar{b}(r)].$$

تفاضل:

$$(\tilde{A} - \tilde{B}) = [\underline{a}(r) - \underline{b}(r), \bar{a}(r) - \bar{b}(r)].$$

ضرب اسکالر:

$$c\tilde{A}[r] = \begin{cases} [c\underline{a}(r), c\bar{a}(r)], & c \geq 0, \\ [c\bar{a}(r), c\underline{a}(r)], & c < 0. \end{cases}$$

تعریف ۵.۲. [۱۵] برای دو عدد فازی دلخواه

$$\tilde{A}[r] = [\bar{a}(r), \underline{a}(r)]$$

تعریف ۲.۲. [۱۵] فضای اعداد فازی فرض کنید

$$E = \{\tilde{A} | \tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]\}$$

مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فازی  $X$  باشد که در خواص زیر صدق کند:

(۱) به‌ازای هر  $\tilde{A}, \tilde{B} \in E$  نرمال باشد، یعنی

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \exists \tilde{A}(x_0) = 1,$$

(۲) به‌ازای هر  $\tilde{A}, \tilde{B} \in E$  یک مجموعه فازی

محدب باشد یعنی به‌ازای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  و هر

$$\lambda \in [0, 1]$$

$$\tilde{A}(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

$$\geq \min\{\tilde{A}(x), \tilde{A}(y)\},$$

(۳)  $\tilde{A}$  نیمه‌پیوسته بالایی باشد یعنی برای هر

$$\tilde{A}(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \tilde{A}(x), x_0 \in \mathbb{R}$$

(۴) مجموعه  $\overline{\{x \in \mathbb{R} : \tilde{A}(x) > 0\}}$  فشرده

باشد.

آنگاه  $E$ ، فضای اعداد فازی و هر  $\tilde{A} \in E$  عدد

فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲. [۱۵] [عدد فازی] یک عدد فازی دلخواه

$\tilde{A}[r]$  به وسیله یک زوج مرتب از توابع

$$\begin{aligned} & \left[ {}^c D_x^\beta \tilde{v}(x) \right]^r \\ & = \left[ {}^c D_x^\beta \bar{v}(x; r), {}^c D_x^\beta \underline{v}(x; r) \right], \end{aligned}$$

که در آن

$${}^c D_x^\beta \underline{v}(x; r) = \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_{x_0}^x (x-\tau)^{m-\beta-1} \underline{v}^{(m)}(\tau; r) d\tau \right]_{x=x_0},$$

$$m-1 < \beta < m \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} & {}^c D_x^\beta \bar{v}(x; r) \\ & = \left[ \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_{x_0}^x (x-\tau)^{m-\beta-1} \bar{v}^{(m)}(\tau; r) d\tau \right]_{x=x_0}, \end{aligned}$$

$$m-1 < \beta < m \in \mathbb{N}.$$

### ۳. تبدیل دیفرانسیل کسری

در این بخش، مفهوم تبدیل دیفرانسیل کسری تعریف و قضایای مربوط به آن ارائه می‌شود.

**تعریف ۱.۳.** [۳۱] تبدیل دیفرانسیل کسری مرتبه  $k$ -ام تابع  $u(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} & U^\alpha(k) \\ & = \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} [({}^c D_t^\alpha)^k u(t)]_{t=t_0}, \end{aligned}$$

$$\tilde{B}[r] = [\bar{b}(r), \underline{b}(r)]$$

$$\underline{a}(r) = \bar{a}(r) = \bar{b}(r) \text{ و فقط اگر } \tilde{A} = \tilde{B} \text{ و } \underline{b}(r)$$

تعریف ۶.۲. [۱۵] مشتق کسری کاپوتوی تابع پیوسته  $v(x)$  از مرتبه  $\beta$ ، که  $x > 0$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^c D_x^\beta v(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^x (x-\tau)^{m-\beta-1} v^{(m)}(\tau) d\tau, & m-1 < \beta < m \in \mathbb{N}, \\ \frac{d^m}{dx^m} v(x), & \beta = m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

تعریف ۷.۲. [۱۵] فرض کنید

$$\tilde{v} \in C((0, a), E) \cap L^1(0, 1)$$

مقدار باشد و برای هر  $r \in [0, 1]$

$$[\tilde{v}(x)]^r = [\underline{v}(x; r), \bar{v}(x; r)]$$

برای  $x \in (0, a)$  و  $1 < \beta < 2$ .

(۱) اگر  $\tilde{v}$ ، (۱) - کاپوتو مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$\underline{v}(x; r) \text{ و } \bar{v}(x; r) \text{ کاپوتو مشتق پذیرند و}$$

$$\begin{aligned} & \left[ {}^c D_x^\beta \tilde{v}(x) \right]^r \\ & = \left[ {}^c D_x^\beta \underline{v}(x; r), {}^c D_x^\beta \bar{v}(x; r) \right], \end{aligned}$$

(۲) اگر  $\tilde{v}$ ، (۲) - کاپوتو مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$\underline{v}(x; r) \text{ و } \bar{v}(x; r) \text{ کاپوتو مشتق پذیرند و}$$



$$U^\alpha(k) = \delta(k - m) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

قضیه ۳.۳. [۳۱] اگر  $u(t) = {}^c D_t^\beta v(t)$  و

$$m - 1 < \beta \leq m, \text{ آنگاه تبدیل ديفرانسيل (۱.۳)}$$

به صورت زیر می باشد:

$$U^\alpha(k) = \frac{\Gamma(k\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} V^\alpha\left(k + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

۴. حل معادله کلین - گوردن فازی کسری با

استفاده از روش پیشنهادی

در این بخش، به تشریح روش پیشنهادی که مبتنی بر روش تفاضلات متناهی و روش تبدیل ديفرانسيل کسری است، پرداخته می شود، به طوری که ابتدا با استفاده از تکنیک نیمه گسسته سازی، معادله اصلی به یک دستگاه معادلات ديفرانسيل معمولی تبدیل و برای حل دستگاه حاصل از روش تبدیل ديفرانسيل کسری استفاده می شود. به این ترتیب، جواب معادله در هر زمان دلخواه به صورت یک سری ارائه می شود.

طبق قواعدی که در حساب اعداد فازی بیان شد و با فرض اینکه تابع  $\tilde{v}$ ، (۱) - کاپوتو مشتق پذیر باشد، معادله (۱.۱) را می توان به دو شاخه ی پایینی و بالایی تبدیل کرد. برای توضیح روش، بدون کم شدن از کلیت فرض می شود، ضرایب موجود در معادله همگی مثبت باشند.

$$0 < \alpha \leq 1, ({}^c D_t^\alpha)^k = \underbrace{{}^c D_t^\alpha \dots {}^c D_t^\alpha}_{k\text{-مرتبه}}, \quad (۱.۳)$$

به طوری که  ${}^c D_t^\alpha$ ، مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  می باشد. همچنین معکوس تبدیل ديفرانسيل  $U^\alpha(k)$  به شکل زیر تعریف می شود:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U^\alpha(k) (t - t_0)^{k\alpha}.$$

بنابراین  $n$  - امین تقریب تابع  $u(t)$  را می توان به شکل زیر نوشت:

$$u^n(t) = \sum_{k=0}^n U^\alpha(k) (t - t_0)^{k\alpha}.$$

قضیه ۲.۳. [۳۱] فرض کنید  $U^\alpha(k)$ ،  $V^\alpha(k)$  و  $W^\alpha(k)$  به ترتیب، تبدیلات ديفرانسيل کسری توابع  $u(t)$ ،  $v(t)$  و  $w(t)$  باشند،

- اگر  $u(t) = v(t) \pm w(t)$  آنگاه  $U^\alpha(k) = V^\alpha(k) \pm W^\alpha(k)$
- اگر  $u(t) = v(t) w(t)$  آنگاه

$$U^\alpha(k) = \sum_{s=0}^k V^\alpha(k-s) W^\alpha(s).$$

- اگر  $u(t) = \lambda v(t)$  و  $\lambda \in \mathbb{R}$  آنگاه  $U^\alpha(k) = \lambda V^\alpha(k)$
- اگر  $u(t) = (t - t_0)^{m\alpha}$  آنگاه

اکنون روش موردنظر برای تقریب جواب شاخه‌ی پایینی معادله کلین - گوردن کسری زمانی (۱.۴) تشریح می‌شود. همان‌طور که گفته شد متغیر  $t$  پیوسته نگه داشته و متغیر  $x$  به شکل گسسته تبدیل می‌شود. به این منظور بازه  $[0, L]$  به  $N$  قسمت افراز می‌شود و نقاط متساوی‌فاصله  $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N$  با فاصله  $h = \frac{L}{N}$  تولید می‌شوند. با به‌کار بردن فرمول تفاضلات متناهی مرکزی برای تقریب مشتقات مرتبه اول و دوم مکانی، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} v(x_i, t; r) \\ &= \frac{v(x_{i+1}, t; r) - v(x_{i-1}, t; r)}{2h} \\ & - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(\eta, t; r), \quad 0 < \eta < L. \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x_i, t; r) \\ &= \frac{v(x_{i-1}, t; r) - 2v(x_i, t; r) + v(x_{i+1}, t; r))}{h^2} \\ & - \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(\xi, t; r), \quad 0 < \xi < L. \quad (4.4) \end{aligned}$$

