

مدل رتبه کاسته داده محور و مبتنی بر فیزیک برای معادله نفوذ-

جابجایی با بهره‌گیری از روش تجزیه مود دینامیکی

محمد کاظم مویدی^{۱*}، دانشیار بخش مهندسی مکانیک، سیده زهره خاکزاری^۲، دانشجوی کارشناسی ارشد

^۱ مرکز مطالعات هوافضا، دانشگاه قم

^۲ آزمایشگاه پژوهشی اتمسفر زمین و علوم فضایی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم

چکیده: در تحلیل‌های عددی مسائل مکانیک سیالات، به ویژه در شبیه‌سازی مستقیم، کاهش هزینه‌های محاسباتی همواره از اهمیت بالایی برخوردار بوده است. استفاده از مدل‌های رتبه کاسته، که با کاستن از قیود مدل به سرعت آن افزوده خواهد شد، جایگزین مناسبی برای مدل‌های اصلی به ویژه در مسائل پیچیده می‌باشد. در این پژوهش با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی و با بهره‌گیری از مفاهیم پایه‌ای سیستم‌های دینامیکی، معادله حاکم به فرم یک مدل رتبه کاسته تبدیل شده است. نتایج نشان می‌دهند در صورت افزایش عدد رینولدز و کاهش اثرات ناشی از ترم لزج موجود در معادله حاکم، استهلاک لازم در سیستم دینامیکی برای پایداریسازی حل عددی کاهش می‌یابد. همچنین به دلیل کامل نبودن فضای مودال مفروض و حذف اثر مودها، این ناپایداری بیش‌تر نمایان خواهد شد. بنابراین با استفاده از یک ترم اتلاف مصنوعی مبتنی بر لزجت گردابه‌ای سعی شده ناپایداری سیستم افزایش پیدا کند. مدل رتبه کاسته اصلاح شده با دسته نمایه‌ای حاصل از یک مقدار عدد رینولدز مشخص ایجاد و برای مدل‌سازی مسئله موردنظر به ازای اعداد رینولدز مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. مقایسه نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته با شبیه‌سازی‌های حاصل از حل دقیق، توانایی و دقت بالای مدل رتبه کاسته، برای پیش‌بینی دینامیک میدان را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: روش تجزیه مود دینامیکی، مدل رتبه کاسته، الگوی لزجت گردابه‌ای، عدد رینولدز، مدل جایگزین

Physics-Informed Data-driven Reduced Order Model of the Convection-Diffusion Equation Using Dynamic Mode Decomposition

Mohammad Kazem Moayyedi ^{1,2*}, Associate Professor, Zohreh Khakzari ^{1,2}, M.Sc. Student

¹ Institute of Aerospace Studies, University of Qom

² Earth Atmosphere and Space Sciences Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering, University of Qom

Abstract: In the numerical analysis of fluid mechanics problems, especially in high resolution simulation, the reduction of computational costs has always been of great importance. The use of reduced-order models, which will increase the speed of computation by reducing the constraints of the original model, is a suitable surrogate model for the original governing equation. In this research, using dynamic mode decomposition and based on principles of dynamical systems, the governing equation has been converted to a reduced order model. The results show if the Reynolds number increases and the effects of the viscous term in the governing equation are reduced, the necessary dissipation in the representative model to stabilize the numerical solution is decreased. Also, due to the incompleteness of the modal space and removing the effects of some modes, the instability will be enhanced. Therefore, by using an artificial dissipation term based on eddy viscosity concept, an attempt has been made to increase the stability of the reduced order model. A stabilized reduced-order model, which is learned using a snapshots ensemble obtained for a specified Reynolds number, is used to simulate the problem for different Reynolds numbers. Comparison between the results obtained by reduced-order model with the exact solution shows the ability and high accuracy of the model to predict the problem dynamics.

