



University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



مدل رتبه‌کاسته داده محور و مبتنی بر فیزیک برای معادله نفوذ-جابجایی با بهره‌گیری از روش تجزیه مود دینامیکی

محمد کاظم مویدی¹، دانشیار، سیده زهره خاکزاری²، دانشجوی کارشناسی ارشد

¹ مرکز مطالعات هوافضا، دانشگاه قم، قم، ایران.

² آزمایشگاه پژوهشی اتمسفر زمین و علوم فضایی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران.

اطلاعات مقاله

چکیده

تاریخچه مقاله:

دریافت 9 مهر ماه 1402

پذیرش 6 بهمن ماه 1402

کلمات کلیدی:

روش تجزیه مود دینامیکی

مدل رتبه‌کاسته

الگوی لزجت گردابه‌ای

عدد رینولدز

مدل جابجایی

در تحلیل‌های عددی مسائل مکانیک سیالات، به ویژه در شبیه‌سازی مستقیم، کاهش هزینه‌های محاسباتی همواره از اهمیت بالایی برخوردار بوده است. استفاده از مدل‌های رتبه‌کاسته، که با کاستن از قیود مدل به سرعت آن افزوده خواهد شد، جایگزین مناسبی برای مدل‌های اصلی به ویژه در مسائل پیچیده می‌باشد. در این پژوهش با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی و با بهره‌گیری از مفاهیم پایه‌ای سیستم‌های دینامیکی، معادله حاکم به فرم یک مدل رتبه‌کاسته تبدیل شده است. نتایج نشان می‌دهند در صورت افزایش عدد رینولدز و کاهش اثرات ناشی از ترم لزج موجود در معادله حاکم، استهلاک لازم در سیستم دینامیکی برای پایداری حل عددی کاهش می‌یابد. همچنین به دلیل کامل نبودن فضای مودال مفروض و حذف اثر مودها، این ناپایداری بیشتر نمایان خواهد شد. بنابراین با استفاده از یک ترم اتلاف مصنوعی مبتنی بر لزجت گردابه‌ای سعی شده ناپایداری سیستم افزایش پیدا کند. مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده با دسته نمایه‌ای حاصل از یک مقدار عدد رینولدز مشخص ایجاد و برای مدل‌سازی مساله مورد نظر به ازای اعداد رینولدز مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. مقایسه نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته با شبیه‌سازی‌های حاصل از حل دقیق، توانایی و دقت بالای مدل رتبه‌کاسته، برای پیش‌بینی دینامیک میدان را نشان می‌دهد.

© 1402 نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

1. مقدمه

حاکم بر سیستم، منجر به دستگاه معادلات بسیار حجیمی خواهد شد. همچنین ساختارهای موجود در این میدان‌ها (مانند میدان نفوذ حرارتی، میدان نفوذ-جابجایی و...) دارای نوسانات وابسته به زمان و مکان می‌باشند، در نتیجه با گذر زمان تغییرات تصادفی و رفتارهای اتفاقی مانع از بررسی کامل حرکت همه ذرات سیال و تعیین مقادیر صریح متغیرهای جریانی در میدان خواهند شد. به همین علت پژوهشگران حوزه دینامیک سیالات برای بررسی

به طور کلی گسسته‌سازی میدان جریان در مسائل مربوط به مکانیک سیالات و انتقال حرارت به منظور شبیه‌سازی دینامیک

* نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: moayyedi@qom.ac.ir (مویدی)

zohreh.khak97@gmail.com (خاکزاری)

نحوه ارجاع به مقاله: محمد کاظم مویدی، سیده زهره خاکزاری، «مدل رتبه‌کاسته داده محور و مبتنی بر فیزیک برای معادله نفوذ-جابجایی با بهره‌گیری از روش تجزیه مود دینامیکی»، مجله محاسبات نرم، جلد 13، شماره 2، ص 232-216، پاییز و زمستان 1403.

و تجزیه و تحلیل این دسته از مسائل، به شبیه‌سازی و تحلیل عددی این پدیده‌ها روی آورده‌اند. وابستگی الگوهای عددی به سخت‌افزارهای کامپیوتری به منظور افزایش تعداد گره‌های محاسباتی، از مهمترین و قابل‌تأمل‌ترین ویژگی آنها می‌باشد. این امر باعث افزایش پیچیدگی‌ها، حجم و زمان محاسبات و در نتیجه افزایش هزینه‌های محاسباتی می‌گردد. در دهه‌های اخیر بدست آوردن یک روش محاسباتی سریع و دقیق، همواره یکی از دغدغه‌های پژوهشگران در حوزه دینامیک سیالات محاسباتی بوده است. بنابراین، دستیابی به روشی که قادر باشد با حفظ دقت، کیفیت و ویژگی‌های مدل اصلی، پیچیدگی‌های آن را کاهش و سپس شبیه‌سازی نماید، بسیار ضروری به نظر می‌رسد. این مشکلات باعث شده تا در تحقیق حاضر برای کاهش هزینه‌های محاسباتی به توسعه یک الگو رتبه‌کاسته¹ پرداخته شود. این الگو یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای کاهش پیچیدگی‌های مدل اصلی به‌شمار می‌رود. بانگ و همکاران مدل‌های غیرخطی و پیچیده که اغلب در طراحی و تحلیل سیستم‌های واقعی بکار می‌روند را توسط روش رتبه‌کاسته توسعه دادند [1]. افزایی و همکاران توانستند حجم محاسبات مدل‌سازی نسبت به مدل مبتنی بر شبکه عصبی متشکل از لایه‌های کانولوشنی را با استفاده مدل کاهش دهند هم‌چنین سرعت مدل‌سازی و دقت نتایج خروجی را نیز به مقدار قابل توجهی افزایش دهند [2]. روشی که بیشتر از سایر روش‌ها توسط پژوهشگران این حوزه برای بررسی رفتار سیالات مورد استفاده واقع شده‌است، روش تجزیه متعامد بهینه² است. این روش یکی از پرکاربردترین الگوها برای کاهش مرتبه معادلات حاکم بر جریان سیال به‌شمار می‌رود [3]. هیگام و همکاران از روش تجزیه متعامد بهینه برای تحلیل جریان سیال رئولوژیک در یک بستر سیال که در آن مقدار دبی حجم به صورت یک تابع پالسی تغییر می‌کند، استفاده کرده‌اند. آنها توانستند علاوه بر شناسایی ساختارهای منسجم مکانی میدان، میزان تغییرات انرژی جنبشی میدان را برحسب مکان و زمان توصیف کنند [4].

مویدی و همکاران از مدل رتبه‌کاسته پارامتری و وابسته به زمان مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه برای شبیه‌سازی مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی استفاده کردند [5]. از آنجا که بررسی ساختارهای میدان در روش تجزیه متعامد بهینه صرفاً براساس محتوای انرژی هریک از ساختارها بوده و این روش، سیستم را از نظر رفتار دینامیکی مورد ارزیابی قرار نمی‌دهد، لذا مدل رتبه‌کاسته حاصل، در بلند مدت قادر به پیش‌بینی رفتار سیستم بادقت بالا نخواهد بود. به همین دلیل در سال‌های اخیر پژوهشگران با مطالعه فیزیک میدان‌های جریان و تعمیم روش آرنولد موفق به توسعه روشی قدرتمند در راستای تجزیه تحلیل دینامیک سیستم‌های غیرخطی شدند [6]، [7]. این روش صرفاً مبتنی بر دسته نمایه‌های ثبت‌شده حاصل از حل عددی دقیق یا نتایج آزمایشگاهی بوده و قابلیت شناسایی آن دسته از نواحی میدان که در آن عوامل مختلف اثرگذار بوده و رفتارهای دینامیکی پیچیده‌ای اتفاق می‌افتد، را دارد. این الگو ابتدا با هدف استخراج اطلاعات دینامیکی میدان جریان معرفی شد [8]. اشمید در سال 2022 در پژوهشی به بررسی تجزیه مود دینامیکی³ استاندارد شامل تشریح الگوریتم اصلی مدل، به عنوان یک روش برای تجزیه ماتریس داده‌ها، همراه با یک روش بهینه‌سازی مناسب برای استخراج ضرایب مودال پرداخت. هم‌چنین به بررسی سه مساله که انعطاف‌پذیری تجزیه مود دینامیکی را به عنوان یک ابزار تحلیل برای پیکربندی‌های جریان ساده تا پیچیده نشان می‌دهد، پرداخت [9]. شادی و همکاران یک چارچوب جدید از روش تجزیه مود دینامیکی ارائه کردند که مبتنی بر گرفتن دامنه و دامنه داده‌های ورودی است. این الگوریتم اطلاعات تازه‌ای در مورد مقادیر ویژه سیستم ارائه داده و در نهایت منجر به تقریب بهبود یافته طیف تجزیه مود دینامیکی می‌شود. به علاوه، این فرم از روش تجزیه مود دینامیکی شامل پارامترهایی است که می‌توانند بر اساس محدودیت‌های حافظه، تنظیم شوند [10]. کرک و همکاران از ترکیب محدودیت‌های مبتنی بر فرکانس در تجزیه مود دینامیکی برای بدست آوردن یک تجزیه تطبیقی استفاده کردند. این منجر

¹ Reduce Order Model

² Proper Orthogonal Decomposition

³ Dynamic Modes Decomposition

گردابه‌ای اصلاح شده است. در این مساله، داده‌های ورودی برای آموزش مدل رتبه‌کاسته به ازای یک مقدار مشخص عدد رینولدز لحاظ شده و سپس مدل حاصل برای شبیه‌سازی مساله در اعداد رینولدز مختلف به کار گرفته شده است. تحقیق انجام شده منجر به توسعه مدلی می‌شود که می‌تواند به عنوان جایگزینی مدل اصلی باشد. با استفاده از این مدل، می‌توان داده‌ها را برای زمان محدود در نظر گرفت و به کمک مدل رتبه‌کاسته جایگزین با هزینه محاسباتی بسیار کمتر، رفتار سیستم را در بازه‌های زمانی بلند پیش‌بینی کرد. همچنین در تحقیق حاضر به معرفی رویکردی پرداخته شده که به کمک آن بتوان پارامترهای اثرگذار در مساله را تغییر داد و مدل بدون استفاده از داده‌های ورودی جدید، بتواند رفتار سیستم را در شرایط جدید پیش‌بینی کند. این الگو می‌تواند به عنوان مبنایی برای حل مسائل پیچیده‌تر به کمک مدل‌هایی مشابه الگوی مطرح شده در این پژوهش باشد. از جمله مسائلی که حجم محاسبات در مکان - زمان قابل توجه بوده و لذا می‌تواند کارآیی محاسباتی مدل‌های مربوط به این مسائل را دچار چالش‌های جدی کند. زیرا با کاهش حجم و هزینه‌های محاسباتی، افزایش سرعت حاصل می‌شود. از جمله این مسائل می‌توان به جریان‌های اقیانوسی و اتمسفری و آشفتگی جریان سیال اشاره کرد.