با فرض  $v(x_i, t; r) = \underline{v}_i(t; r)$  و صرف‌نظر کردن از خطای برشی  $O(h^2)$  و جایگذاری تقریب‌های حاصل در معادله (۱.۴)، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر به‌دست می‌آید که در آن  $\underline{u}_i(t; r)$  تقریبی از  $\underline{v}_i(t; r)$  در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} & {}^c D_t^\beta \underline{v}(x, t; r) + a \frac{\partial^\gamma \underline{v}(x, t; r)}{\partial x^\gamma} \\ & + b \left( \frac{\partial \underline{v}(x, t; r)}{\partial x} \right)^\gamma + c \underline{v}^\gamma(x, t; r) \\ & + d \underline{v}(x, t; r) \\ & = \tilde{k}(r) h(x, t), \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$1 < \beta \leq 2, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T,$$

$$\underline{v}(x, 0; r) = \underline{k}(r) f_1(x),$$

$$\underline{v}_t(x, 0; r) = \underline{k}(r) f_2(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$\underline{v}(0, t; r) = \underline{k}(r) g_1(t),$$

$$\underline{v}(L, t; r) = \underline{k}(r) g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$\begin{aligned} & {}^c D_t^\beta \bar{v}(x, t; r) + a \frac{\partial^\gamma \bar{v}(x, t; r)}{\partial x^\gamma} \\ & + b \left( \frac{\partial \bar{v}(x, t; r)}{\partial x} \right)^\gamma + c \bar{v}^\gamma(x, t; r) \\ & + d \bar{v}(x, t; r) \\ & = \bar{v}(r) h(x, t). \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$1 < \beta \leq 2, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T,$$

$$\bar{v}(x, 0; r) = \bar{k}(r) f_1(x),$$

$$\bar{v}_t(x, 0; r) = \bar{k}(r) f_2(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$\bar{v}(0, t; r) = \bar{k}(r) g_1(t),$$

$$\bar{v}(L, t; r) = \bar{k}(r) g_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

$$\frac{b}{\Upsilon h^\Upsilon} \sum_{l=\cdot}^k \left( \underline{U}_{i+1}^\alpha(k-l) - \underline{U}_{i-1}^\alpha(k-l) \right) \left( \underline{U}_{i+1}^\alpha(l) - \underline{U}_{i-1}^\alpha(l) \right) + d\underline{U}_i^\alpha(k)$$

$$+ c \sum_{s=\cdot}^k \underline{U}_i^\alpha(k-s) \underline{U}_i^\alpha(s) = \underline{k}(r) \underline{H}_i^\alpha(k),$$

$$\underline{U}_i^\alpha(\cdot) = \underline{k}(r) f_\Upsilon(x_i), \underline{U}_i^\alpha\left(\frac{\cdot}{\alpha}\right) = \underline{k}(r) f_\Upsilon(x_i),$$

$$\underline{U}_i^\alpha(k) = \underline{k}(r) G_\Upsilon^\alpha(k), \underline{U}_N^\alpha(k) = \underline{k}(r) G_\Upsilon^\alpha(k),$$

رابطه (۶.۴) بازنویسی و نتیجه می شود:

$$\underline{U}_i^\alpha\left(k + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+\beta+1)} \quad (۷.۴)$$

$$\left[ -\frac{a}{h^\Upsilon} \left( \underline{U}_{i-1}^\alpha(k) - \Upsilon \underline{U}_i^\alpha(k) + \underline{U}_{i+1}^\alpha(k) \right) - \frac{b}{\Upsilon h^\Upsilon} \sum_{l=\cdot}^k \left( \underline{U}_{i+1}^\alpha(kl) \underline{U}_{i-1}^\alpha(k-l) \right) - c \sum_{s=\cdot}^k \underline{U}_i^\alpha(k-s) \underline{U}_i^\alpha(s) - d\underline{U}_i^\alpha(k) + \underline{k}(r) \underline{H}_i^\alpha(k) \right],$$

$$\underline{U}_i^\alpha(\cdot) = \underline{k}(r) f_\Upsilon(ih), \underline{U}_i^\alpha\left(\frac{\cdot}{\alpha}\right) = \underline{k}(r) f_\Upsilon(ih), \quad (۸.۴)$$

$${}^c D_t^\beta \underline{u}_i(t; r) + \frac{a}{h^\Upsilon} \quad (۵.۴)$$

$$\left( \underline{u}_{i-1}(t; r) - \Upsilon \underline{u}_i(t; r) + \underline{u}_{i+1}(t; r) \right)$$

$$+ \frac{b}{\Upsilon h^\Upsilon} \left( \underline{u}_{i+1}(t; r) - \underline{u}_{i-1}(t; r) \right)^\Upsilon + c \underline{u}_i^\Upsilon(t; r)$$

$$+ d \underline{u}_i(t; r) = \underline{k}(r) h_i(t), \quad \forall i \leq N-1,$$

$$\underline{u}_i(\cdot; r) = \underline{k}(r) f_\Upsilon(x_i), \frac{d \underline{u}_i(t; r)}{dt} = \underline{k}(r) f_\Upsilon(x_i),$$

$$\underline{u}_i(t; r) = \underline{k}(r) g_\Upsilon(t), \underline{u}_N(t; r) = \underline{k}(r) g_\Upsilon(t), \quad t \geq \cdot$$

حال عملگر تبدیل دیفرانسیل کسری از مرتبه  $\alpha$  را بر هر یک از معادلات دستگاه (۵.۴) اعمال می کنیم. همچنین فرض می کنیم  $\underline{U}_i^\alpha(k)$ ، تبدیل دیفرانسیل مرتبه  $k$  از تابع  $\underline{u}_i(t; r)$  باشد و  $G_\Upsilon^\alpha(k)$ ،  $G_\Upsilon^\alpha(k)$  و  $H^\alpha(k)$  به ترتیب، تبدیلات دیفرانسیل توابع  $g_\Upsilon(t)$ ،  $g_\Upsilon(t)$  و  $h(t)$  باشند، بنابراین با استفاده از قضایای ۲.۳ و ۳.۳ داریم:

$$\frac{\Gamma(k\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} \underline{U}_i^\alpha\left(k + \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (۶.۴)$$

$$+ \frac{a}{h^\Upsilon} \left( \underline{U}_{i-1}^\alpha(k) - \Upsilon \underline{U}_i^\alpha(k) + \underline{U}_{i+1}^\alpha(k) \right) +$$

$\beta$ ، بزرگترین مرتبه مشتق کسری نسبت به متغیر  $t$  موجود در معادله (۱.۴) می‌باشد. با انجام مراحل فوق، تمام ضرایب مجهول  $U_i^\alpha(k)$ ،  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  در بسط سری (۱۱.۴)، به دست می‌آیند؛ که همان جواب تقریبی برای شاخه پایینی معادله کلین - گوردن فازی کسری زمانی می‌باشد.

روند الگوریتم محاسبه جواب شاخه پایینی در شبه کد ۱ قابل مشاهده است. با به کارگیری روندی مشابه، تقریبی از جواب شاخه بالایی معادله کلین - گوردن کسری زمانی فازی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{v}_i(t; r) \simeq \bar{u}_i^n(t; r) = \bar{k}(r) \sum_{k=0}^n \bar{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (13.4)$$

که در آن ضرایب مجهول  $\bar{U}_i^\alpha(k)$ ، به ازای

$i = 0, 1, 2, \dots, N$ ، مشابه روندی که برای شاخه پایینی صورت گرفت، محاسبه می‌شوند. شبه کد الگوریتم محاسبه جواب بالایی، مشابه شبه کد جواب شاخه پایینی قابل نگارش است.

بنابراین جواب تقریبی معادله کلین - گوردن فازی کسری زمانی (۱.۱)، که با ترکیب دو روش تبدیل دیفرانسیل کسری و تفاضلات متناهی حاصل شد، به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\underline{U}^\alpha(k) = \underline{k}(r) G_\gamma^\alpha(k), \quad \underline{U}_N^\alpha(k) = \underline{k}(r) G_\gamma^\alpha(k), \quad (9.4)$$

اکنون طبق تعریف معکوس تبدیل دیفرانسیل، می‌توان جواب معادله (۱.۴) را به شکل سری توانی زیر نوشت:

$$\underline{u}_i(t; r) = \underline{k}(r) \sum_{k=0}^{\infty} \underline{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (10.4)$$

همچنین با قطع کردن سری، می‌توان جواب تقریبی معادله (۱.۴) را به صورت زیر نمایش داد:

$$\underline{v}_i(t; r) \simeq \underline{u}_i^n(t; r) = \underline{k}(r) \sum_{k=0}^n \underline{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (11.4)$$

که  $\underline{U}_i^\alpha(k)$  ها، ضرایب مجهولی هستند که باید محاسبه شوند. برخی ضرایب مجهول از رابطه بازگشتی (۷.۴)، و برخی دیگر، از شرایط اولیه (۸.۴) و شرایط مرزی (۹.۴) به دست می‌آیند.