Keywords: *Dynamic Mode Decomposition, Reduced Order Model, Eddy Viscosity Approach, Reynolds number, Surrogate model*

* moayyedi@qom.ac.ir

۱. مقدمه

به طور کلی گسسته‌سازی میدان جریان در مسائل مربوط به مکانیک سیالات و انتقال حرارت به منظور شبیه‌سازی دینامیک حاکم بر سیستم، منجر به دستگام معادلات بسیار حجیمی خواهد شد. همچنین ساختارهای موجود در این میدان‌ها (مانند میدان نفوذ حرارتی، میدان نفوذ-جابجایی و...) دارای نوسانات وابسته به زمان و مکان می‌باشند، در نتیجه با گذر زمان تغییرات تصادفی و رفتارهای اتفاقی مانع از بررسی کامل حرکت همه ذرات سیال و تعیین مقادیر صریح متغیرهای جریانی در میدان خواهند شد. به همین علت پژوهشگران حوزه دینامیک سیالات برای بررسی و تجزیه و تحلیل این دسته از مسائل، به شبیه‌سازی و تحلیل عددی این پدیده‌ها روی آوردند. وابستگی الگوهای عددی به سخت‌افزارهای کامپیوتری به منظور افزایش تعداد گره‌های محاسباتی، از مهمترین و قابل‌تامل‌ترین ویژگی آنها می‌باشد. این امر باعث افزایش پیچیدگی‌ها، حجم و زمان محاسبات و در نتیجه افزایش هزینه‌های محاسباتی می‌گردد. در دهه‌های اخیر بدست آوردن یک روش محاسباتی سریع و دقیق، همواره یکی از دغدغه‌های پژوهشگران در حوزه دینامیک سیالات محاسباتی بوده‌است. بنابراین، دستیابی به روشی که قادر باشد با حفظ دقت، کیفیت و ویژگی‌های مدل اصلی، پیچیدگی‌های آن را کاهش و سپس شبیه‌سازی نماید، بسیار ضروری به نظر می‌رسد. این مشکلات باعث شده تا در تحقیق حاضر برای کاهش هزینه‌های محاسباتی به توسعه یک الگو رتبه‌کاسته^۱ پرداخته شود. این الگو یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای کاهش پیچیدگی‌های مدل اصلی به‌شمار می‌رود. بانگ و همکاران مدل‌های غیر خطی و پیچیده که اغلب در طراحی و تحلیل سیستم‌های واقعی بکار می‌روند را توسط روش

رتبه‌کاسته توسعه دادند [۱]. افضل‌ی و همکاران توانستند حجم محاسبات مدل‌سازی نسبت به مدل مبتنی بر شبکه عصبی متشکل از لایه‌های کانولوشنی را با استفاده مدل کاهش دهند هم‌چنین سرعت مدل‌سازی و دقت نتایج خروجی را نیز به مقدار قابل توجهی افزایش دهند [۲]. روشی که بیشتر از سایر روش‌ها توسط پژوهشگران این حوزه برای بررسی رفتار سیالات مورد استفاده واقع شده‌است، روش تجزیه متعامد بهینه است. این روش یکی از پرکاربردترین الگوها برای کاهش مرتبه معادلات حاکم بر جریان سیال به‌شمار می‌رود [۳]. هیگام و همکاران از روش تجزیه متعامد بهینه برای تحلیل جریان سیال رئولوژیک در یک بستر سیال که در آن مقدار دبی حجم به صورت یک تابع پالسی تغییر می‌کند، استفاده کرده‌اند. آنها توانستند علاوه بر شناسایی ساختارهای منسجم مکانی میدان، میزان تغییرات انرژی جنبشی میدان را برحسب مکان و زمان توصیف کنند [۴]. مویدی و همکاران از مدل رتبه‌کاسته پارامتری و وابسته به زمان مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه برای شبیه‌سازی مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی استفاده کردند [۵]. از آنجا که بررسی ساختارهای میدان در روش تجزیه متعامد بهینه صرفاً براساس محتوای انرژی هریک از ساختارها بوده و این روش، سیستم را از نظر رفتار دینامیکی مورد ارزیابی قرار نمی‌دهد، لذا مدل رتبه‌کاسته حاصل، در بلند مدت قادر به پیش‌بینی رفتار سیستم با دقت بالا نخواهد بود. به همین دلیل در سال‌های اخیر پژوهشگران با مطالعه فیزیک میدان‌های جریان و تعمیم روش آرنولد موفق به توسعه روشی قدرتمند در راستای تجزیه و تحلیل دینامیک سیستم‌های غیر خطی شدند [۶]، [۷]. این روش صرفاً مبتنی بر دسته نمایه‌های ثبت شده حاصل از حل عددی دقیق یا نتایج آزمایشگاهی بوده و قابلیت شناسایی آن دسته از