2. معادله حاکم

معادله برگرز یک معادله دیفرانسیل جزئی بوده که با حذف عبارت فشار در معادله ناویر - استوکس برای اجتناب از پیچیدگی‌های ناشی از کوپلینگ میدان سرعت و فشار بدست می‌آید. معادله برگرز معمولاً بدون نظر گرفتن جمله نیروهای حجمی بیان می‌شود. شکل غیر بقای معادله برگرز لزج غیر خطی و یک بعدی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

فرم بی بعد معادله (1) با در نظر گرفتن پارامترهای بی‌بعد زیر به دست می‌آید:

به توسعه روش تجزیه مود دینامیکی مقید می‌شود که مستقیماً به حل مشکل ارتباط با ویژگی‌های اصلی سیستم می‌انجامد [11]. بادو و همکاران چگونگی ادغام اصول فیزیکی با تجزیه مود دینامیکی را نشان دادند. آنها توانستند با تمرکز بر روی پنج قانون اصلی بقای فیزیکی، الگوریتم‌های کارآمد برای بهینه‌سازی‌های تجزیه مود دینامیکی مبتنی بر فیزیک¹ مربوطه را استخراج کنند [12]. هو و همکاران نیز به بررسی جریان یک کمپرسور گریز از مرکز با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی پرداختند [13]. سان و همکاران یک جریان ناپایدار بر روی یک توربین بادی دو پره را با استفاده از شبیه‌سازی گردابه‌ای از روش تجزیه مود دینامیکی مورد بررسی قرار دادند [14]. مویدی و همکاران ناپایداری مدل رتبه‌کاسته معادله نفوذ-جابجایی مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز بالا را با بهره‌گیری از رویکرد لزج گردابه‌ای اصلاح کردند [15]. در پژوهشی دیگر، مویدی و همکاران تاثیر رویکرد لزج گردابه‌ای در اصلاح مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی، برای پیش‌بینی رفتار بلند مدت معادلات نفوذ-جابجایی را بررسی کردند. نتایج نشان‌دهنده دقت و سرعت بالای الگوی رتبه‌کاسته برای مدل‌سازی معادلات نفوذ-جابجایی بود [16].

در این پژوهش، دو الگو برای حل مساله به کار گرفته شده است. در الگوی اول، شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله نفوذ-جابجایی انجام گرفته و در مرحله بعد به توسعه یک مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک و با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی پرداخته شده است. یکی از چالش‌های مهم در توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته ناپایداری آنها تحت تاثیر عوامل فیزیکی است. یکی از این عوامل فیزیکی تغییر پارامتر مهمی چون عدد رینولدز به خصوص در مقادیر بالا می‌باشد. دلیل این موضوع کاهش اثرات استهلاکی ناشی از کوچک شدن سهم ترم لزج در معادله می‌باشد. این موضوع کاهش پایداری پاسخ سیستم دینامیکی حاکم بر مساله را به دنبال داشته و سبب می‌شود رفتار سیستم به سمت واگرایی پیش رود. ناپایداری سیستم دینامیکی، با بهره‌گیری از مفهوم اتلاف مصنوعی مبتنی بر رویکرد لزج

¹ Physics-informed DMD (piDMD)

همچنین در پژوهش حاضر برای حل دقیق معادله برگرز لزج به ترتیب از شرط اولیه و شرایط مرزی به صورت زیر استفاده شده است:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (8)$$

$$u(0, t) = u(x, t) = 0$$

در این شرایط حل عددی معادله برگرز لزج با استفاده از گام زمانی معادل 0/001 و برای بازه‌ای معادل یک واحد زمانی انجام شده است. با محاسبه متغیر موجود در معادله (7) در دو زمان $t=0/6$ و $t=0/2$ برای اعداد رینولدز 1000 و 10000 نتایجی حاصل شده است. داده‌های حاصل از حل عددی با نتایج بدست آمده از حل دقیق معادله برگرز در شکل (1) مقایسه شده است. نتایج نمایش داده شده در شکل (1)، بیانگر این است که حل عددی معادله برگرز لزج کاملاً بر نتایج حاصل از حل دقیق منطبق بوده و این امر نشان دهنده دقت بالای حل عددی معادله و داده‌های مورد استفاده برای آموزش مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر این معادله می‌باشد.

5. روش تجزیه مود دینامیکی

تجزیه مود دینامیکی یک تکنیک کاهش ابعاد است که توسط اشمید معرفی شده و داده‌های با ابعاد بالا را به ساختارهای منسجم مکانی - زمانی غالب تجزیه می‌کند [8]. مدت کوتاهی پس از معرفی تجزیه مود دینامیکی، این روش توسط رویل و همکاران به عنوان یک تکنیک عددی برای تخمین عملگر کوپمن¹ و ایجاد یک روش قدرتمند برای تحلیل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مورد استفاده قرار گرفت [19]. این روش از رویکردی مشابه روش‌های تکراری برای محاسبه مقادیر ویژه خطی یا سایر مسائل جبر خطی استفاده می‌کند. هدف از این روش، استفاده از یک فرمول‌بندی با تکیه بر داده‌های ورودی، که از طریق حل عددی یا نتایج آزمایشگاهی به دست می‌آید، می‌باشد. در واقع، از یک روش مبتنی بر مدل برای استخراج اطلاعات دینامیکی اجتناب و در عوض روی یک روش داده

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L} \quad (2)$$

که برای سهولت در نوشتار از علامت ستاره صرف نظر می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u = \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (3)$$

به نحوی که:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (4)$$

3. روش حل عددی مستقیم

برای به دست آوردن نمایه‌ها، از داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم معادله برگرز لزج استفاده شده است. بدین منظور برای محاسبه ترم غیرخطی از روش بالادست مرتبه اول:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} u_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} & \text{if } (u_i > 0) \\ u_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} & \text{if } (u_i < 0) \end{cases} \quad (5)$$

و برای ترم خطی نفوذ از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم استفاده شده است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (6)$$

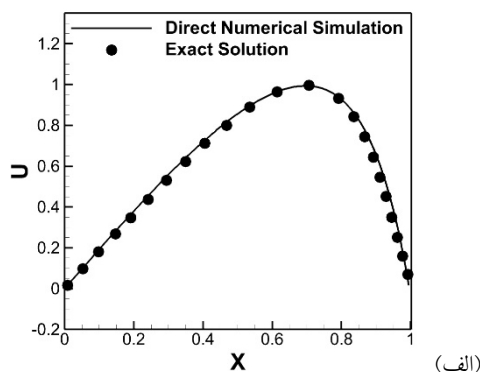
همچنین برای انتگرال‌گیری زمانی نیز از روش رانگ-کوتا با دقت مرتبه چهارم استفاده شده است [17].

4. صحت سنجی حل عددی مستقیم

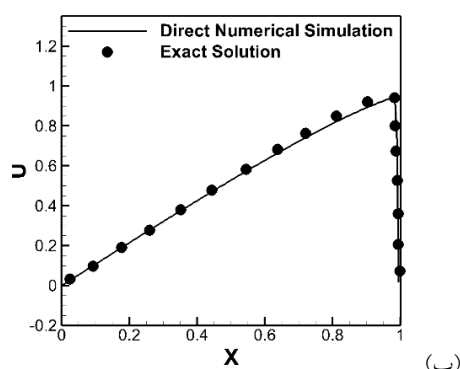
در این بخش به منظور صحت سنجی نتایج به دست آمده از حل عددی معادله برگرز لزج و یک‌بعدی، به مقایسه این نتایج با داده‌های حاصل از حل دقیق پرداخته شده است. بدین منظور از معادله حاصل از حل دقیق معادله برگرز نمایش داده شده در مرجع [18] استفاده شده است:

$$u(x, t) = \frac{4\pi}{Re} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 t}{Re}\right) I_n\left(\frac{Re}{2\pi}\right) n \sin n\pi x}{I_0\left(\frac{Re}{2\pi}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 t}{Re}\right) I_n\left(\frac{Re}{2\pi}\right) n \cos n\pi x} \quad (7)$$