همچنین ضرایب مجهول  $\underline{U}_i^\alpha(1)$ ،  $\underline{U}_i^\alpha(2)$ ، ...  $\underline{U}_i^\alpha\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)$  از شرایط اولیه معادله (۱.۴)، که مشتق در آن از مرتبه صحیح است، از طریق رابطه زیر به دست می‌آیند [۳۱]:

$$\underline{U}_i^\alpha(k) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{d^{k\alpha}}{dt^{k\alpha}} \underline{u}_i(t; r) \right]_{t=0}, & k\alpha \in \mathbb{Z}^+, \\ \cdot, & \forall k = 0, 1, \dots, \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right). \\ \cdot, & k\alpha \notin \mathbb{Z}^+, \end{cases} \quad (12.4)$$

$$l])(U[i + 1, l] - U[i - 1, l]) - \\ c \sum_{s=0}^k U[i, k - s]U[i, s] - dU[i, k] + \\ (r - 1) * H[i, k]$$

15:  $U [i, k + \frac{\beta}{\alpha}] \leftarrow intermediate1 * \\ intermediate2$

16: **end for**

17: **end for**

18: **Initialize** *uapproximate* as an empty list

19: **for**  $i = 1$  to  $n - 1$  **do**

20:  $S - Result \leftarrow 0$

21: **for**  $k = 0$  to  $m$  **do**

22:  $S - Result \leftarrow S - Result + \\ U[i, k] * t^{(\alpha * k)}$

23: **end for**

24: **Append**  $S - Result$  to *uapproximate*

25: **end for**

26: **Return** *uapproximate*

۵. همگرایی

در این بخش همگرایی روش معرفی شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین کران بالایی برای خطای مطلق جواب تقریبی شاخه پایینی به دست می‌آید. با روندی مشابه می‌توان کران بالایی برای خطای مطلق شاخه

$$[\tilde{v}(x_i, t)]^r \\ \approx \left[ \underline{k}(r) \sum_{k=0}^n \underline{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha}, \bar{k}(r) \sum_{k=0}^n \bar{U}_i^\alpha(k) t^{k\alpha} \right],$$

$$0 \leq i \leq N, t > 0, r \in [0, 1].$$

شبه‌کد ۱: محاسبه جواب تقریبی شاخه پایینی معادله کلین - گوردن فازی کسری زمانی

1: **Define**  $n, h, m, x, t, \alpha, \beta, r, L, a, b, c, d, f_1(x), f_2(x), G_1(k), G_2(k)$

2: **Initialize**  $U$

3: **for**  $i = 0$  to  $n$  **do**

4:  $U [i, 0] \leftarrow (r - 1) * f_1 (x[i])$

5:  $U [i, \frac{1}{\alpha}] \leftarrow (r - 1) * f_2 (x[i])$

6: **end for**

7: **for**  $k = 0$  to  $m$  **do**

8:  $U [0, k] \leftarrow (r - 1) * G_1 (k)$

9:  $U [n, k] \leftarrow (r - 1) * G_2 (k)$

10: **end for**

11: **for**  $i = 1$  to  $n - 1$  **do**

12: **for**  $k = 0$  to  $m$  **do**

13:  $intermediate1 \leftarrow \frac{\Gamma(\alpha * k + 1)}{\Gamma(\alpha * k + \beta + 1)}$

14:  $intermediate2 \leftarrow \left[ -\frac{a}{h^2} (U[i - 1, k] - 2U[i, k] + U[i + 1, k]) - \frac{b}{4h^2} \sum_{l=0}^k (U[i + 1, k - l] - U[i - 1, k -$

بالایی نیز به دست آورد. لازم به ذکر است نرم مورد استفاده در ادامه، نرم ماکسیمم می باشد؛ یعنی

$$\|\varphi_k\| = \max_t |\varphi_k(t)|.$$

لم ۱.۵. [۳۲]: فرض کنید  $\varphi_k(t) = U_i^\alpha(k)t^{k\alpha}$

همچنین فرض کنید  $k \in \mathbb{N}$  و برای  $j \geq k$ ,

$0 < \delta < 1$  موجود باشد به طوری که  $\|\varphi_{j+1}\| \leq \delta \|\varphi_j\|$

است و به ازای  $n = \sum_{k=1}^n \varphi_k$  سری  $s_n = \sum_{k=1}^n \varphi_k$  کوشی

است و به ازای  $n \geq m \geq k$

$$\delta = \max \left\{ \delta_k, \delta_{k+1}, \dots, \delta_n \right\}$$

صدق می کند:

$$\|s_n - s_m\| \leq \frac{1 - \delta^{n-m}}{1 - \delta} \delta^{m-k+\tau} \|\varphi_k\|. \quad (۱.۵)$$

همچنین سری  $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)$  به  $\underline{v}_i(t; r)$

همگراست.

قضیه ۲.۵. [۳۳]: فرض کنید  $\underline{v}_i(t; r)$  در نقطه

$(x_i, t)$ ، جواب دقیق معادله (۱.۴) و

$\underline{u}_i(t; r) = \underline{k}(r) \sum_{k=1}^{\infty} U_i^\alpha t^{k\alpha}$  تقریب نهایی

از جواب معادله (۵.۴) باشد. همچنین فرض کنید

$\underline{u}_i^n(t; r) = \underline{k}(r) \sum_{k=1}^n U_i^\alpha t^{k\alpha}$  تقریب نهایی

از جواب معادله (۱.۴) باشد. به علاوه فرض کنید  $k \in \mathbb{N}$

ای موجود باشد به طوری که به ازای هر

$0 < \delta_j < 1$ ،  $n \geq m \geq k$ ،

که  $\|\varphi_{j+1}\| \leq \delta_{j+1} \|\varphi_j\|$  آنگاه مادامی که  $n$

$\rightarrow \infty$ ، جواب  $\underline{u}_i^n(t; r)$  به جواب دقیق  $\underline{v}_i(t; r)$

همگراست و با فرض پیوستگی  $\frac{\partial^\tau \underline{v}}{\partial x^\tau}$  بر بازه  $[0, L]$ ،

$\xi \in (0, L)$  ای وجود دارند

به طوری که

$$\begin{aligned} & \|\underline{v}_i^n(t; r) - \underline{u}_i^n(t; r)\| \\ & \leq a \frac{h^\tau}{12} \frac{\partial^\tau \underline{v}(\xi, t; r)}{\partial x^\tau} + b \frac{h^\tau}{36} \left( \frac{\partial^\tau \underline{v}(\eta, t; r)}{\partial x^\tau} \right)^2 \\ & \quad + \frac{1}{1 - \delta} \delta^{m-k+\tau} \|\varphi_k\|. \end{aligned}$$

برهان. با توجه به فرآیند حل معادله (۱.۴) می توان

نوشت:

$$\begin{aligned} & \|\underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t; r)\| \\ & = \|\underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i(t; r) + \underline{u}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t; r)\| \\ & \leq \|\underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i(t; r)\| \\ & \quad + \|\underline{u}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t; r)\|, \quad (۲.۵) \end{aligned}$$

که  $\underline{u}_i(t; r)$  تقریبی از جواب  $\underline{v}_i(t; r)$  است که از

تقریب مشتقات مرتبه اول و دوم  $\underline{v}(x, t; r)$  توسط

فرمول تفاضلات متناهی مرکزی به دست می آید. لذا

می توان گفت  $\xi \in (0, L)$  ای وجود دارند

به طوری که

در این بخش برای نشان دادن دقت و کارایی روش معرفی شده، برخی مثال‌های عددی مورد بحث قرار می‌گیرند. خطای مطلق جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی در نقطه گره دلخواه  $x_i$  و زمان دلخواه  $t$ ، به‌ازای تعداد تقسیمات  $N$ ، از فرمول زیر محاسبه می‌شوند:

$$E_{lower}^{N,n} = |\underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t)|,$$

$$E_{upper}^{N,n} = |\bar{v}_i(t; r) - \bar{u}_i^n(t)|,$$

که در آن  $\underline{v}_i(t; r)$  و  $\bar{v}_i(t; r)$  به ترتیب جواب دقیق شاخه پایینی و بالایی معادله (۱.۱)، همچنین  $\underline{u}_i^n(t)$  و  $\bar{u}_i^n(t)$  به ترتیب جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی معادله (۱.۱)، به‌دست آمده از فرمول‌های (۱۱.۴) و (۱۳.۴) می‌باشند.

همچنین ماکسیمم خطای مطلق جواب از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{lower}^n = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i^n(t)|,$$

$$E_{upper}^n = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\bar{v}_i(t; r) - \bar{u}_i^n(t)|.$$

مثال ۱.۶. معادله کلین - گوردن فازی کسری زمانی با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید [۲۹، ۴]:

$${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r) - \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x^2} + \tilde{v}(x, t; r) = \gamma \sin(x),$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < 1 \quad (1.6)$$

$$\tilde{v}(x, 0; r) = \tilde{k}(r) \sin(x),$$

$$\| \underline{v}_i(t; r) - \underline{u}_i(t; r) \| \quad (3.5)$$

$$\leq a \frac{h^\gamma}{\gamma^2} \frac{\partial^\gamma \underline{v}(\xi, t; r)}{\partial x^\gamma} + b \frac{h^\gamma}{\gamma^6} \left( \frac{\partial^\gamma \underline{v}(\eta, t; r)}{\partial x^\gamma} \right)^\gamma,$$

از طرفی بنا به رابطه (۱.۵)، برای  $n \geq m \geq k$  می‌توان نوشت:

$$\| s_n - s_m \| \leq \frac{1 - \delta^{n-m}}{1 - \delta} \delta^{m-k+\gamma} \| \varphi_k \|,$$

چون  $0 < \delta < 1$ ، بنابراین  $1 - \delta^{n-m} < 1$  و

$$\| s_n - s_m \| \leq \frac{1}{1 - \delta} \delta^{m-k+\gamma} \| \varphi_k \|,$$

اگر  $n \rightarrow \infty$  آنگاه  $s_n \rightarrow \underline{u}_i(t; r)$  و داریم

$$\| \underline{u}_i(t; r) - s_m \| \leq \frac{1}{1 - \delta} \delta^{m-k+\gamma} \| \varphi_k \|,$$

به عبارت دیگر

$$\| \underline{u}_i(t; r) - \underline{u}_i^m(t; r) \| \leq \frac{1}{1 - \delta} \delta^{m-k+\gamma} \| \varphi_k \|, \quad (4.5)$$

با جایگذاری (۴.۵) و (۳.۵) در رابطه (۲.۵)، اثبات کامل می‌شود.