² Proper Orthogonal Decomposition

¹ Reduce Order Model

با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی پرداختند [۱۳]. سان و همکاران یک جریان ناپایدار بر روی یک توربین بادی دو پره را با استفاده از شبیه‌سازی گردابه‌ای از روش تجزیه مود دینامیکی مورد بررسی قرار دادند [۱۴]. مویدی و همکاران ناپایداری مدل رتبه‌کاسته معادله نفوذ-جابجایی مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز بالا را با بهره‌گیری از رویکرد لزجت گردابه‌ای اصلاح کردند [۱۵]. در پژوهشی دیگر، مویدی و همکاران تاثیر رویکرد لزجت گردابه‌ای در اصلاح مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی، برای پیش‌بینی رفتار بلند مدت معادلات نفوذ-جابجایی را بررسی کردند. نتایج نشان‌دهنده دقت و سرعت بالای الگوی رتبه‌کاسته برای مدل‌سازی معادلات نفوذ-جابجایی بود [۱۶].

در این پژوهش، دو الگو برای حل مسئله به کار گرفته شده‌است. در الگوی اول، شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله نفوذ-جابجایی انجام گرفته و در مرحله بعد به توسعه یک مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک و با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی پرداخته شده‌است. یکی از چالش‌های مهم در توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته ناپایداری آن‌ها تحت تاثیر عوامل فیزیکی است. یکی از این عوامل فیزیکی تغییر پارامتر مهمی چون عدد رینولدز به خصوص در مقادیر بالا می‌باشد. دلیل این موضوع کاهش اثرات استهلاکی ناشی از کوچک شدن سهم ترم لزج در معادله می‌باشد. این موضوع کاهش پایداری پاسخ سیستم دینامیکی حاکم بر مسئله را به دنبال داشته و سبب می‌شود رفتار سیستم به سمت واگرایی پیش رود. ناپایداری سیستم دینامیکی، با بهره‌گیری از مفهوم اتلاف مصنوعی مبتنی بر رویکرد لزجت گردابه‌ای اصلاح شده‌است. در این مسئله، داده‌های ورودی برای آموزش مدل رتبه‌کاسته به ازای یک مقدار مشخص عدد رینولدز لحاظ شده و سپس مدل حاصل برای شبیه‌سازی مسئله در اعداد رینولدز مختلف به کار گرفته شده‌است. تحقیق انجام شده منجر

نواحی میدان که در آن عوامل مختلف اثرگذار بوده و رفتارهای دینامیکی پیچیده‌ای اتفاق می‌افتد، را دارد. این الگو ابتدا با هدف استخراج اطلاعات دینامیکی میدان جریان معرفی شد [۸]. اشמיד در سال ۲۰۲۲ در پژوهشی به بررسی تجزیه مود دینامیکی^۱ استاندارد شامل تشریح الگوریتم اصلی مدل، به عنوان یک روش برای تجزیه ماتریس داده‌ها، همراه با یک روش بهینه‌سازی مناسب برای استخراج ضرایب مودال پرداخت. همچنین به بررسی سه مسئله که انعطاف‌پذیری تجزیه مود دینامیکی را به عنوان یک ابزار تحلیل برای پیکربندی‌های جریان ساده تا پیچیده نشان می‌دهد، پرداخت [۹]. شادی و همکاران یک چارچوب جدید از روش تجزیه مود دینامیکی ارائه کردند که مبتنی بر گرفتن دامنه و دامنه داده‌های ورودی است. این الگوریتم اطلاعات تازه‌ای در مورد مقادیر ویژه سیستم ارائه داده و در نهایت منجر به تقریب بهبود یافته طیف تجزیه مود دینامیکی می‌شود. به علاوه، این فرم از روش تجزیه مود دینامیکی شامل پارامترهایی است که می‌توانند بر اساس محدودیت‌های حافظه، تنظیم شوند [۱۰]. کرک و همکاران از ترکیب محدودیت‌های مبتنی بر فرکانس در تجزیه مود دینامیکی برای بدست آوردن یک تجزیه تطبیقی استفاده کردند. این منجر به توسعه روش تجزیه مود دینامیکی مقید می‌شود که مستقیماً به حل مشکل ارتباط با ویژگی‌های اصلی سیستم می‌انجامد [۱۱]. بادو و همکاران چگونگی ادغام اصول فیزیکی با تجزیه مود دینامیکی را نشان دادند. آنها توانستند با تمرکز بر روی پنج قانون اصلی بقای فیزیکی، الگوریتم‌های کارآمد برای بهینه‌سازی‌های تجزیه مود دینامیکی مبتنی بر فیزیک^۲ مربوطه را استخراج کنند [۱۲]. هو و همکاران نیز به بررسی جریان یک کمپرسور گریز از مرکز