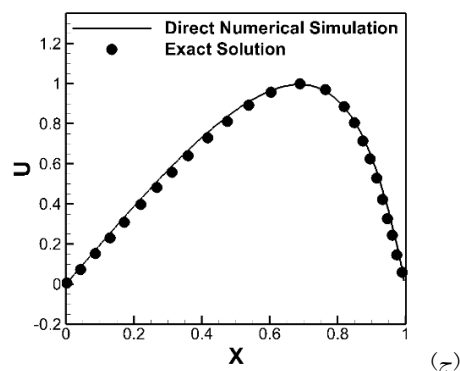
¹ Koopman Operator



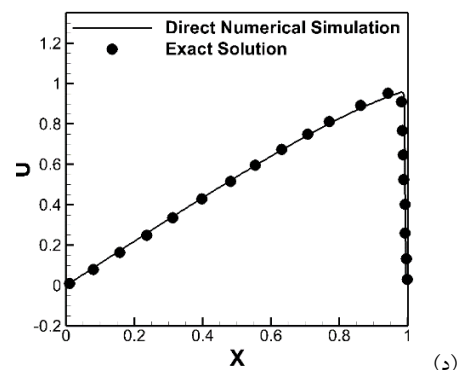
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل (1): مقایسه نتایج حاصل از حل دقیق و حل عددی معادله برگرز در عدد رینولدز 1000 و در زمان‌های (الف) $t=0/2$ (ب) $t=0/6$ و عدد رینولدز 10000 به ازای زمان‌های (ج) $t=0/2$ و (د) $t=0/6$

محور مبتنی بر فیزیک تمرکز شده است. بنابراین این روش مجموعه‌ای از مودها را همراه با یک مدل تکاملی خطی تولید می‌کند. این روش قدرتمند که داده محور می‌باشد، به عنوان روشی برای جداسازی اطلاعات مهم سیستم دینامیکی موردنظر (مانند جریان سیال) به منظور تعیین ساختارهای اصلی سازنده رفتار دینامیکی مساله معرفی شده است. در واقع این روش قادر به بررسی و تجزیه و تحلیل ساختار سیستم‌های پیچیده و غیرخطی بوده و امکان شناسایی نواحی از میدان با رفتارهای دینامیکی مختلف را دارد.

تجزیه مود دینامیکی به ابزاری پیشرو برای مدل‌سازی مبتنی بر داده‌های سیستم‌های دینامیکی تبدیل شده است. در ابتدا به مجموعه‌ای از داده‌ها یا همان ماتریس داده‌ها برای بکارگیری این روش نیاز است. به عبارتی، با توصیف کلی میدان‌های جریان گردآوری شده با نمونه‌گیری از شبیه‌سازی عددی مستقیم یا داده‌های تجربی شروع می‌شود. داده‌هایی که به صورت یک دنباله از میدان‌های لحظه‌ای جریان هستند، تحت عنوان بردار v_i مرتب خواهند شد. به طور معمول نمایه‌ها با گام زمانی ثابت نسبت به یکدیگر قرار دارند. بنابراین سیستم مورد مطالعه به صورت ماتریسی با M سطر و ϕ^t ستون طبق رابطه (9) مرتب خواهد شد [15].

$$V_1^N = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_N] \quad (9)$$

در رابطه فوق، v بردار بیانگر میدان جریان در لحظه t است. سپس در ماتریس‌های V_1^{N-1} و V_2^N به ترتیب آخرین نمایه و اولین نمایه از ماتریس داده‌های اصلی حذف می‌شوند:

$$V_1^{N-1} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}] \quad (10)$$

$$V_2^N = [v_2, v_3, v_4, \dots, v_N] \quad (11)$$

فرض بر این است که داده‌های ورودی از شبیه‌سازی عددی مستقیم به دست آمده باشند، باید ماتریس A برای تکامل معادلات حاصل شود. حال با استفاده از نگاشت خطی، بین ماتریس داده‌های لحظه‌ای اول، V_1^{N-1} و مجموعه دوم V_2^N رابطه زیر برقرار خواهد شد:

$$V_2^N = AV_1^{N-1} \quad (12)$$

$$a_i = \phi_{ij}^t v_{1j} \quad (19)$$

در رابطه فوق، ϕ^t شبه معکوس ماتریس مودهای دینامیکی است. به منظور بازسازی هر یک از نمایه‌های اولیه از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$V_k = \sum_i^M a_i \phi_i \mu_i^{k-1} \quad (20)$$

در رابطه فوق، k شمارنده زمانی، μ_i مقدار ویژه و V_k نمایه ثبت شده در زمان است. در روش استفاده شده در این پژوهش، برخلاف روش تجزیه متعامد بهینه، مودهای حاصل از ماتریس نمایه‌ها که برای توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته بکار می‌روند، دارای خاصیت تعامد نبوده و دارای ویژگی مستقل خطی نیز نیستند.

6. تصویرسازی معادله و توسعه مدل مبتنی بر فیزیک با استفاده از تجزیه مود دینامیکی

مدل‌سازی رتبه‌کاسته تکنیکی است که می‌تواند پیچیدگی محاسباتی یا نیاز ذخیره‌سازی رایانه‌ای را کاهش دهد. این کار با مدل‌های جایگزین مرتبه پایین‌تر می‌تواند تجزیه، تحلیل، کنترل و طراحی سیستم‌های پیچیده را ساده کند. به منظور توسعه مدل رتبه‌کاسته، کمیت حاکم بر دینامیک مساله به صورت حاصل جمع بخش متوسط‌گیری شده زمانی و یک بخش اغتشاشی نوشته می‌شود [20]:

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + u'(x, t) \quad (21)$$

بخش اغتشاشی بر اساس تقریب گالرکین به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$u'(x, t) = \sum_{i=1}^N a^i(t) \phi_i(x) \quad (22)$$

در این رابطه، ϕ_i پایه‌های دلخواه و a^i ضرایب زمانی هستند که باید مقادیر آنها به نحوی انتخاب شود تا معادله دیفرانسیل را با تقریب خوبی ارضا کنند. با جایگذاری روابط مربوط به بخش متوسط و اغتشاشی میدان لحظه‌ای در معادله برگزر، نتیجه زیر به دست می‌آید:

ماتریس نگاشت A ، ماتریسی فرضی است که شامل اطلاعات تکامل تدریجی سیستم بوده و در طول زمان ثابت می‌باشد. برای برقراری رابطه (12)، باید عبارت به ماتریس A متکی نباشد. اگر ماتریس غیرمربعی V_1^{N-1} با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین¹، تجزیه شود، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$V_1^{N-1} = U \Sigma W^T \quad (13)$$

در نتیجه:

$$V_2^N = A U \Sigma W^T \quad (14)$$

با ضرب U^T و $W \Sigma^T$ در طرفین معادله (14)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = U^T A U \Sigma W^T W \Sigma^{-1} = U^T V_2^N W \Sigma^{-1} \quad (15)$$

مقادیر ویژه ماتریس A و S با هم برابر بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S y_i = \mu_i y_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (16)$$

در این رابطه y_i ، بیانگر بردار ویژه و μ_i مقادیر ویژه ماتریس S هستند. بنابراین مودهای مکانی به دست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\phi_i = U y_i \quad (17)$$

$$A \phi_i = \mu_i \phi_i$$

مودهای دینامیکی (وابسته به زمان) با نگاشت لگاریتمی مقادیر ویژه طبق رابطه زیر به دست خواهند آمد:

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{dt} \quad (18)$$

برای پیش‌بینی رفتار سیستم در بلند مدت و بازسازی مجموعه نمایه‌های اولیه، با استفاده از محاسبه ضرایب زمانی و مودهای دینامیکی، یک بسط خطی تقریب زده می‌شود. این عمل با تصویرسازی هر یک از مودهای تجزیه مود دینامیکی در اولین نمایه طبق رابطه زیر انجام می‌شود.

¹ Singular Value Decomposition

در نهایت معادله مدل رتبه کاسته به صورت یک معادله دیفرانسیلی ساده مرتبه اول برای ضرایب مودال وابسته به زمان به دست خواهد آمد:

$$\frac{da^k(t)}{dt} = \tilde{A}_{kij} \times a^i(t) + \tilde{B}_{ki} \times a^i(t) + \tilde{C}_k \quad (26)$$

مدل حاصل به صورت سیستم دینامیکی بوده که برای محاسبه ضرایب مودال در زمان‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضرایب موجود در معادله (26) به صورت زیر محاسبه می‌شوند [16]:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{kij} &= A_{ij}^k \times \phi^{ad} \\ \tilde{B}_{ki} &= B_i^k \phi^{ad} \\ \tilde{C}_k &= B^k \phi^{ad} \end{aligned}$$

7. پایدارسازی مدل رتبه کاسته با بهره‌گیری از روش لزجت گردبده‌ای مصنوعی

مدل‌سازی رتبه کاسته سیستم‌های دینامیکی با فیزیک غیرخطی و نسبتاً پیچیده می‌تواند تحت تاثیر عوامل مختلفی منجر به کسب نتایج قابل قبول یا داده‌های غیرفیزیکی شود. در این حالت رفتار مدل می‌تواند در بازه زمانی کوتاه یا بلند به نتایج نادرستی سوق پیدا کند. این واگرایی از نتایج صحیح، تنها مخصوص مدل‌های مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی نبوده و در الگوهای رتبه کاسته حاصل از تجزیه متعامد بهینه نیز مشاهده می‌شود. پس می‌توان گفت سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی که از طرح گالرکین حاصل شده و برای مدل‌سازی رفتار سیستم با تغییر پارامترهای مهم حاکم بر مساله بکار می‌رود، می‌تواند ناپایدار باشد. زمانی که سیستم در گام‌های زمانی ابتدایی و با مقادیر عدد رینولدز پایین مدنظر باشد، نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته کاملاً بر هم منطبق بوده و پیش‌بینی درستی از رفتار مساله بدست می‌آید. یکی از دلایل این موضوع می‌تواند غالب‌تر شدن عبارت نفوذ در معادله و تاثیر افزایش اثر استهلاکی آن باشد. در توسعه مدل رتبه کاسته از رویکرد کاهش مرتبه سیستم دینامیکی مبتنی بر حذف اثر برخی مودها بهره برده

$$\begin{aligned} \phi_i(x) \times \sum_1^N \frac{d}{dt}(a^i(t)) - \bar{u} \times \sum_1^N a^i(t) \times \nabla \phi_i(x) \\ - \bar{u} \times \nabla \bar{u} \\ - \sum_1^N a^i(t) \times (\bar{u}, \nabla \phi_i(x)) \\ - \sum_{i=j=1}^N a^i(t) \times a^j(t) \\ \times (\phi_i(x), \nabla \phi_j(x)) \\ = \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 \bar{u} \right. \\ \left. + \sum_1^N a^i(t) \times \nabla^2 \phi_i(x) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