۶. نتایج عددی

خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی هر دو شاخه‌ی بالایی و پایینی معادله (۱.۶)، به‌ازای  $\beta = 2$ ،  $r = 0.8$ ،  $\alpha = 1$  و مقادیر متفاوت  $N = 4, 8, 10, 16, 18$  در زمان  $t = 1$  نمایش داده شده است. در جدول ۴، ماکسیمم خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی هر دو شاخه‌ی بالایی و پایینی معادله (۱.۶)، به‌ازای  $\beta = 2$ ،  $r = 0.8$  و مقادیر متفاوت

$N = 4, 8, 10, 16, 18$  در زمان  $t = 0.1$  قابل مشاهده است. جدول ۵، شامل ماکسیمم خطای مطلق و زمان انجام محاسبات ( $^{38} CPUtime$ ) برحسب ثانیه، مربوط به جواب تقریبی هر دو شاخه پایینی و بالایی معادله (۱.۶) به‌ازای  $\beta = 2$ ،  $\alpha = 1$ ،  $N = 18$  و  $L = \pi$  در زمان‌های  $t = 0.001 (s)$  و  $t = 1 (s)$  می‌باشد. با توجه به شرایط اولیه و مرزی معادله (۱.۶) به‌ازای  $\beta = 2$ ،  $\alpha = 0.5$  و  $a = b = c = d = 1$  شبه‌کد الگوریتم محاسبه جواب شاخه پایینی معادله (۱.۶) و خطای حاصل از این تقریب در شبه‌کد ۲ نمایش داده شده است.

$$\tilde{v}_t(x, 0; r) = \tilde{k}(r), 0 \leq x \leq L$$

$$\tilde{v}(0, t; r) = \tilde{k}(r) \sin(t),$$

$$\tilde{v}(L, t; r) = \tilde{k}(r)(\sin(L) + \sin(t)),$$

که

$$\tilde{k}(r) = [\underline{k}(r), \bar{k}(r)] = [r - 1, 1 - r].$$

جواب دقیق این معادله برای  $\beta = 2$  عبارتست از:  

$$\tilde{v}(x, t; r) = \tilde{k}(r)(\sin(x) + \sin(t))$$
 [۲۹، ۴].

این مثال با روش شرح داده شده، حل و نتایج حاصل از جداول ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ و شکل ۱ ارائه می‌شود. جدول ۱، شامل جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق روش پیشنهادی و روش ارائه شده در [۲۹]، مربوط به شاخه پایینی معادله (۱.۶) در نقطه  $(x, t) = (1, 1/36)$  به‌ازای مقادیر  $\beta = 2$ ،  $\alpha = 1$ ،  $N = 22$  و  $L = \frac{\pi}{4}$  می‌باشد. جدول ۲، شامل جواب تقریبی، دقیق و خطای مطلق روش پیشنهادی و روش ارائه شده در [۲۹]، مربوط به شاخه‌ی بالایی معادله (۱.۶) در نقطه  $(x, t) = (1, 1/36)$  به‌ازای مقادیر  $\beta = 2$ ،  $\alpha = 1$ ،  $N = 22$  و  $L = \frac{\pi}{4}$  می‌باشد. همچنین نمودار جواب دقیق معادله (۱.۶) به‌ازای  $\beta = 2$  و جواب تقریبی شاخه‌ی بالایی و پایینی در نقطه  $(1, 1/88)$ ، به‌ازای مقادیر مختلف

$$N = 10 \text{ و } r \in [0.1], L = \pi, \beta = 1/5, 1/8, 2$$

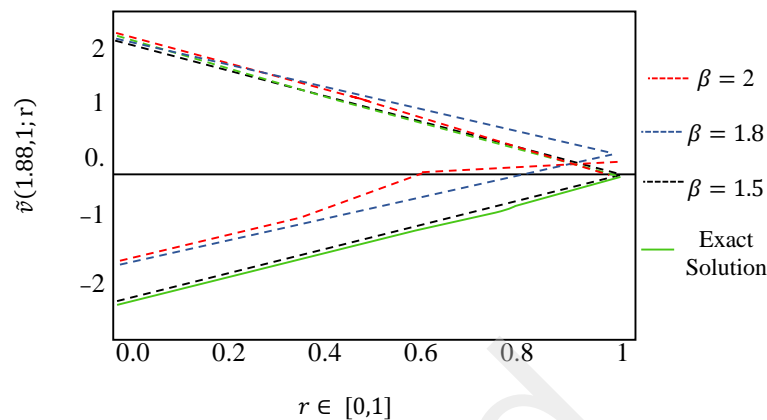
در شکل ۱ رسم شده است. در جدول ۳، ماکسیمم



جدول ۲. مقایسه خطای مطلق روش پیشنهادی و روش ارائه شده در [۲۹] مربوط به شاخه‌ی بالایی معادله (۱.۶)، در نقطه  $(x, t) = (1/36, 1)$  و به ازای  $L = \frac{\pi}{4}$ ,  $N = 22$

$$n = 70, \beta = 2, \alpha = 1$$

	روش پیشنهادی	روش [۲۹]
$r$	$E_{upper}^{22,70}$	خطای روش [۲۹]
۰	$3 \times 10^{-5}$	$1/36758$
۰/۲	$2/11 \times 10^{-3}$	$1/01427$
۰/۴	$4/17 \times 10^{-3}$	$6/60951 \times 10^{-1}$
۰/۶	$6/25 \times 10^{-3}$	$3/07634 \times 10^{-1}$
۰/۸	$8/324 \times 10^{-3}$	$4/56834 \times 10^{-2}$
۱	$1/039 \times 10^{-2}$	$3/99 \times 10^{-1}$



شکل ۱. نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی معادله (۱.۶) در  $t = 1$  به ازای مقادیر مختلف  $\beta = 1/5, 1/8, 2$ ،  $N = 10$  و  $L = \pi$

جدول ۱. مقایسه خطای مطلق روش پیشنهادی و روش ارائه شده در [۲۹] مربوط به شاخه‌ی پایینی معادله (۱.۶)، در نقطه  $(x, t) = (1/36, 1)$  و به ازای  $L = \frac{\pi}{4}$ ,  $N = 22$

$$n = 70, \beta = 2, \alpha = 1$$

	روش پیشنهادی	روش [۲۹]
$r$	$E_{lower}^{22,70}$	خطای روش [۲۹]
۰	$2/076 \times 10^{-2}$	$2/16599$
۰/۲	$1/869 \times 10^{-2}$	$1/81227$
۰/۴	$1/662 \times 10^{-2}$	$1/45895$
۰/۶	$1/4538 \times 10^{-2}$	$1/0563$
۰/۸	$1/2471 \times 10^{-2}$	$7/52317 \times 10^{-1}$
۱	$1/039 \times 10^{-2}$	$3/99 \times 10^{-1}$

جدول ۳. ماکسیمم خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی معادله (۱.۶) در لحظه  $t = 1$  به ازای  $\beta = 2$ ,  $r = 0.8$ ,  $\alpha = 1$  و مقادیر متفاوت  $N = 4, 8, 10, 16, 18$ .

$N$	۴	۸	۱۰	۱۶	۱۸
$E_{lower}^{20}$	۰/۹۱۳۲	۰/۵۸۳۰	۰/۴۱۰۴	۰/۰۵۱۳	۰/۰۱۲۲
$E_{upper}^{20}$	۰/۶۱۵۲	۰/۳۸۹۷	۰/۲۷۴۰	۰/۰۳۴۲	۰/۰۰۸۱

جدول ۴. ماکسیمم خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی معادله (۱.۶) در لحظه  $t = 0.1$  به ازای  $\beta = 2$ ,  $r = 0.8$ ,  $\alpha = 1$  و مقادیر متفاوت  $N = 4, 8, 10, 16, 18$ .