¹ Dynamic Modes Decomposition

² Physics-informed DMD (piDMD)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u \quad (۳)$$

به نحوی که:

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (۴)$$

۳. روش حل عددی مستقیم

برای بدست آوردن نمایه‌ها، از داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم معادله برگرز لزج استفاده شده‌است. بدین منظور برای محاسبه ترم غیرخطی از روش بالادست مرتبه اول:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} u_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} & \text{if } (u_i > 0) \\ u_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} & \text{if } (u_i < 0) \end{cases} \quad (۵)$$

و برای ترم خطی نفوذ از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم استفاده شده‌است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (۶)$$

همچنین برای انتگرال‌گیری زمانی نیز از روش رانگ-کوتا با دقت مرتبه چهارم استفاده شده‌است [۱۷].

۴. صحت سنجی حل عددی مستقیم

در این بخش به منظور صحت سنجی نتایج بدست آمده از حل عددی معادله برگرز لزج و یک‌بعدی، به مقایسه این نتایج با داده‌های حاصل از حل دقیق پرداخته شده‌است. بدین منظور از معادله حاصل از حل دقیق معادله برگرز نمایش داده شده در مرجع [۱۸] استفاده شده‌است:

$$u(x, t) = \frac{4\pi}{\text{Re}} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\frac{n^2 2\pi^2 t}{\text{Re}}) I_n \frac{\text{Re}}{2\pi} n \sin n\pi x}{I_0 \frac{\text{Re}}{2\pi} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\frac{n^2 2\pi^2 t}{\text{Re}}) I_n \frac{\text{Re}}{2\pi} \cos n\pi x} \quad (۷)$$

همچنین در پژوهش حاضر برای حل دقیق معادله برگرز لزج به ترتیب از شرط اولیه و شرایط مرزی به صورت زیر استفاده شده‌است:

به توسعه مدلی می‌شود که می‌تواند به عنوان جایگزینی مدل اصلی باشد. با استفاده از این مدل، می‌توان داده‌ها را برای زمان محدود در نظر گرفت و به کمک مدل رتبه‌کاسته جایگزین با هزینه محاسباتی بسیار کمتر، رفتار سیستم را در بازه‌های زمانی بلند پیش‌بینی کرد. همچنین در تحقیق حاضر به معرفی رویکردی پرداخته شده که به کمک آن بتوان پارامترهای اثر گذار در مسئله را تغییر داد و مدل بدون استفاده از داده‌های ورودی جدید، بتواند رفتار سیستم را در شرایط جدید پیش‌بینی کند. این الگو می‌تواند به عنوان مبنایی برای حل مسائل پیچیده‌تر به کمک مدل‌هایی مشابه الگوی مطرح شده در این پژوهش باشد. از جمله مسائلی که حجم محاسبات در مکان-زمان قابل توجه بوده و لذا می‌تواند کارآیی محاسباتی مدل‌های مربوط به این مسائل را دچار چالش‌های جدی کند. زیرا با کاهش حجم و هزینه‌های محاسباتی، افزایش سرعت حاصل می‌شود. از جمله این مسائل می‌توان به جریان‌های اقیانوسی و اتمسفری و آشفتگی جریان سیال اشاره کرد.

۲. معادله حاکم

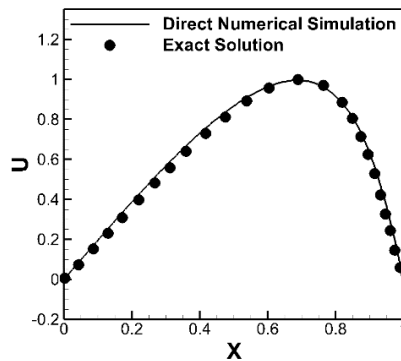
معادله برگرز یک معادله دیفرانسیل جزئی بوده که با حذف عبارت فشار در معادله ناویر-استوکس برای اجتناب از پیچیدگی‌های ناشی از کوپلینگ میدان سرعت و فشار بدست می‌آید. معادله برگرز معمولاً بدون نظر گرفتن جمله نیروهای حجمی بیان می‌شود. شکل غیر بقایبی معادله برگرز لزج غیر خطی و یک بعدی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (۱)$$