در روش تجزیه متعامد بهینه، مودها نسبت به یکدیگر دارای خاصیت تعامد هستند و در نهایت ضریب بخش گذرا با رابطه دلتای کرونگر ساده‌سازی می‌شود. اما در روش تجزیه مود دینامیکی، همانطور که پیش‌تر گفته شد، مودها الزاماً دارای ویژگی تعامد نبوده پس یک پایه الحاقی شبه متعامد لازم است تا در طرفین رابطه، ضرب ماتریسی شود. این پایه الحاقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi^{ad} = ((\phi_k^H(\vec{x}), \phi_i(\vec{x})))^{-1} \quad (24)$$

در رابطه فوق، ϕ_k^H مزدوج ترانهاد مودهای روش تجزیه مود دینامیکی است. با ضرب طرفین رابطه (23) در مزدوج ترانهاد مودهای تجزیه مود دینامیکی، معادله زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} (\phi_k^H(x), \phi_i(x)) \times \sum_1^N \frac{d}{dt}(a^i(t)) \\ - (\phi_k^H(x), \bar{u}, \nabla \phi_i(x) + \phi_i(x), \nabla \bar{u}) \\ \times a^i(t) - (\phi_k^H(x), \bar{u}, \nabla \bar{u}) \\ - (\phi_k(x), \phi_i(x), \nabla \phi_j(x)) \times a^i(t) \\ \times a^j(t) \\ = \frac{1}{Re} (\phi_k^H(x), \nabla^2 \bar{u}) \\ + \frac{1}{Re} (\phi_k^H(x), \nabla^2 \phi_i(x)) \times a^i(t) \end{aligned} \quad (25)$$

$$B_k^2 = \langle v_e \nabla^2 \bar{u}, \phi_k \rangle \quad (27)$$

$$B_{ki}^1 = \langle v_e \nabla^2 \phi_i, \phi_k \rangle$$

در این دو رابطه مقدار v_e نشان‌دهنده لزجت گردابه‌ای است. همان‌طور که در معادله (27) مشخص است یکی از آنها در عبارت ثابت مدل رتبه‌کاسته لحاظ شده و دیگری در ترم خطی مدل بکار می‌رود. مقدار دقیق پارامتر لزجت گردابه‌ای بر اساس نیاز مساله موردنظر و به منظور پایداری‌سازی مدل رتبه‌کاسته لحاظ می‌شو. این مقدار عمدتاً در مرتبه عکس عدد رینولدز در نظر گرفته می‌شود. هدف اصلی در این پژوهش ارائه یک طرح پایدار به ازای نمایه‌هایی (تصاویر لحظه‌ای) با مقدار عدد رینولدز ثابت به منظور شبیه‌سازی مساله با تغییر عدد رینولدز به کمک مدل رتبه‌کاسته جایگزین می‌باشد. بنابراین، طبق این تکنیک مقدار انرژی لازم برای پایداری و اصلاح سیستم تامین شده و مقادیر به دست آمده از مدل‌سازی در اعداد رینولدز بالا پاسخ مناسبی خواهند داشت. با بکار بردن عبارت‌های موجود در معادله (27)، مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده، مطابق معادله (26) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{da^k}{dt} = \bar{A}_{kij} \times a^i \times a^j + \bar{B}_{ki} \times a^i(t) + \bar{C}_k \quad (28)$$

$$\bar{B}_{ki} = \bar{B}_{ki} + B_{ki}^1$$

$$\bar{C}_k = \bar{C}_k + B_k^2$$

8. نتایج

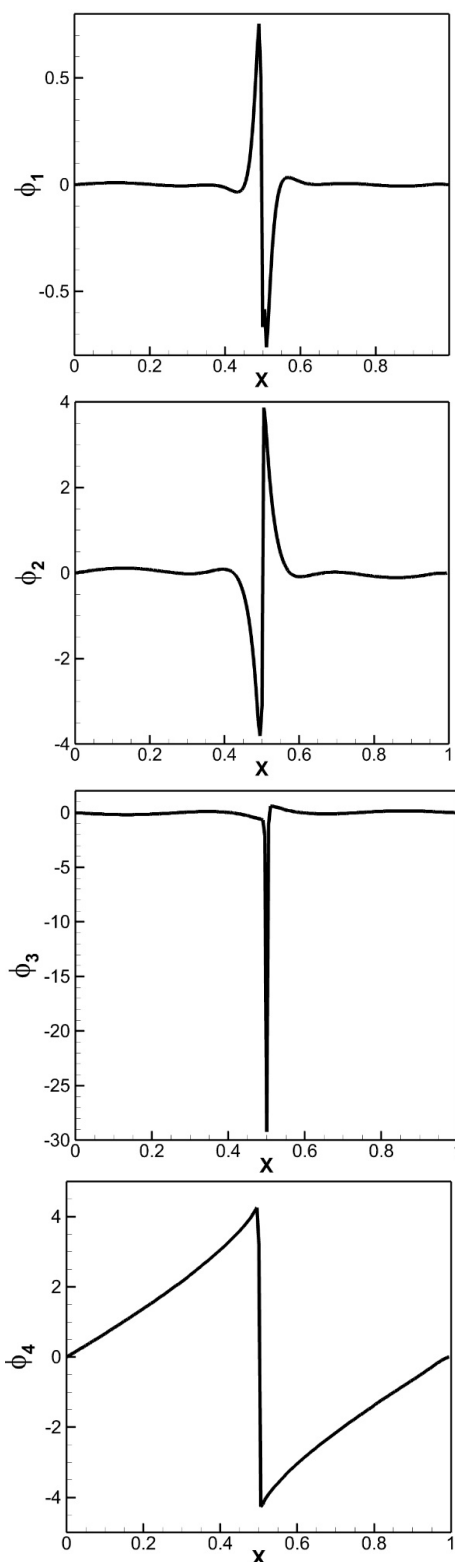
در این قسمت، نتایج حاصل شده از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل‌سازی رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی ارائه شده است. در بخش اول معادله برگرز ناپایا یک بعدی لزج تراکم ناپذیر با استفاده از شبیه‌سازی عددی مستقیم حل شده و سپس با استفاده از رویکرد تفسیر شده در قسمت‌های پیشین، مدل رتبه‌کاسته به دست آمده و جایگزین مدل اصلی می‌شود. بدین منظور از یک مجموعه داده‌های به دست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم، برای ورودی مدل رتبه‌کاسته استفاده شده است. در مطالعه حاضر برای حل عددی معادله برگرز از روش

شده‌است. برخی از این مودها می‌توانند مشابه ساختارهای ریز مقیاس در جریان‌های آشفته باشند که در جریان‌های محصور به دیواره متأثر از محدوده‌هایی تحت اثرات غالب لزجت و در نتیجه رفتارهای استهلاکی باشد. زمانی که این ساختارها از مدل حذف می‌شوند بخشی مهمی از فیزیک مساله از دست رفته و می‌تواند سبب تشدید ناپایداری در سیستم دینامیکی حاصل شود. یکی دیگر از علل ناپایداری در مساله مورد بررسی افزایش عدد رینولدز و تغییر رفتار مساله از شکل تحت تاثیر لزجت به فرم تحت تاثیر اینرسی می‌باشد. در نتیجه مدل رتبه‌کاسته حاصل به صورت ذاتی با افزایش عدد رینولدز، دچار کاهش رفتار استهلاکی شده و این می‌تواند سبب تشدید ناپایداری در مدل داده محور مبتنی بر فیزیک شود.

از آنجایی که اساس روش تجزیه مود دینامیکی یک روش داده محور می‌باشد، اگر داده‌های ورودی به صورت داده‌های آزمایشگاهی و با آزمایش بر روی یک سیستم واقعی اندازه‌گیری شده باشند، در اندازه‌گیری ممکن است مواردی چون خطای انسانی، عدم دقت و تمرکز وجود داشته و داده‌های حاصل به صورت دقیق بدست آورده نشود. در نتیجه مدل جایگزین که بر اساس این داده‌ها توسعه یافته، پایداری لازم برای پیش‌بینی رفتار سیستم دینامیکی مورد نظر را نداشته باشد. در این پژوهش برای اصلاح این ناپایداری و جبران استهلاک از دست رفته برای رسیدن مجدد رفتار سیستم به حالت پایدار، از یک عبارت لزجت گردابه‌ای مصنوعی² در مدل استفاده می‌شود. همچنین این عبارت می‌تواند به عنوان جایگزین اثر مودهای حذف‌شده در فرآیند کاهش مرتبه بکار رفته و مشابه رویکرد شبیه‌سازی جریان‌های آشفته برای مدل‌سازی ساختارهای متجانسی که سطح انرژی پایین‌تری دارند، استفاده شود. ضریب مورد نظر برای پایداری‌سازی مدل رتبه‌کاسته به ازای مقادیر متفاوت عدد رینولدز متغیر بوده اما به طور کلی در این پژوهش مقدار آن ثابت فرض شده‌است. ترم استهلاک مصنوعی که به مدل رتبه‌کاسته استاندارد اضافه می‌شود، به صورت رابطه زیر می‌باشد [16]:

² Artificial Eddy Viscosity

رتبه‌کاسته با بهره‌گیری از 10 مود بازسازی شده و انتگرال‌گیری به ازای 1000 گام زمانی با اندازه 0/001 انجام شده‌است.