$N$	۴	۸	۱۰	۱۶	۱۸
$E_{lower}^{20}$	۰/۰۱۱۹۱۸۸	۰/۰۱۱۹۰۷۷	۰/۰۱۱۸۷۶	۰/۰۱۱۷۲۴۹	۰/۰۱۱۶۵۸۱
$E_{upper}^{20}$	$8/29 \times 10^{-3}$	$7/9596 \times 10^{-3}$	$7/9308 \times 10^{-3}$	$7/8218 \times 10^{-3}$	$7/7761 \times 10^{-3}$

جدول ۵. زمان انجام محاسبات و ماکسیمم خطای مطلق معادله (۱.۶) در زمان‌های  $t = 1, 0.001$  به ازای  $N = 18$ ,  $L = \pi$ ,  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 1$ .

$r$	$t = 0.001 (s)$			$t = 1 (s)$		
	$E_{lower}^{20}$	$E_{upper}^{20}$	CPUtime(s)	$E_{lower}^{20}$	$E_{upper}^{20}$	CPUtime(s)
۰	$1/9 \times 10^{-6}$	$1/2 \times 10^{-9}$	۱/۱۴	۰/۰۲۰۳	$1/2 \times 10^{-5}$	۱/۱۴
۰/۲	$1/7 \times 10^{-6}$	$2 \times 10^{-7}$	۱/۱۲	۰/۰۱۸۳	$2/04 \times 10^{-3}$	۱/۱۱
۰/۴	$1/5 \times 10^{-6}$	$4 \times 10^{-7}$	۱/۱۱	۰/۰۱۶۲	$4/08 \times 10^{-3}$	۱/۱۲
۰/۶	$1/3 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^{-7}$	۱/۱۱	۰/۰۱۴۲	$6/11 \times 10^{-3}$	۱/۱۲
۰/۸	$1/1 \times 10^{-6}$	$8 \times 10^{-7}$	۱/۱۶	۰/۰۱۲۲	$8/1 \times 10^{-3}$	۱/۱۱
۱	$9/9 \times 10^{-6}$	$8/9 \times 10^{-7}$	۱/۱۴	۰/۰۱۰۱	۰/۰۱۰۱	۱/۱۴

2: Define  $n, h, m, x, t, \alpha, r$

3: Initialize  $U$

4: for  $i = 0$  to  $n$  do

شبه‌کد ۲: شبه‌کد الگوریتم محاسبه جواب شاخه‌ی

پایینی معادله (۱.۶)

1: Set  $u_{exact}$  to  $(r - 1) * (\sin(x) + \sin(t))$

25:  $S - Result \leftarrow 0$   
26: **for**  $k = 0$  **to**  $m$  **do**  
27:          $S - Result \leftarrow S - Result + U$   
               $[i, k] * t^{(\alpha * k)}$   
28:         **end for**  
29:         **Append**  $S - Result$  **to**  $uapproximate$   
30:         **Append**  $uexact(x[i], t)$  **to**  $uu$   
31:         **Calculate** *the absolute value of*  
               $uu[i] - uapproximate[i]$   
32:         **Append**  $(abs(uu[i] -$   
               $uapproximate[i]))$  **to**  $error$   
33:         **end for**  
34:         **Return**  $uapproximate$   
35:         **Return**  $error$

مثال ۲.۶. معادله کلین - گوردن کسری زمانی فازی با  
شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید [۴، ۲۹]:

$${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r) - \frac{\partial^\gamma \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x^\gamma} + \tilde{v}(x, t; r) = 0,$$

$$1 < \beta \leq 2, 0 < x < L, 0 < t < T, \quad (2.6)$$

$$\tilde{v}(x, 0; r) = 0,$$

$$\tilde{v}_t(x, 0; r) = \tilde{k}(r) x, 0 \leq x \leq L,$$

$$\tilde{v}(0, t; r) = 0,$$

$$\tilde{v}(L, t; r) = \tilde{k}(r) L \sin(t),$$

$$\tilde{k}(r) = [\underline{k}(r), \bar{k}(r)] = [r - 1, 1 - r].$$

5:          $U[i, 0] \leftarrow (r - 1) * \sin(x[i])$   
6:          $U[i, 1] \leftarrow 0$   
7:          $U[i, 2] \leftarrow (r - 1)$   
8:          $U[i, 3] \leftarrow 0$   
9:         **end for**  
10:         **for**  $k = 0$  **to**  $m$  **do**  
11:          $U[0, k] \leftarrow (r -$   
               $1) \sum_{s=0}^{1000} \frac{((-1)^s \text{Kroneker Delta}[k, (2s+1)/\alpha]}{(2s+1)!}$   
12:          $U[n, k] \leftarrow (r -$   
               $1) \sum_{s=0}^{1000} \frac{((-1)^s \text{Kroneker Delta}[k, (2s+1)/\alpha]}{(2s+1)!}$   
13:         **end for**  
14:         **for**  $i = 1$  **to**  $n - 1$  **do**  
15:         **for**  $k = 0$  **to**  $m$  **do**  
16:          $intermediate1 \leftarrow \text{Gamma}[(\alpha * k)$   
               $+ 1] / \text{Gamma}[(\alpha * k) + 3]$   
17:          $intermediate2 \leftarrow (U[i - 1, k] -$   
               $2U[i, k] + U[i + 1, k]) / h^2 - U[i, k] + 2 * \sin(x[i]) * \text{KronekerDelta}[k]$   
18:          $U[i, k + 4] \leftarrow intermediate1 * intermediate2$   
19:         **end for**  
20:         **end for**  
21:         **Initialize**  $uapproximate$  **as an empty list**  
22:         **Initialize**  $uu$  **as an empty list**  
23:          $error \leftarrow 0$   
24:         **for**  $i = 1$  **to**  $n - 1$  **do**

جواب دقیق این معادله برای  $\beta = 2$ ، عبارتست از:

$$[4] \tilde{v}(x, t; r) = \tilde{k}(r)x \sin(t)$$

این مثال با روش شرح داده شده، حل و نتایج حاصل در جدول ۶ و شکل‌های ۲، ۳ و ۴ قابل مشاهده است.

جدول ۶، شامل خطای مطلق حاصل از روش ترکیبی

برای حل معادله (۲.۶)، به‌ازای  $\beta = 2$ ،  $n = 30$ ،  $N = 10$

و پارامتر ۱،  $0.75$ ،  $0.5$ ،  $0.25$ ،  $0$ ، در نقاط

$(x, t) = (0.4, 0.4)$  و  $(x, t) = (0.8, 0.9)$  در طول

بازه مکانی  $[0, 1]$  می‌باشد. زمان انجام محاسبات نیز در

جدول ۶ قابل مشاهده است. همچنین نمودار جواب

دقیق معادله (۲.۶) به‌ازای  $\beta = 2$  و جواب تقریبی در

نقطه  $(1, 2/4)$ ، به‌ازای مقادیر مختلف

$\beta = 1/1, 1/8, 2$ ،  $n = 30$ ،  $L = 3$ ،  $r \in [0, 1]$  و

$N = 10$  در شکل ۲ رسم شده است. شکل ۳، نمودار

(آ)، جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (۲.۶) را به‌ازای

مقادیر مختلف ۲،  $1/6$ ،  $1/1$ ،  $\beta = 1/1$ ،  $n = 30$ ،  $r = 0.5$  در

لحظه  $t = 1$  و در طول بازه مکانی  $[0, 1]$  با  $h = 0.1$

و نمودار (ب)، جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (۲.۶)

را به‌ازای مقادیر مختلف ۲،  $1/6$ ،  $1/1$ ،  $\beta = 1/1$ ،  $n = 30$

در لحظه  $t = 1$  و در طول بازه مکانی  $[0, 1]$

با  $h = 0.1$  نشان می‌دهد. همچنین در شکل ۴، نمودار

(آ)، جواب تقریبی هر دو شاخه پایینی و بالایی معادله

(۲.۶) را به‌ازای مقادیر مختلف ۲،  $1/6$ ،  $1/1$ ،  $\beta = 1/1$  و

$$r = 0.2$$

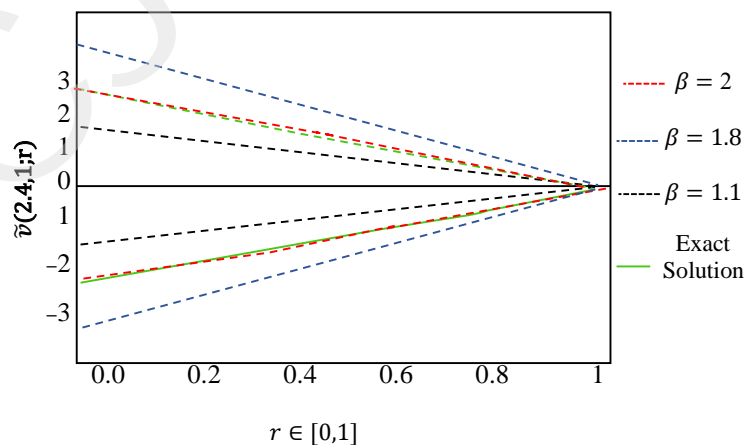
$L = 2$ ،  $i = 6$ ،  $n = 30$  و  $N = 10$  در طول بازه زمانی

$[0, 1/5]$  و نمودار (ب)، جواب تقریبی شاخه پایینی و

بالایی معادله (۲.۶)، را به‌ازای ۲،  $1/6$ ،  $1/1$ ،  $\beta = 1/1$  و  $n = 30$

،  $r = 0.5$  و  $N = 10$  در لحظه  $t = 1$  در بازه مکانی

$[0, 1]$  نشان می‌دهند.