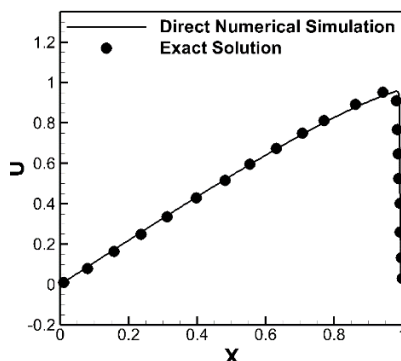
فرم بی بعد معادله (۱) با در نظر گرفتن پارامترهای بی بعد زیر بدست می‌آید:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L} \quad (۲)$$

که برای سهولت در نوشتار از علامت ستاره صرف نظر می‌شود:



(ج)



(د)

شکل (۱): مقایسه نتایج حاصل از حل دقیق و حل عددی معادله برگرز در عدد رینولدز ۱۰۰۰ و در زمان‌های (الف) $t=0.2$ (ب) $t=0.6$ و عدد رینولدز ۱۰۰۰۰ به ازای زمان‌های (ج) $t=0.2$ و (د) $t=0.6$

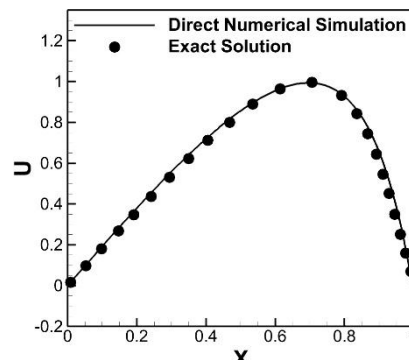
۵. روش تجزیه مود دینامیکی

تجزیه مود دینامیکی یک تکنیک کاهش ابعاد است که توسط اشمید معرفی شده و داده‌های با ابعاد بالا را به ساختارهای منسجم مکانی - زمانی غالب تجزیه می‌کند [۸]. مدت کوتاهی پس از معرفی تجزیه مود دینامیکی، این روش توسط رویل و همکاران به عنوان یک تکنیک عددی برای تخمین عملگر کوپمن^۱ و ایجاد یک روش قدرتمند برای تحلیل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مورد استفاده قرار گرفت [۱۹]. این روش از رویکردی مشابه روش‌های تکراری برای محاسبه مقادیر ویژه

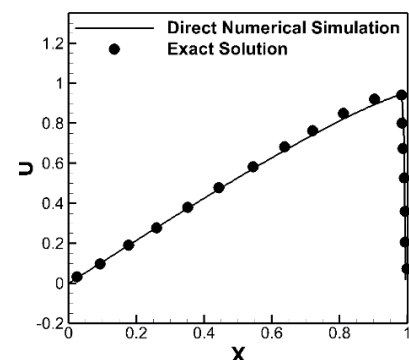
$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \tag{۸}$$

$$u(0, t) = u(x, t) = 0$$

در این شرایط حل عددی معادله برگرز لزج با استفاده از گام زمانی معادل ۰/۰۰۱ و برای بازه‌ای معادل یک واحد زمانی انجام شده است. با محاسبه متغیر موجود در معادله (۷) در دو زمان $t=0.2$ و $t=0.6$ برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ نتایج حاصل شده است. داده‌های حاصل از حل عددی با نتایج بدست آمده از حل دقیق معادله برگرز در شکل ۱ مقایسه شده است. نتایج نمایش داده شده در شکل ۱، بیانگر این است که حل عددی معادله برگرز لزج کاملاً بر نتایج حاصل از حل دقیق منطبق بوده و این امر نشان دهنده دقت بالای حل عددی معادله و داده‌های مورد استفاده برای آموزش مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر این معادله می‌باشد.