شکل (2): توزیع چهار مود دینامیکی اول، دوم، سوم و چهارم حاصل از نمایه‌های حل معادله برگرز در عدد رینولدز 5000

شبیه‌سازی عددی مستقیم بهره برده شده و گام زمانی معادل 0/001 فرض شده است. این مقدار گام زمانی طبق مطالعه صورت گرفته منجر به ایجاد یک مدل عددی پایدار برای شبیه‌سازی با دقت بالا خواهد شد. حل عددی این معادله برای یک واحد زمانی و به ازای عدد رینولدز 5000 انجام شده است. شرایط مرزی و اولیه این مساله به شرح زیر می‌باشد:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x)$$

(29)

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

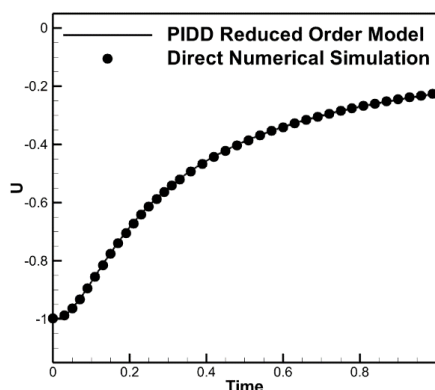
پس از حل عددی مستقیم معادله برگرز، ماتریس داده‌ها شامل 100 نمایه (عضو) با گام‌های زمانی مساوی و متوالی ایجاد و به عنوان داده‌های ورودی مدل رتبه‌کاسته در نظر گرفته شده‌است. پس از حل مساله مقادیر ویژه، مودهای حاصل از روش تجزیه مود دینامیکی محاسبه خواهند شد. در شکل (2) توزیع مودهای دینامیکی در عدد رینولدز 5000 آورده شده‌است. مودهای بدست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی نسبت به یکدیگر مستقل نمی‌باشند. به همین دلیل نمی‌توان انرژی مختص به هریک از مودهای مکانی را به طور جداگانه بیان کرد و در نتیجه ده مود استخراج شده، از لحاظ محتوای انرژی، تقدیمی نسبت به یکدیگر نداشته و با استفاده از ترکیب خطی این ده مود می‌توان میدان را بازسازی کرد.

1.8. انتگرال‌گیری از مدل رتبه‌کاسته در بازه زمانی کوتاه

به ازای عدد رینولدز ثابت

در این بخش نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته برای شرایطی که تمام داده‌های موجود در ماتریس نمایه‌ها برای آموزش مدل بکار می‌رود، ارائه شده است. لازم به ذکر است در این بخش عدد رینولدز داده‌های ورودی با عدد رینولدز میدان جریان یکسان است. به عبارتی دیگر عدد رینولدز تصاویر لحظه‌ای بکار گرفته شده به عنوان داده‌های ورودی ثابت مانده و میدان مورد نظر نیز در همین عدد رینولدز شبیه‌سازی خواهد شد. در این شرایط مدل رتبه‌کاسته با استفاده از 100 نمایه و برای بازه‌ای معادل یک واحد زمانی آموزش داده می‌شود. سپس مدل

را نشان می‌دهد. در این شکل پاسخ معادله برگرز برای اعداد رینولدز 1000، 2000 و 8000 نشان داده شده و مشاهده می‌شود، داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته در مقایسه با حل عددی مستقیم از دقت بالایی برخوردار می‌باشد.

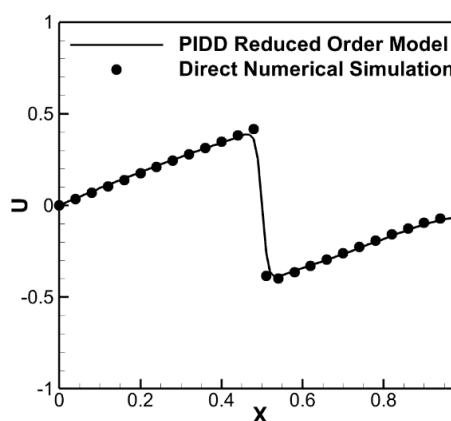


شکل (4): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده (مدل با تمام نمایه‌ها آموزش داده شده) به ازای عدد رینولدز 5000

3.8. انتگرال‌گیری از مدل رتبه‌کاسته برای بازه زمانی بلند به ازای عدد رینولدز ثابت

با توجه به دقت بالای بازسازی میدان در بازه زمانی کوتاه، پیش‌بینی مدل از وضعیت میدان در بازه زمانی بلند به ازای دسته نمایه ثابت در عدد رینولدز 5000 نیز مورد انتظار است. بدین منظور از دسته نمایه اصلی، 35 درصد نمایه‌ها انتخاب و دسته نمایه جدیدی ایجاد شده‌است. از این دسته نمایه‌های جدید به منظور آموزش مدل رتبه‌کاسته هم در فرم استاندارد و هم اصلاح شده استفاده شده‌است. بدین صورت خارج از محدوده زمانی دسته نمایه جدید، به منظور آزمایش دقت مدل رتبه‌کاسته در پیش‌بینی رفتار سیستم بکار گرفته شده‌است. واضح است این بازه زمانی در فرآیند آموزش مدل لحاظ نشده و به خوبی می‌تواند دقت مدل رتبه‌کاسته در پیش‌بینی داده‌های میدان مورد نظر را نشان دهد. به منظور بررسی عملکرد مدل رتبه‌کاسته استاندارد در پیش‌بینی دینامیک مساله مورد نظر، نتایج حاصل از آن بررسی شده‌است. بدین منظور تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در نقطه مشخص ($x=0.75$) حاصل از حل دقیق و مدل

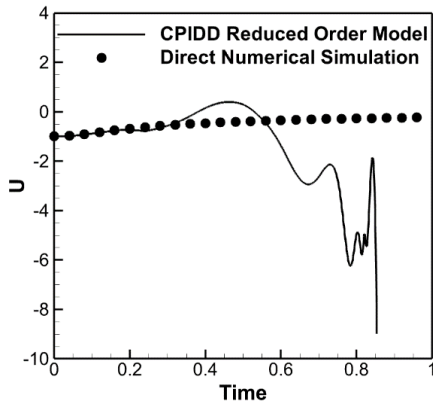
شکل (3) مقایسه پاسخ معادله برگرز در زمان $t=1$ حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم به ازای عدد رینولدز 5000 را نشان می‌دهد. تغییرات پاسخ مدل رتبه‌کاسته معادله برگرز در یک نقطه مشخص ($x=0.75$) با داده‌های حاصل از حل دقیق مقایسه شده و رفتار مدل در زمان‌های مختلف در شکل (4) نمایش داده شده است. نتایج بیانگر این است که دقت داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته در مقایسه با حل عددی مستقیم در زمان‌های مختلف قابل قبول می‌باشد.



شکل (3): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده، (مدل با تمام نمایه‌ها آموزش داده شده) به ازای عدد رینولدز 5000

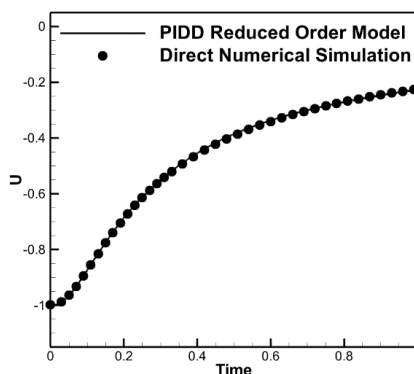
2.8. انتگرال‌گیری از مدل رتبه‌کاسته در بازه زمانی کوتاه با تغییرات عدد رینولدز

در این قسمت نیز مانند قسمت پیشین، نتایج به دست آمده از مدل رتبه‌کاسته برای شرایطی که تمام آرایه‌های ماتریس نمایه‌ها به صورت کامل برای آموزش مدل بکار می‌رود، ارائه شده‌است. بدین معنی که 100 نمایه برای مدل‌سازی به کار گرفته شده‌است. تفاوت این بخش با بخش قبلی در این است که عدد رینولدز تصاویر لحظه‌ای به کار گرفته شده به عنوان داده‌های اولیه ثابت و برابر با 5000 در نظر گرفته شده لیکن مدل رتبه‌کاسته به ازای اعداد رینولدز متفاوت حل شده‌است. شکل (5) مقایسه پاسخ معادله برگرز در زمان $t=1$ (آخرین گام زمانی) حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم



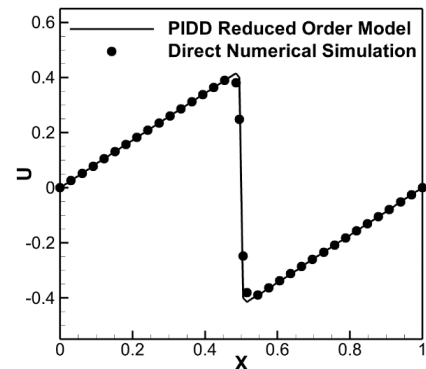
شکل (6): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0/75$ حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته استاندارد (اصلاح نشده)، (مدل با 35 درصد نمایه ها آموزش داده شده)، به ازای عدد رینولدز 5000

در شکل (7)، تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در موقعیت $(x=0/75)$ ، حاصل از حل دقیق و مدل رتبه کاسته اصلاح شده که با دسته نمایه ای مشابه حالت قبل آموزش داده شده، مقایسه شده اند. نتایج نشان می دهند دقت مدل رتبه کاسته اصلاح شده در پیش بینی رفتار دینامیکی مساله مورد نظر و در بازه زمانی بیش از محدوده ای که برای آموزش مدل رتبه کاسته بکار رفته است، قابل قبول می باشد. در شکل (8) مقایسه ای بین داده های حاصل از مدل رتبه کاسته اصلاح شده و داده های حل دقیق مطابق شرایط مدل بکار رفته در شکل (7)، انجام شده است. این مقایسه در زمان $t=1$ ، صورت گرفته و به خوبی دقت مدل رتبه کاسته اصلاح شده به ازای عدد رینولدز ثابت، 5000 در قیاس با داده های حل دقیق را نمایش می دهد.