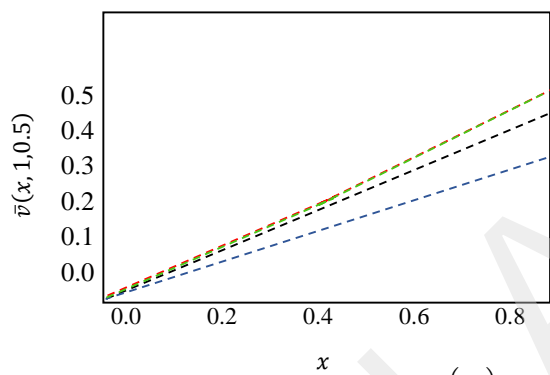


شکل ۲. نمودار جواب معادله (۲.۶)، در  $t = 1$  به‌ازای مقادیر مختلف ۲،  $1/8$ ،  $1/1$ ،  $\beta = 1/1$  و  $L = 3$ ،  $n = 30$ .

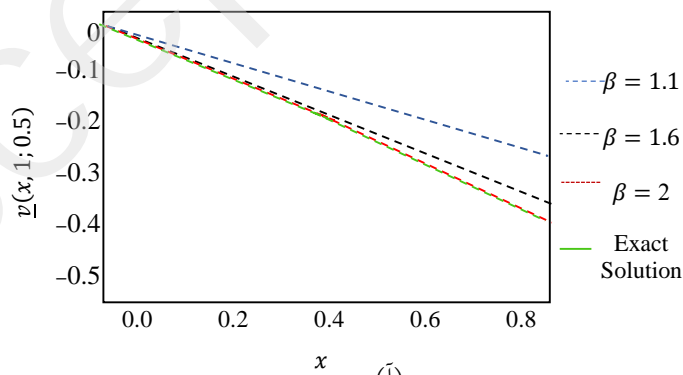
جدول ۶. خطای مطلق روش پیشنهادی مربوط به معادله (۲.۶)، در نقاط  $(x,t) = (0.4, 0.4)$  به ازای  $(x,t) = (0.8, 0.9)$  و  $N = 10$ ,  $\beta = 2$ ,  $L = 1$  و

$$n = 30$$

$r$	$x = 0.4, t = 0.4$			$x = 0.8, t = 0.9$		
	$E_{lower}^{20}$	$E_{upper}^{20}$	CPUtime(s)	$E_{lower}^{20}$	$E_{upper}^{20}$	CPUtime(s)
0	$3/4 \times 10^{-5}$	$3/4 \times 10^{-5}$	0.189	$3/8 \times 10^{-3}$	$3/8 \times 10^{-3}$	0.187
0.25	$2/5 \times 10^{-5}$	$2/5 \times 10^{-5}$	0.189	$2/8 \times 10^{-3}$	$2/8 \times 10^{-3}$	0.189
0.5	$1/7 \times 10^{-5}$	$1/7 \times 10^{-5}$	0.189	$1/9 \times 10^{-3}$	$1/9 \times 10^{-3}$	0.189
0.75	$8/5 \times 10^{-6}$	$8/5 \times 10^{-5}$	0.189	$9/6 \times 10^{-3}$	$9/6 \times 10^{-34}$	0.187
1	0.0000	0.0000	0.91	0.0000	0.0000	0.189



(ب)



(ا)

شکل ۳. (ا) نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (۲.۶)، در لحظه  $t = 1$ ، به ازای مقادیر مختلف  $\beta = 1/1, 1/6, 2$ ,  $r = 0.5$ .

$N = 10$  و  $n = 30$  در بازه مکانی  $[0, 1]$  (ب): نمودار جواب تقریبی شاخه بالایی معادله (۲.۶)، در لحظه  $t = 1$ ، به ازای مقادیر

مختلف  $\beta = 1/1, 1/6, 2$ ,  $r = 0.5$ ,  $N = 10$  و  $n = 30$  در بازه مکانی  $[0, 1]$ .

$$1 < \beta \leq 2, 0 \leq x \leq L, t > 0, \quad (3.6)$$

$$\tilde{v}(x, 0; r) = 0, \tilde{v}_t(x, 0; r) = \tilde{k}(r) e^x, 0 \leq x \leq L$$

$$\tilde{v}(0, t; r) = \tilde{k}(r) \sinh(t), \tilde{v}(L, t; r) = \tilde{k}(r)(e^L \sinh(t)),$$

که

$$\tilde{k}(r) = [\underline{k}(r), \bar{k}(r)] = [r - 1, 1 - r].$$

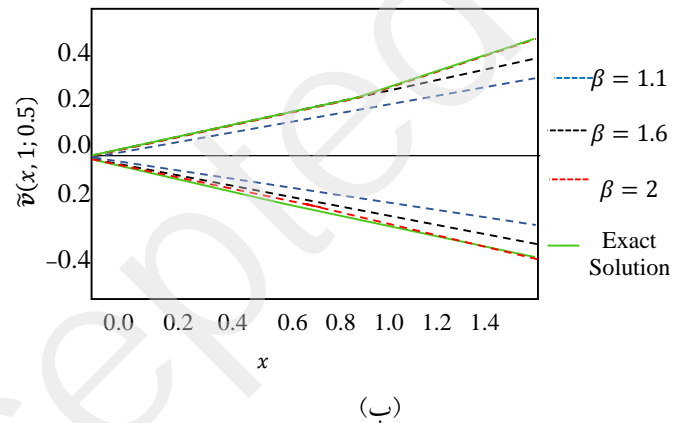
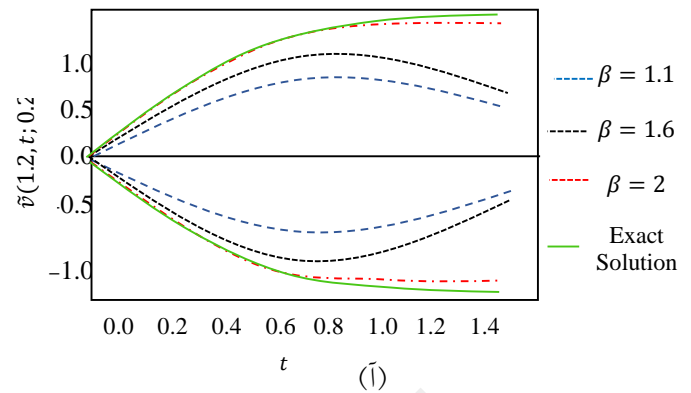
جواب دقیق این معادله برای  $\beta = 2$ ، عبارتست از:

$$[29] \tilde{v}(x, t; r) = \tilde{k}(r)(e^x \sinh(t))$$

نتایج حاصل از به‌کارگیری روش معرفی شده برای حل معادله (3.6) در جدول 7 و شکل‌های 5 و 6 قابل مشاهده است.

جدول 7، خطای مطلق حاصل از روش ترکیبی را برای حل معادله (3.6)، به‌ازای  $\beta = 2$ ،  $n = 25$ ،  $N = 10$  و  $r = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$  در نقاط

$(x, t) = (0.5, 0.5)$  و  $(x, t) = (0.8, 0.2)$  در طول بازه مکانی  $[0, 1]$  و زمان انجام محاسبات را برحسب ثانیه نشان می‌دهد. شکل 5، نمودارهای (آ) و (ب)، به ترتیب، نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی و بالایی معادله (3.6)، به‌ازای مقادیر  $\beta = 2, 1/6, 1/2$ ،  $r = 0.5$  و  $n = 25$  در  $t = 1$ ، در طول بازه مکانی  $[0, 1]$  می‌باشند. همچنین شکل 6، نمودار (آ)، جواب تقریبی هر دو شاخه پایینی و بالایی معادله (3.6)، به‌ازای مقادیر  $\beta = 2, 1/6, 1/2$ ،



شکل 4. (آ) نمودار جواب تقریبی معادله (2.6)، به‌ازای مقادیر

مختلف  $\beta = 2, 1/6, 1/2$ ،  $r = 0.2$ ،  $n = 30$  و  $N = 10$  در بازه مکانی  $[0, 1/5]$  (ب): نمودار جواب تقریبی معادله (2.6) در لحظه  $t = 1$ ، به‌ازای مقادیر مختلف  $\beta = 2, 1/6, 1/2$ ،  $N = 10$  و  $r = 0.5$  در بازه مکانی  $[0, 1]$ .

**مثال 3.6.** معادله کلین - گوردن کسری زمانی فازی (غیرخطی) با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید [29]:

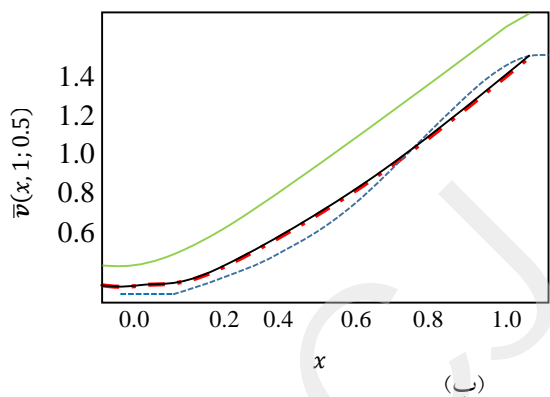
$${}^c D_t^\beta \tilde{v}(x, t; r) = \frac{\partial^2 \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \tilde{v}(x, t; r)}{\partial x} \right)^2 - \tilde{v}^2(x, t; r),$$

و  $L = 1$ ،  $h = 0.1$ ،  $x \in [0, 1]$ ،  $\beta = 1/2, 1/6, 2$  نشان می‌دهد و نمودار (ب)، نمودار جواب دقیق معادله (۳.۶) و جواب تقریبی را به‌ازای مقادیر مختلف  $n = 25$  در نقطه  $(1, 1)$ ، نمایش می‌دهد.