(الف)



(ب)

¹ Koopman Operator

$$V_1^{N-1} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}] \quad (10)$$

$$V_2^N = [v_2, v_3, v_4, \dots, v_N] \quad (11)$$

فرض بر این است که داده‌های ورودی از شبیه‌سازی عددی مستقیم بدست آمده باشند، باید ماتریس A برای تکامل معادلات حاصل شود. حال با استفاده از نگاشت خطی، بین ماتریس داده‌های لحظه‌ای اول، V_1^{N-1} و مجموعه دوم V_2^N رابطه زیر برقرار خواهد شد:

$$V_2^N = A V_1^{N-1} \quad (12)$$

ماتریس نگاشت A ، ماتریسی فرضی است که شامل اطلاعات تکامل تدریجی سیستم بوده و در طول زمان ثابت می‌باشد. برای برقراری رابطه (۱۲)، باید عبارت به ماتریس A ، متکی نباشد. اگر ماتریس غیرمربعی V_1^{N-1} با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین^۱، تجزیه شود، رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$V_1^{N-1} = U \Sigma W^T \quad (13)$$

در نتیجه:

$$V_2^N = A U \Sigma W^T \quad (14)$$

با ضرب U^T و $W \Sigma^T$ در طرفین معادله (۱۴)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$S = U^T A U \Sigma W^T W \Sigma^{-1} = U^T V_2^N W \Sigma^{-1} \quad (15)$$

مقادیر ویژه ماتریس A و S با هم برابر بوده و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$S y_i = \mu_i y_i \quad i = 1, \dots, M \quad (16)$$

در این رابطه y_i ، بیانگر بردار ویژه و μ_i مقادیر ویژه ماتریس S هستند. بنابراین مودهای مکانی بدست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

خطی یا سایر مسائل جبر خطی استفاده می‌کند. هدف از این روش، استفاده از یک فرمول‌بندی با تکیه بر داده‌های ورودی، که از طریق حل عددی یا نتایج آزمایشگاهی بدست می‌آید، می‌باشد. در واقع، از یک روش مبتنی بر مدل برای استخراج اطلاعات دینامیکی اجتناب و در عوض روی یک روش داده محور مبتنی بر فیزیک تمرکز شده است. بنابراین این روش مجموعه‌ای از مودها را همراه با یک مدل تکاملی خطی تولید می‌کند. این روش قدرتمند که داده محور می‌باشد، به عنوان روشی برای جداسازی اطلاعات مهم سیستم دینامیکی مورد نظر (مانند جریان سیال) به منظور تعیین ساختارهای اصلی سازنده رفتار دینامیکی مسئله معرفی شده است. در واقع این روش قادر به بررسی و تجزیه و تحلیل ساختار سیستم‌های پیچیده و غیرخطی بوده و امکان شناسایی نواحی از میدان با رفتارهای دینامیکی مختلف را دارد. تجزیه مود دینامیکی به ابزاری پیشرو برای مدل‌سازی مبتنی بر داده‌های سیستم‌های دینامیکی تبدیل شده است. در ابتدا به مجموعه‌ای از داده‌ها یا همان ماتریس داده‌ها برای بکارگیری این روش نیاز است. به عبارتی، با توصیف کلی میدان‌های جریان گردآوری شده با نمونه‌گیری از شبیه‌سازی عددی مستقیم یا داده‌های تجربی شروع می‌شود. داده‌هایی که به صورت یک دنباله از میدان‌های لحظه‌ای جریان هستند، تحت عنوان بردار v_i مرتب خواهند شد. معمولاً نمایه‌ها با گام زمانی ثابت نسبت به یکدیگر قرار دارند. بنابراین سیستم مورد مطالعه به صورت ماتریسی با M سطر و ϕ^t ستون طبق رابطه (۹) مرتب خواهد شد [۱۵].

$$V_1^N = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_N] \quad (9)$$

در رابطه فوق، v بردار بیانگر میدان جریان در لحظه t است. سپس در ماتریس‌های V_1^{N-1} و V_2^N به ترتیب آخرین نمایه و اولین نمایه از ماتریس داده‌های اصلی حذف می‌شوند:

¹ Singular Value Decomposition

رتبه کاسته، کمیت حاکم بر دینامیک مسئله به صورت حاصل جمع بخش متوسط گیری شده زمانی و یک بخش اغتشاشی نوشته می شود [۲۰]:

$$u(x,t) = \bar{u}(x) + u'(x,t) \quad (21)$$

بخش اغتشاشی براساس تقریب گالرکین به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$u'(x,t) = \sum_{i=1}^N a^i(t) \phi_i(x) \quad (22)$$