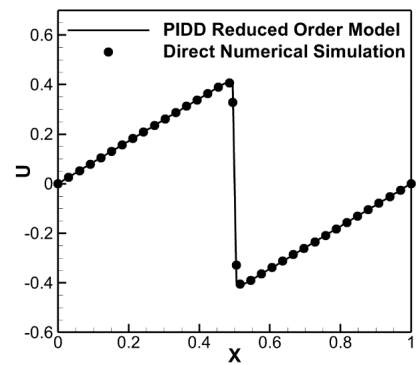


شکل (7): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0/75$ حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل با 35 درصد نمایه ها آموزش داده شده)، به ازای عدد رینولدز 5000

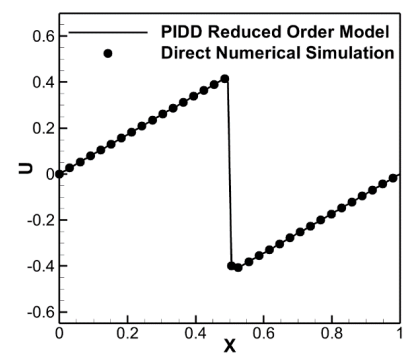
رتبه کاسته استاندارد، در قالب شکل (6) با هم مقایسه شده اند. در این مورد، دسته نمایه جدید شامل 35 درصد داده ها به ازای عدد رینولدز 5000 برای آموزش مدل بکار رفته است. همان طور که در شکل نشان داده شده دقت مدل رتبه کاسته در مقایسه با داده های حل عددی مستقیم مناسب نبوده و مدل توانسته دینامیک حاکم بر مساله را به خوبی پیش بینی کند.



(الف)

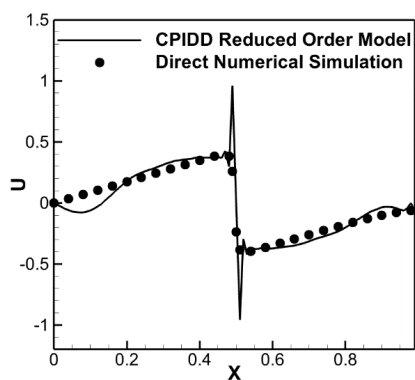


(ب)

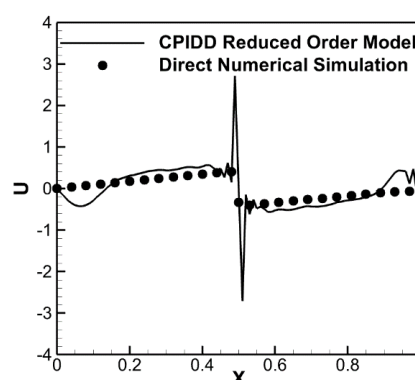


(ج)

شکل (5): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل با تمام نمایه ها آموزش داده شده) در اعداد رینولدز (الف) 1000، (ب) 2000 و (ج) 8000



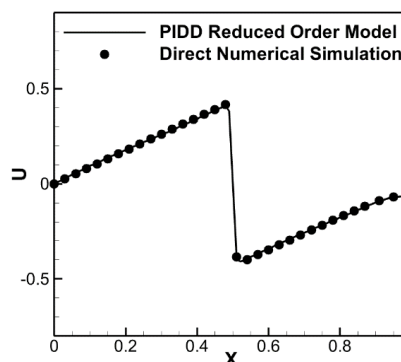
(الف)



(ب)

شکل (9): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته استاندارد، (مدل با 35 درصد نمایه‌ها آموزش داده شده) در اعداد رینولدز (الف) 1000 و (ب) 2000

در شکل (10) تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در موقعیت $(x=0/75)$ حاصل از حل دقیق و مدل رتبه کاسته استاندارد مقایسه و بررسی شده‌اند. در این شکل میدان مورد نظر در اعداد رینولدز 1000 و 2000 شبیه‌سازی و با داده‌های دقیق مقایسه شده است. نتایج حاصل بیانگر این است که به ازای اعداد رینولدز بالاتر دقت مدل کاهش یافته و دینامیک حاکم بر مساله به خوبی پیش‌بینی نشده است. در شکل (11) مقایسه‌ای بین داده‌های حاصل از مدل رتبه کاسته اصلاح‌شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم در بازه زمانی بلند انجام گرفته است. نتایج به ازای زمان $t=1$ انجام شده و واضح است که دقت مدل در پیش‌بینی داده‌های میدان مورد نظر خارج از بازه زمانی که برای آموزش مدل به کار رفته، مناسب می‌باشد. همچنین تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در موقعیت $(x=0/75)$ حاصل از حل دقیق و مدل رتبه کاسته اصلاح‌شده در شکل (12) نمایش داده شده است. لازم به ذکر است مدل رتبه کاسته به ازای عدد رینولدز

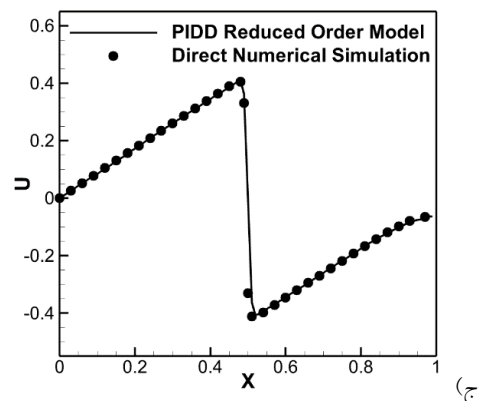
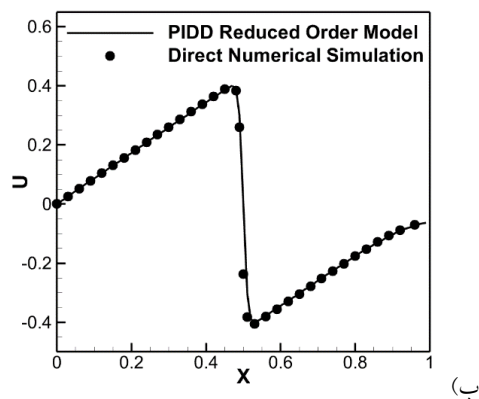
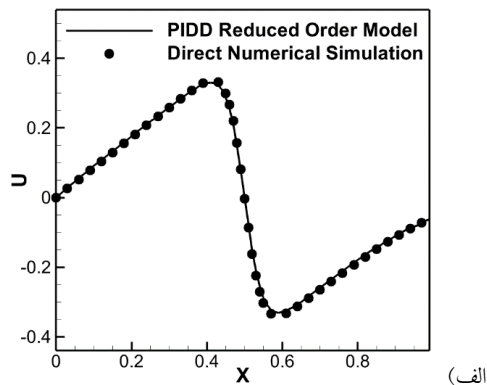


شکل (8): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح‌شده، (مدل با 35 درصد نمایه‌ها آموزش داده شده) در عدد رینولدز 5000

4.8. انتگرال‌گیری از مدل رتبه کاسته برای بازه زمانی بلند با تغییرات عدد رینولدز

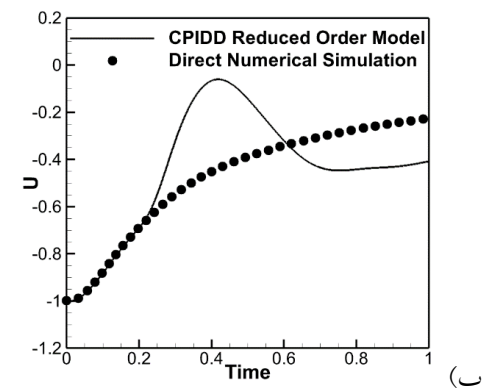
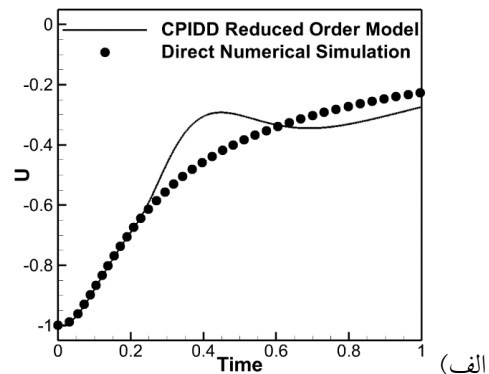
با توسعه مدل جایگزین برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی مساله مورد نظر و بررسی صحت عملکرد آن، انتظار می‌رود مدل حاصل بتواند به عنوان جایگزینی برای معادله حاکم اصلی در بازه‌های زمانی متغیر و به ازای تغییرات پارامتر مهمی چون عدد رینولدز به کار رود. در این بخش نیز همانند بخش قبلی مدل رتبه کاسته با 35 درصد نمایه‌ها آموزش داده شده است. داده‌های آموزش دهنده مدل رتبه کاسته در این قسمت نیز در عدد رینولدز 5000 تولید شده ولی مدل رتبه کاسته اصلاح‌شده حاصل در اعداد رینولدز مختلفی بکار گرفته شده تا توانایی آن در شبیه‌سازی مساله مورد نظر بررسی شود. در شکل (9) مقایسه‌ای بین داده‌های حاصل از مدل رتبه کاسته استاندارد و داده‌های حل دقیق، در حالتی که دسته نمایه مورد نظر با شرایطی مشابه بخش قبل بکار گرفته شده، ارائه شده است. این مقایسه برای آخرین گام زمانی در دسته نمایه اصلی معادل با زمان $t=1$ صورت گرفته است. همان‌طور که از نتایج نمایان است، در این شرایط که عدد رینولدز داده‌های اولیه 5000 و میدان جریان در اعداد رینولدز 1000 و 2000 می‌باشد، دقت مدل رتبه کاسته در مقایسه با داده‌های حل عددی مستقیم به ازای عدد رینولدز بالاتر و بازه زمانی بیشتر کاهش یافته و دینامیک حاکم بر مساله به خوبی پیش‌بینی نشده است.