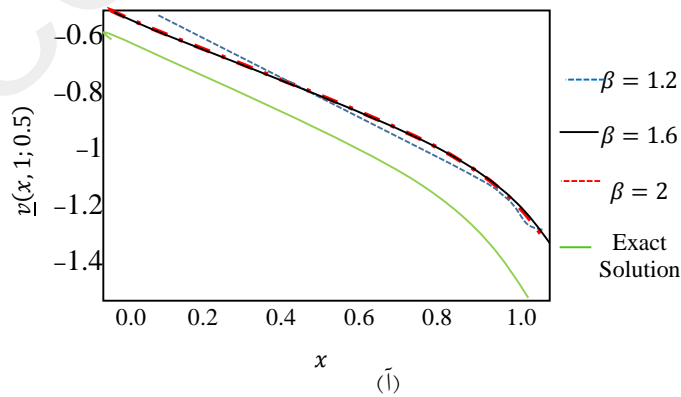
$n = 25$  و  $r = 0.5$  در طول بازه مکانی  $[0, 1]$  را نشان می‌دهد و نمودار (ب)، نمودار جواب دقیق معادله (۳.۶) و جواب تقریبی را به‌ازای مقادیر مختلف

جدول ۷. خطای روش پیشنهادی مربوط به معادله (۳.۶) برای نقاط  $(x, t) = (0.5, 0.2)$ ،  $(x, t) = (0.5, 0.5)$  به‌ازای  $L = 1$  و  $N = 10$  و  $\beta = 2$

$x = 0.5, t = 0.5$			$x = 0.8, t = 0.2$			
$r$	$E_{lower}^{10,25}$	$E_{upper}^{10,25}$	CPUtime(s)	$E_{lower}^{10,25}$	$E_{upper}^{10,25}$	CPUtime(s)
0	$3/4 \times 10^{-2}$	$3/4 \times 10^{-2}$	1/42	$2/9 \times 10^{-3}$	$2/9 \times 10^{-3}$	1/39
0.25	$2/6 \times 10^{-2}$	$2/6 \times 10^{-2}$	1/42	$2/2 \times 10^{-3}$	$2/2 \times 10^{-3}$	1/40
0.5	$1/7 \times 10^{-2}$	$1/7 \times 10^{-2}$	1/42	$1/4 \times 10^{-3}$	$1/4 \times 10^{-3}$	1/42
0.75	$8/6 \times 10^{-3}$	$8/6 \times 10^{-3}$	1/44	$7/4 \times 10^{-4}$	$7/4 \times 10^{-4}$	1/40
1	0/0000	0/0000	1/44	0/0000	0/0000	1/42



(ب)



(آ)

شکل ۵. (آ) نمودار جواب تقریبی شاخه پایینی معادله (۳.۶)، در لحظه  $t = 1$ ، به‌ازای مقادیر مختلف  $\beta = 1/1, 1/6, 2$  و  $r = 0.5$  و  $n = 25$

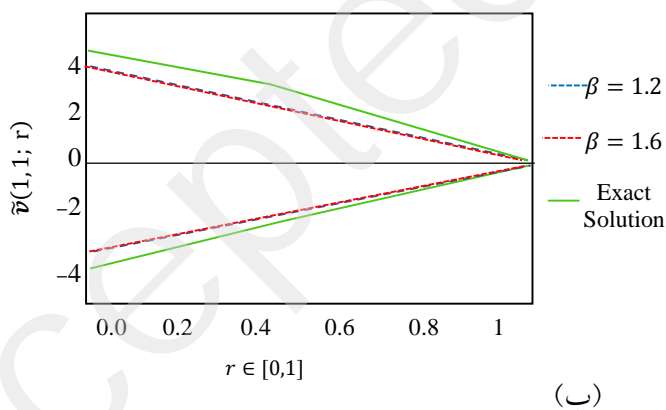
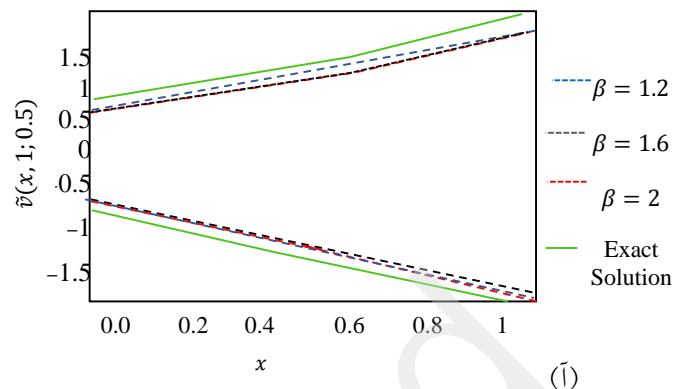
در طول بازه مکانی  $[0, 1]$  (ب): نمودار جواب تقریبی شاخه بالایی معادله (۳.۶)، به‌ازای مقادیر مختلف

$n = 25$ ،  $r = 0.5$ ،  $\beta = 1/1, 1/6, 2$  در طول بازه مکانی  $[0, 1]$ .

## ۷. نتیجه گیری

معادله کلین - گوردن فازی، یکی از معادلات پرکاربرد در ریاضی - فیزیک است. همانند سایر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی، غیرخطی بودن این معادله نیز سبب می‌شود، یافتن جواب تحلیلی آن سخت یا حتی غیرممکن باشد. لذا ساختن روش‌های عددی برای به دست آوردن تقریبی از جواب معادله دارای اهمیت است. در این مقاله، روشی ترکیبی براساس دو روش تفاضلات متناهی و تبدیل دیفرانسیل کسری برای حل عددی معادله مذکور معرفی و استفاده شد.

همچنین، کران بالایی برای خطای جواب حاصل از روش به دست آمد. الگوریتم روش پیشنهادی به سادگی قابل پیاده‌سازی است و نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد دقت و کارایی روش قابل توجه است. همچنین پایین بودن زمان اجرای محاسبات نیز می‌تواند به عنوان نقطه قوت روش لحاظ شود. مقایسه روش با روش‌های موجود برای حل معادله کلین - گوردن فازی نشان داد، این روش از دقت قابل قبولی برخوردار است. برای حل معادلات با مشتقات جزئی، روش تبدیل دیفرانسیل دوبعدی نیز قابل استفاده است؛ ولی در این مقاله، همان گونه که ذکر شد، با استفاده تکنیک نیمه گسسته‌سازی با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی



شکل ۶. (آ) نمودار جواب تقریبی معادله (۳.۶)، در لحظه  $t = 1$ ، به ازای مقادیر مختلف  $\beta = 1/1, 1/6, 2$ ،  $r = 0/5$ ،  $n = 25$  در بازه مکانی  $[0, 1]$  و (ب): نمودار جواب تقریبی معادله (۳.۶)، در نقطه  $(1, 1)$ ، به ازای مقادیر مختلف  $\beta = 1/6, 2$ ،

$$n = 25 \text{ و } r \in [0, 1], \beta = 1/1,$$



مواجهیم که برای حل آن از تبدیل دیفرانسیل کسری یک بعدی استفاده می‌شود. مزیت این کار، پیاده‌سازی ساده‌تر الگوریتم نسبت به استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل دوبعدی می‌باشد، ولی از طرفی با وارد کردن روش تفاضلات متناهی، روش ترکیبی متأثر از خطای گسسته‌سازی و خطای گرد کردن ناشی از طول گام خیلی کوچک خواهد بود. از دیگر نقاط ضعف این روش، این است که دامنه‌ی همگرایی روش تبدیل دیفرانسیل معمولاً کوچک است و این موضوع سبب می‌شود که برای زمان‌های بزرگ، دقت خیلی خوبی حاصل نشود. برای ادامه کار درصدد هستیم در صورت امکان، این مشکلات را با آزمودن فرمول‌های تفاضلات متناهی مرتبه بالا (روش‌های فشرده) برای تقریب مشتقات مکانی [۳۴] و استفاده از روش‌های بهینه‌سازی [۳۵، ۳۶] برطرف کنیم.

روش مورد استفاده در این مقاله، با در نظر گرفتن تمام معایب و مزایایش برای حل عددی بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری (اعم از خطی و غیرخطی) که از مسائل مربوط به فیزیک، مهندسی برق، مهندسی مکانیک و مهندسی شیمی ناشی می‌شوند قابل استفاده است.