متغیر مساله در راستای زمان، یک فرآیند استهلاکی ناشی از اثرات لزجت را نشان داده که این موضوع به کاهش بیشینه مقدار کمیت وابسته معادله برگرز منجر می‌شود. همچنین با بررسی رفتار پاسخ معادله برگرز در راستای مکان، اثرات جابجایی (اینرسی) به صورت ایجاد یک شبه موج ضربه‌ای و یک عدم پیوستگی ناشی از حرکت موج سینوسی در راستای مکانی دیده می‌شود.



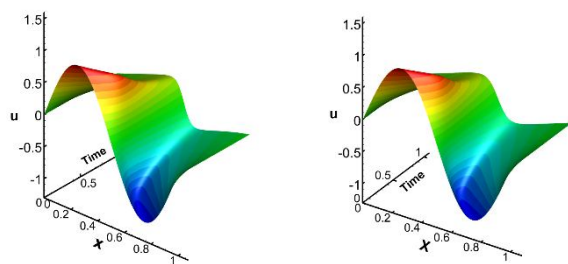
شکل (11): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، (مدل با 35 درصد آموزش داده شده) در اعداد رینولدز (الف) 100، (ب) 1000، (ج) 2000

5000 ایجاد و میدان موردنظر در اعداد رینولدز 100، 1000 و 2000 شبیه‌سازی شده است.

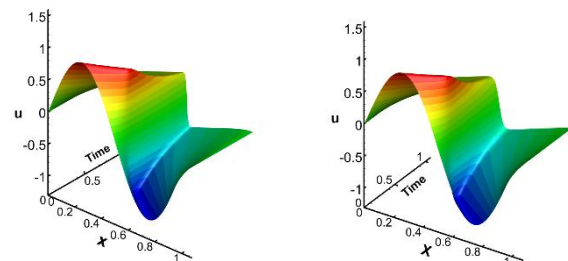


شکل (10): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد، (مدل با 35 درصد نمایه‌ها آموزش داده شده)، در اعداد رینولدز (الف) 1000 و (ب) 2000

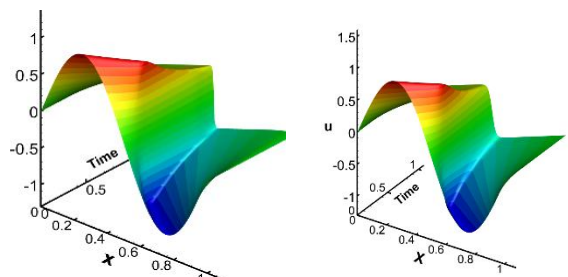
در شکل (13) تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در موقعیت حاصل از حل دقیق و مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده ($x=0.75$) در شرایطی که دسته نمایه‌ای با 80 عضو برای آموزش مدل بکار رفته، مقایسه شده است. در این مساله میدان موردنظر در عدد رینولدز 8000 با استفاده از مدل رتبه‌کاسته شبیه‌سازی شده است. نتایج دقت بالای مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده در پیش‌بینی رفتار دینامیکی مساله مورد نظر را اثبات می‌کند. برای درک بیشتر مساله و چگونگی عملکرد مدل رتبه‌کاسته، توزیع سه بعدی از پاسخ معادله برگرز در راستای مکان و زمان، مطابق با شکل (14)، نمایش داده شده است. در این تصاویر داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته آورده شده و به خوبی دقت مدل جایگزین در قیاس با داده‌های حل دقیق در راستای مکان و زمان مشاهده می‌شود. همانطور که واضح است رفتار



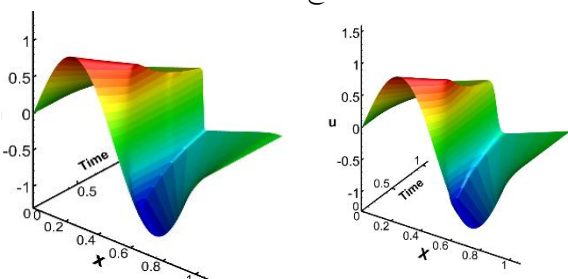
(الف)



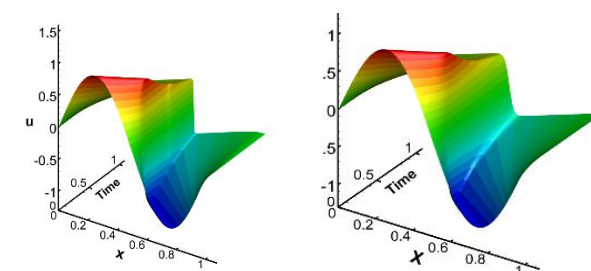
(ب)



(ج)

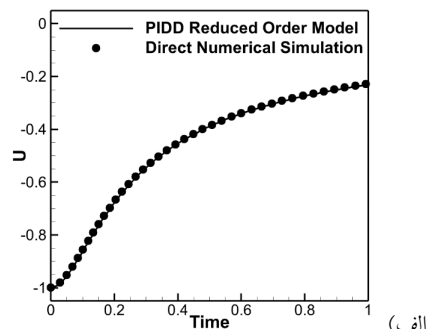


(د)

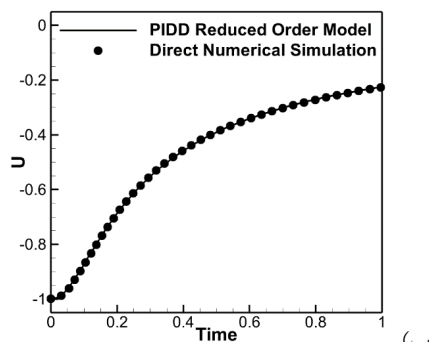


(و)

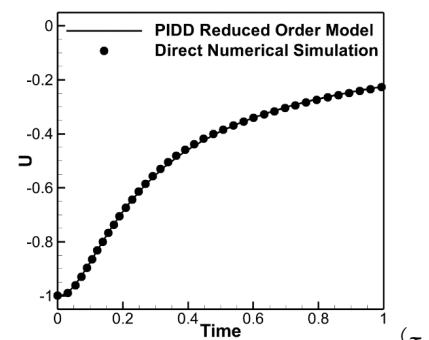
شکل (14): پاسخ معادله برگرز در راستای مکانی-زمانی حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم (ستون سمت چپ) و مدل رتبه کاسته اصلاح شده (ستون سمت راست) در اعداد رینولدز (الف) 100، (ب) 1000، (ج) 2000، (د) 5000 و (و) 8000



(الف)

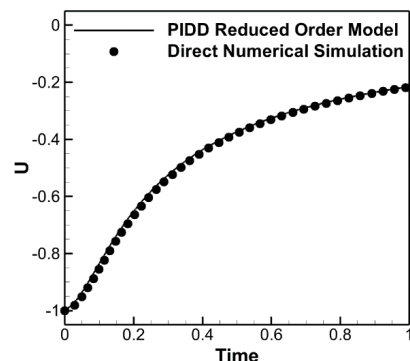


(ب)



(ج)

شکل (12): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل با 35 درصد نمایه‌ها آموزش داده شده)، در اعداد رینولدز (الف) 100، (ب) 1000 و (ج) 2000



شکل (13): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل به ازای 80 درصد نمایه‌ها آموزش داده شده)، در عدد رینولدز 8000

به منظور ارزیابی راندمان محاسباتی مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک در جدول (1) و (2) مقایسه‌ای بین زمان محاسبات هر بخش و زمان کل بین روش شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل جایگزین انجام شده است. همان‌طور که در جدول مشخص است هزینه محاسباتی این مدل در مقایسه با روش حل عددی مستقیم بسیار کمتر بوده و توانایی مدل در کاهش زمان محاسبات با وجود دقتی مشابه با مدل اصلی را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است داده‌های مندرج در جداول (1) و (2) توسط رایانه‌ای با پردازشگر intel(R) Core (TM) i7-6500U CPU @ 2.5 GHZ و حافظه 8.00 GB به دست آمده‌اند.

جدول (1): مقایسه زمان مورد نیاز برای شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک در بازه زمانی کوتاه

مدل	زمان (ثانیه)	زمان کل (ثانیه)
شبیه‌سازی عددی مستقیم	45	45
محاسبه مودهای دینامیکی	11	
محاسبه ضرایب معادله مدل رتبه کاسته	8	26
انتگرال‌گیری از مدل رتبه کاسته	7	

جدول (2): مقایسه زمان مورد نیاز برای شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک در بازه زمانی بلند

مدل	زمان (ثانیه)	زمان کل (ثانیه)
شبیه‌سازی عددی مستقیم	90	90
محاسبه مودهای دینامیکی	11	
محاسبه ضرایب معادله مدل رتبه کاسته	8	28
انتگرال‌گیری از مدل رتبه کاسته	9	

9. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی معادله برگرز لزج به یک مدل کاهش مرتبه‌یافته مبتنی بر داده و فیزیک تبدیل شده‌است. در ابتدا معادله حاکم برمساله با استفاده از روش شبیه‌سازی عددی مستقیم حل شده و سپس از نتایج حاصل به عنوان داده‌های اولیه استفاده شده‌است. داده‌های ورودی برای آموزش مدل رتبه‌کاسته، به ازای عدد رینولدز 5000 در نظر گرفته شده است. نتایج برای دو حالت ارزیابی شده: (1) حالتی که عدد رینولدز داده‌های ورودی با عدد رینولدز

بکار رفته در مدل رتبه‌کاسته یکسان باشد و (2) حالتی که عدد رینولدز بکار رفته برای آموزش مدل با عدد رینولدز مورد استفاده در شبیه‌سازی به کمک مدل رتبه‌کاسته متفاوت باشد. چندین عامل در ناپایداری یک مدل رتبه‌کاسته موثر می‌باشد. یکی از این عوامل ناپایداری، تغییر کمیت مهمی چون عدد رینولدز می‌باشد. با افزایش عدد رینولدز تا مقادیر 1000، 2000، 5000 و در نهایت 8000 و به دنبال آن کاهش استهلاک مورد نیاز، مشابه با شرایط جریان آشفته، تاثیر ترم لزج موجود در معادله کاهش یافته و این رفتار در مدل رتبه‌کاسته تشدید می‌شود. در نهایت پاسخ‌های مدل رتبه‌کاسته ناپایدار شده و در نهایت منجر به واگرایی جواب‌ها خواهد شد که این واگرایی با گذر زمان بیشتر می‌شود. از دیگر عوامل ناپایداری به حذف مودها و عدم دقت در داده‌های ورودی نیز می‌توان اشاره کرد. بدین منظور برای پایداری مدل رتبه‌کاسته و جبران استهلاک از دست رفته، یک ترم اتلاف مصنوعی تحت عنوان لزجت گردابه‌ای مبتنی بر مفاهیم مدل‌سازی جریان آشفته به ترم لزج موجود در معادله اضافه شده‌است. به طور کل دستاوردهای این پژوهش را در قالب موارد زیر می‌توان بیان کرد:

- (1) توسعه یک مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک برای مسائل جابجایی - نفوذ
- (2) پیش‌بینی رفتار سیستم در بازه‌های زمانی کوتاه و بلند با استفاده از حجم محدود داده‌های موردنیاز برای آموزش مدل
- (3) پایداری مدل رتبه‌کاسته به منظور بهبود پیش‌بینی آن در به ویژه در اعداد رینولدز بالا
- (4) استفاده از داده‌های محدود به مقدار (مقادیر) مشخص از پارامتر تاثیرگذار مساله و پیش‌بینی رفتار سیستم به ازای تغییر مقدار این پارامتر، به نحوی که مدل حاصل می‌تواند به نوعی مدل وابسته به زمان و پارامتریک نیز محسوب شود.
- (5) دستیابی به داده‌هایی با دقت بالا حاصل از پیش‌بینی مدل از رفتار سیستم به ازای تغییر پارامتر مهم عدد رینولدز و در بازه‌های زمانی بلند.

زیرنویس	
شرح	زیرنویس
شماره مکانی	i
شمارنده زمانی	k
فهرست اختصارات	
شرح	اختصار
تجزیه مقادیر تکین	SVD
رانگ کوتاه با دقت مرتبه چهارم	RK4
مدل رتبه کاسته	ROM
تجزیه متعامد بهینه	POD
تجزیه مود دینامیکی	DMD

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافعی ندارند.

فهرست علائم	
علامت	شرح
U	میدان لحظه‌ای
$\bar{u}$	مقدار متوسط
u'	مقدار اغتشاشی
a^i	ضرایب سیستم دینامیکی
N	تعداد کل نمایه‌ها
M	تعداد نقاط مکانی
W	ماتریس بردارهای تکین سمت چپ
Σ	ماتریس مقادیر تکین
A	ماتریس نگاشت
S	ماتریس متشابه
μ_i	مقدار ویژه ماتریس نگاشت
y_i	بردار ویژه ماتریس نگاشت
Re	عدد رینولدز
v_e	مقدار لزجت گردابه‌ای
علائم یونانی	
علامت	شرح
ϕ	مودهای مکانی
ϕ^{ad}	پایه‌های الحاقی مودهای دینامیکی

مراجع

- [1] Y. Bang, H.S. Abdel-Khalik, and J.M. Hite, "Hybrid reduced order modeling applied to nonlinear models," Int. J. Numer. Meth. Eng., vol. 91, no. 9, pp. 929-949, 2012, doi: 10.1002/nme.4298.
- [2] S. Afzali, M.K. Moayyedi, and F. Fotouhi, "Development of an equation-free reduced-order model based on different feature extraction patterns on the two-dimensional steady-state heat transfer dataset," Soft Comput. J., vol. 10, no. 1, pp. 16-31, 2021, doi: 10.22052/scj.2021.242830.0 [In Persian].
- [3] Y.C. Liang, H.P. Lee, S.P. Lim, W.Z. Lin, K.H. Lee, and C.G. Wu, "Proper orthogonal decomposition and its applications-Part I: Theory," J. Sound Vib., vol. 252, pp. 527-544, 2002, doi: 10.1006/jsvi.2001.4041.
- [4] J.E. Higham, M. Shahnaim, and A. Vaidheeswaran, "Using a proper orthogonal decomposition to elucidate features in granular flows," Granul. Matter, vol. 22, pp. 1-13, 2020, doi: 10.1007/s10035-020-01037-7.
- [5] M.K. Moayyedi and F. Sabaghzadeghan, "Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition," Amirkabir J. Mech. Eng., vol. 53, no. 7, pp. 4241-4241, 2021, doi: 10.22060/mej.2020.16939.6483 [In Persian].
- [6] W.S. Edwards, S. Laurette, S. Tuckerman, R.A. Friesner, and D.C. Sorensen, "Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations," J. Comput. Phys., vol. 110, no. 1, pp. 82-102, 1994.
- [7] R.B. Lehoucq and J.A. Scott, "Implicitly restarted Arnoldi methods and subspace iteration," SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 23, no. 2, pp. 551-562, 1997.
- [8] P.J. Schmid, "Dynamic mode decomposition of

- numerical and experimental data," *J. Fluid Mech.*, vol. 656, pp. 5-28, 2010, doi: 10.1017/s0022112010001217.
- [9] P.J. Schmid, "Dynamic Mode Decomposition and Its Variants," *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 54, pp. 225-254, 2022, doi: 10.1146/annurev-fluid-030121-015835.
- [10] S.E. Ahmed, P.H. Dabaghian, O. San, D.A. Bistrrian, and I.M. Novan, "Dynamic mode decomposition with core sketch," *Phys. Fluids*, vol. 34, no. 6, p. 066603, 2022, doi: 10.1063/5.0095163.
- [11] T. Krake, D. Klotzl, D. Eberhardt, and D. Weiskopf, "Constrained Dynamic Mode Decomposition," *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.*, vol. 29, no. 1, pp. 182-192, 2022, doi: 10.1109/TVCG.2022.3209437.
- [12] P.J. Baddoo, B. Hermann, B.J. Mckeen, J.N. Kutz, and S.L. Brunton, "Physics-informed dynamic mode decomposition," *Proc. Royal Soc. A*, vol. 479, no. 2271, 2023, doi: 10.1098/rspa.2022.0576.
- [13] C. Hu et al., "Numerical investigation of centrifugal compressor stall with compressed dynamic mode decomposition," *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 106, p. 106153, 2020, doi: 10.1016/j.ast.2020.106153.
- [14] C. Sun, T. Tian, X. Zu, O. Hua, and Z. Du, "Investigation of the near wake of a horizontal-axis wind turbine model by dynamic mode decomposition," *Energy*, vol. 227, p. 120418, 2021, doi: 10.1016/j.energy.2021.120418.
- [15] M.K. Moayyedi, F. Bigdeloo, and F. Sabaghzadeghan, "Stabilization of Reduced Order Model for Convection-Diffusion Problems Based on Dynamic Mode Decomposition at High Reynolds Numbers Using Eddy Viscosity Approach," *Amirkabir J. Mech. Eng.*, vol. 54, no. 11, pp. 2479-2498, 2023, doi: 10.22060/MEJ.2022.20801.732 [In Persian].
- [16] M.K. Moayyedi, Z. Khakzari, and F. Sabaghzadeghan, "Study of the Effect of Eddy Viscosity Closure in Calibration of the DMD Based Reduced-order Model to Predict the Long-Term Behavior of Convection-Diffusion Equations," *Fluid Mech. Aerodyn.*, vol. 11, no. 1, pp. 83-96, 2022, doi: 10.1001.1.23223278.1401.11.1.6.8 [In Persian].
- [17] F. Sabaghzadeghan, "Development of the Reduced Order Model for Convection-Diffusion and Diffusion Problems Based on Proper Orthogonal Decomposition and Dynamic Mode Decomposition," M.S. thesis, Dept. Mech. Eng., Univ. Qom, Qom, Iran, 2019 [In Persian].
- [18] Z.F. Tian and P.X. Yu, "A high-order exponential scheme for solving 1D unsteady convection-diffusion equations," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 235, pp. 2477-2491, 2011, doi: 10.1016/j.cam.2010.11.001.
- [19] C.W. Rowley, I. Mezic, S. Bagheri, P. Schlatter, and D.S. Henningson, "Spectral analysis of nonlinear flows," *J. Fluid Mech.*, vol. 641, pp. 115-127, 2009, doi: 10.1017/s0022112009992059.
- [20] F. Sabaghzadeghan and M.K. Moayyedi, "Reduced Order Model of Conduction Heat Transfer in a Solid Plate Based on Dynamic Mode Decomposition," *Sharif J. Mech. Eng.*, vol. 37, no. 2, pp. 3-12, 2021, doi: 10.24200/j40.2021.55926.1555 [In Persian].