## مراجع

- [1]. مرادی فراهانی، حسین، عسگری، جواد و ذکری، مریم، «مروری بر منطق فازی نوع-۲: از پیدایش تا کاربرد»، محاسبات نرم. ۲(۱)، ۴۳-۲۲. ۱۳۹۲.
- [2]. اکرمی، عباس و پارسامنش، محمود، «بررسی یک مدل اپیدمیک فازی ریاضی برای انتشار ویروس کرونا در یک جمعیت»، محاسبات نرم. ۱۱(۱)، ۹-۲. ۱۴۰۱. doi:10.22052/scj.2022.246053.1045.
- [3]. آخوندی، رعنا و حسینی، راحیل، «ارائه مدل هوشمند هایبریدی فازی-تکامل ژنتیکی تفاضلی در یک سیستم خبره فازی برای پیش‌بینی خطر ابتلا به بیماری قلبی»، محاسبات نرم. ۶(۲)، ۴۷-۳۲. ۱۳۹۶.
- [4]. M. Alshammari, W.W. Mohammed, M. Yar, "Novel Analysis of fuzzy fractional Klein-Gordon model via Semianalytical method," *Function Spaces*, pp.1-9. 2022, doi:10.1155/2022/40020269.
- [5]. S. Arshad and V. Lupulescu, "On the fractional differential equations with uncertainty," *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 74(11), pp. 3685-3693. 2011, doi:10.1016/j.na.2011.02.048.
- [6]. S. Arshad and V. Lupulescu, "Fractional differential equation with the fuzzy initial condition," *Electronic Journal of Differential Equations*, 2011(34), pp. 1-8. 2011.
- [7]. A. Ahmadian, M. Suleiman, S. Salahshour, D. Baleanu, A, "Jacobi operational matrix for solving a fuzzy linear fractional differential equation," *Advances in Difference Equations*, 2013(1), pp. 1-29. 2013, doi: 10.1186/1687-1847-2013-104.

- [17]. K. Shah, A. R. Seadawy, M. Arfan, "Evaluation of one dimensional fuzzy fractional partial differential equations," *Alexandria Engineering*, 59(5), pp. 3347-3353. 2020, doi:10.1016/j.aej.2020.05.005.
- [18]. O. A. Arqub and M. Al-Smadi, "Fuzzy conformable fractional differential equations: novel extended approach and new numerical solutions," *Soft Computing*, 24(16), pp. 12501-12522. 2020, doi: 10.1007/s00500-020-04687-0.
- [19]. Z. Alijani, D. Baleanu, B. Shiri, G. C. Wu, "Spline collocation methods for systems of fuzzy fractional differential equations," *Chaos, Solitons and Fractals*, 131, p. 109510. 2020, doi:10.1016/j.chaos.2019.109510.
- [20]. A. El Mfadel, S. Melliani, M. H. Elomari, "A note on the stability analysis of fuzzy nonlinear fractional differential equations involving the Caputo fractional derivative," *Mathematics and Mathematical Sciences*, 2021, pp. 1-6. 2021, doi: 10.1155/2021/7488524.
- [21]. E. U. Haq, Q. M. U. Hassan, J. Ahmad, K. Ehsan, "Fuzzy solution of system of fuzzy fractional problems using a reliable method," *Alexandria Engineering*, 61(4), pp. 3051-3058. 2022, doi:10.1016/j.aej.2021.08.034.
- [22]. J. J. Sakurai and E. D. Commins, "Modern quantum mechanics" revised edition, 1995. doi:10.1119/1.17781.
- [23]. M. Mulimani and S. Kumbinaraiaiah, "A numerical study on the nonlinear fractional Klein-Gordon equation," *Journal of Umm Al-Qura University for Applied Sciences*, pp. 1-22. 2023, doi: 10.1007/s43994-023-00091-0.
- [24]. A. K. Golmankhaneh, A. K. Golmankhaneh, D. Baleanu, "On nonlinear fractional Klein-Gordon equation," *Signal Processing*, 91(3), pp. 446-451. 2011, doi:10.1016/j.sigpro.2010.04.016.
- [25]. K. A. Gepreel and M. S. Mohamed, "Analytical approximate solution for nonlinear spacetime fractional Klein-Gordon equation," *Chinese physics B*, 22(1), p. 010201. 2013, doi:10.1088/1674-1056/22/1/010201.
- [26]. K. Hosseini, P. Mayeli, R. Ansari, "Modified Kudryashov method for solving the conformable time-
- [8]. E. Khodadadi and E. Çelik, "The variational iteration method for fuzzy fractional differential equations with uncertainty," *Fixed Point Theory and Applications*, 2013, pp. 1-7. 2013, doi: 10.1186/1687-1812-2013-13.
- [9]. S. Arshad, "On existence and uniqueness of solution of fuzzy fractional differential equations," *Fuzzy Systems*, 10(6), pp. 137-151. 2013.
- [10]. D. Takači, A. Takači, A. Takači, "On the operational solutions of fuzzy fractional differential equations," *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 17, pp. 1100-1113. 2014, doi: 10.2478/s13540-014-0216-y.
- [11]. A. Rivaz, O. S. Fard, T. A. Bidgoli, "Solving fuzzy fractional differential equations by a generalized differential transform method," *SeMA*, 73, pp. 149-170. 2016, doi: 10.1007/s40324-015-0016-x.
- [12]. N. A. Rahman and M. Z. Ahmad, "Solving fuzzy fractional differential equations using fuzzy Sumudu transform," *Nonlinear Sciences and Applications*, 10(1), pp. 2620-2632. 2017, doi:10.22436/jnsa.010.05.28.
- [13]. S. Tomasiello and J. E. Macías-Díaz, "Note on a Picard-like method for Caputo fuzzy fractional differential equations," *Applied Mathematics and Information Sciences*, 11(1), pp. 281-287. 2017, doi: 10/8576/amis/110134.
- [14]. M. Alaroud, M. Al-Smadi, R. R. Ahmad, U. K. Salma Din, "Computational optimization of residual power series algorithm for certain classes of fuzzy fractional differential equations," *Differential Equations*, 2018, pp. 1-11. 2018, doi:10.1155/2018/8686502.
- [15]. A. Harir, S. Melliani, L. S. Chadli, "Fuzzy space-time fractional telegraph equations," *Mathematics Trends and Technology*, 64(2), pp. 101-108. 2018, doi:10.1155/2019/5734190.
- [16]. A. Armand, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, Z. Gouyandeh, "The fuzzy generalized Taylor's expansion with application in fractional differential equations," *Fuzzy Systems*, 16(2), pp. 57- 72. 2019, doi:10.22111/IJFS.2019.4542.

- [34]. H. Porki, M. Arabameri, R. Gharechahi, "Numerical solution of nonlinear fractional Riccati differential equations using compact finite difference method," *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 12(3 (Special Issue)-On the occasion of the 75th birthday of Professor A. Vahidian and Professor F. Toutounian), pp. 585-606. 2022, doi:10.22067/IJNAO.2022.76489.1129.
- [35]. Z. Avazzadeh, H. Hassani, P. Agarwal, S. Mehrabi, M. J. Ebadi, M. K. Hosseini Asl, "Optimal study on fractional fascioliasis disease model based on generalized Fibonacci polynomials," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(8), pp. 9332-9350. 2023, doi: 10.1002/mma.9057.
- [36]. Z. Avazzadeh, H. Hassani, M. J. Ebadi, P. Agarwal, M. Poursadeghfard, E. Naraghirad, "Optimal Approximation of Fractional Order Brain Tumor Model Using Generalized Laguerre Polynomials," *Iranian Journal of Science*, 47(2), pp. 501-513. 2023, doi: 10.1007/s40995-022-01388-1.
- [27]. H. Singh, D. Kumar, J. Singh, C. S. Singh, "A reliable numerical algorithm for the fractional Klein-Gordon equation," *Engineering Transactions*, 67(1), pp. 21-34. 2019, doi:10.24423/EngTrans.910.20190214.
- [28]. R. M. Ganji, H. Jafari, M. Kgarose, A. Mohammadi, "Numerical solutions of timefractional Klein-Gordon equations by clique polynomials," *Alexandria Engineering*, 60(5), pp. 4563- 4571. 2021, doi:10.1016/j.aej.2021.03.026.
- [29]. V. R. Nikam, S. B. Gaikwad, S. A. Tarate, K. A. Kshirsagar, "Fuzzy Laplace-Adomian Decomposition Method for Approximating Solutions of Time Fractional Klein-Gordon Equations in a Fuzzy Environment," *European Chemical Bulletin*, 12(8), pp. 5926-5943. 2023, doi: 10.1155/2022/3864053.
- [30]. S. H. Hashemi Mehne, "Differential transform method: A comprehensive review and analysis," *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, 12(3) (Special Issue), pp. 629-657. 2022, doi:10.22067/IJNAO.2022.77130.1153.
- [31]. V. S. Erturk, S. Momani, Z. Odibat, "Application of generalized differential transform method to multi-order fractional differential equations," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(8), pp. 1642-1654. 2008, doi:10.1016/j.cnsns.2007.02.006.
- [32]. Z. Odibat, S. Kumar, N. Shawagfeh, A. Alsaedi, T. Hayat, "A study on the convergence conditions of generalized differential transform method," *Mathematical Method in the Applied Sciences*, 40, pp. 40-48. 2016, doi:10.1002/mma.3961.
- [33]. Z. Sahraee and M. Arabameri, "A Semi-Discretization Method Based on Finite Difference and Differential Transform Methods to Solve the Time-Fractional Telegraph Equation," *Symmetry*, 15(9), pages. 1759. 2023, doi: 10.3390/sym15091759.