در این رابطه، ϕ_i پایه های دلخواه و a^i ضرایب زمانی هستند که باید مقادیر آن ها به نحوی انتخاب شود تا معادله دیفرانسیل را با تقریب خوبی ارضا کنند. با جایگذاری روابط مربوط به بخش متوسط و اغتشاشی میدان لحظه ای در معادله برگزر، نتیجه زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} & \phi_i(x) \times \sum_1^N \frac{d}{dt} (a^i(t)) - \\ & \bar{u} \times \sum_1^N a^i(t) \times \nabla \phi_i(x) - \\ & \bar{u} \times \nabla \bar{u} - \sum_1^N a^i(t) \times (\bar{u}, \nabla \phi_i(x)) - \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=j=1}^N a^i(t) \times a^j(t) \times (\phi_i(x), \nabla \phi_j(x)) = \\ & \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \bar{u} + \sum_1^N a^i(t) \times \nabla^2 \phi_i(x)) \end{aligned}$$

در روش تجزیه متعامد بهینه، مودها نسبت به یکدیگر دارای خاصیت تعامد هستند و در نهایت ضریب بخش گذرا با رابطه دلتای کرونکر ساده سازی می شود. اما در روش تجزیه مود دینامیکی، همانطور که پیش تر گفته شد، مودها الزاماً دارای ویژگی تعامد نبوده پس یک پایه الحاقی شبه متعامد لازم است تا در طرفین رابطه، ضرب ماتریسی شود. این پایه الحاقی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi^{ad} = ((\phi_k^H(\vec{x}), \phi_i(\vec{x})))^{-1} \quad (24)$$

$$\phi_i = U y_i \quad (17)$$

$$A \phi_i = \mu_i \phi_i$$

مودهای دینامیکی (وابسته به زمان) با نگاشت لگاریتمی مقادیر ویژه طبق رابطه زیر بدست خواهند آمد:

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{dt} \quad (18)$$

برای پیش بینی رفتار سیستم در بلند مدت و بازسازی مجموعه نمایه های اولیه، با استفاده از محاسبه ضرایب زمانی و مودهای دینامیکی، یک بسط خطی تقریب زده می شود. این عمل با تصویرسازی هر یک از مودهای تجزیه مود دینامیکی در اولین نمایه طبق رابطه زیر انجام می شود.

$$a_i = \phi_{ij}^t v_{1j} \quad (19)$$

در رابطه فوق، ϕ^t شبه معکوس ماتریس مودهای دینامیکی است. به منظور بازسازی هر یک از نمایه های اولیه از رابطه زیر استفاده می شود:

$$V_k = \sum_i^M a_i \phi_i \mu_i^{k-1} \quad (20)$$

در رابطه فوق، k شمارنده زمانی، μ_i مقدار ویژه و V_k نمایه ثبت شده در زمان است. در روش استفاده شده در این پژوهش، برخلاف روش تجزیه متعامد بهینه، مودهای حاصل از ماتریس نمایه ها که برای توسعه مدل های رتبه کاسته بکار می روند، دارای خاصیت تعامد نبوده و دارای ویژگی مستقل خطی نیز نیستند.

۶. تصویرسازی معادله و توسعه مدل مبتنی بر فیزیک

با استفاده از تجزیه مود دینامیکی

مدل سازی رتبه کاسته تکنیکی است که می تواند پیچیدگی محاسباتی یا نیاز ذخیره سازی رایانه ای را کاهش دهد. این کار با مدل های جایگزین مرتبه پایین تر می تواند تجزیه، تحلیل، کنترل و طراحی سیستم های پیچیده را ساده کند. به منظور توسعه مدل

مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی نبوده و در الگوهای رتبه‌کاسته حاصل از تجزیه متعامد بهینه نیز مشاهده می‌شود. پس می‌توان گفت سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی که از طرح گالرکین حاصل شده و برای مدل‌سازی رفتار سیستم با تغییر پارامترهای مهم حاکم بر مسئله بکار می‌رود، می‌تواند ناپایدار باشد. زمانی که سیستم در گام‌های زمانی ابتدایی و با مقادیر عدد رینولدز پایین مدنظر باشد، نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته کاملاً بر هم منطبق بوده و پیش‌بینی درستی از رفتار مسئله بدست می‌آید. یکی از دلایل این موضوع می‌تواند غالب‌تر شدن عبارت نفوذ در معادله و تاثیر افزایش اثر استهلاکی آن باشد. در توسعه مدل رتبه‌کاسته از رویکرد کاهش مرتبه سیستم دینامیکی مبتنی بر حذف اثر برخی مودها بهره برده شده‌است. برخی از این مودها می‌توانند مشابه ساختارهای ریز مقیاس در جریان‌های آشفته باشند که در جریان‌های محصور به دیواره متاثر از محدوده‌هایی تحت اثرات غالب لزجت و در نتیجه رفتارهای استهلاکی باشند. زمانی که این ساختارها از مدل حذف می‌شوند بخشی مهمی از فیزیک مسئله از دست رفته و می‌تواند سبب تشدید ناپایداری در سیستم دینامیکی حاصل شود. یکی دیگر از علل ناپایداری در مسئله مورد بررسی افزایش عدد رینولدز و تغییر رفتار مسئله از شکل تحت تأثیر لزجت به فرم تحت تأثیر اینرسی می‌باشد. در نتیجه مدل رتبه‌کاسته حاصل به صورت ذاتی با افزایش عدد رینولدز، دچار کاهش رفتار استهلاکی شده و این می‌تواند سبب تشدید ناپایداری در مدل داده محور مبتنی بر فیزیک شود.

از آن جایی که اساس روش تجزیه مود دینامیکی یک روش داده محور می‌باشد، اگر داده‌های ورودی به صورت داده‌های آزمایشگاهی و با آزمایش بر روی یک سیستم واقعی اندازه‌گیری شده باشند، در اندازه‌گیری ممکن است مواردی چون خطای انسانی، عدم دقت و تمرکز وجود داشته و داده‌های حاصل به

در رابطه فوق، ϕ_k^H مزدوج ترانهاده مودهای روش تجزیه مود دینامیکی است. با ضرب طرفین رابطه (۲۳) در مزدوج ترانهاده مودهای تجزیه مود دینامیکی، معادله زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} & (\phi_k^H(x), \phi_i(x)) \times \sum_1^N \frac{d}{dt} (a^i(t)) - \\ & (\phi_k^H(x), \bar{u} \cdot \nabla \phi_i(x) + \phi_i(x) \cdot \nabla \bar{u}) \times a^i(t) - \\ & (\phi_k^H(x), \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) - \\ & (\phi_k(x), \phi_i(x) \cdot \nabla \phi_j(x)) \times a^i(t) \times a^j(t) \quad (25) \\ & = \frac{1}{\text{Re}} (\phi_k^H(x), \nabla^2 \bar{u}) + \\ & \frac{1}{\text{Re}} (\phi_k^H(x), \nabla^2 \phi_i(x)) \times a^i(t) \end{aligned}$$

در نهایت معادله مدل رتبه‌کاسته به صورت یک معادله دیفرانسیلی ساده مرتبه اول برای ضرایب مودال وابسته به زمان بدست خواهد آمد:

$$\frac{da^k(t)}{dt} = \tilde{A}_{kij} \times a^i(t) + \tilde{B}_{ki} \times a^i(t) + \tilde{C}_k \quad (26)$$

مدل حاصل به صورت سیستم دینامیکی بوده که برای محاسبه ضرایب مودال در زمان‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. ضرایب موجود در معادله (۲۶) به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{kij} &= A_{ij}^k \times \phi^{ad} \\ \tilde{B}_{ki} &= B_i^k \times \phi^{ad} \\ \tilde{C}_k &= B^k \times \phi^{ad} \end{aligned}$$

۷. پایدارسازی مدل رتبه‌کاسته با بهره‌گیری از روش

لزجت گردبه‌ای مصنوعی

مدل‌سازی رتبه‌کاسته سیستم‌های دینامیکی با فیزیک غیرخطی و نسبتاً پیچیده می‌تواند تحت تأثیر عوامل مختلفی منجر به کسب نتایج قابل قبول یا داده‌های غیرفیزیکی شود. در این حالت رفتار مدل می‌تواند در بازه زمانی کوتاه یا بلند به نتایج نادرستی سوق پیدا کند. این واگرایی از نتایج صحیح، تنها مخصوص مدل‌های

تکنیک مقدار انرژی لازم برای پایداری و اصلاح سیستم تامین شده و مقادیر بدست آمده از مدل سازی در اعداد رینولدز بالا پاسخ مناسبی خواهند داشت. با بکار بردن عبارت های موجود در معادله (۲۷)، مدل رتبه کاسته اصلاح شده، مطابق معادله (۲۶) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{da^k}{dt} = \tilde{A}_{kij} \times a^i \times a^j + \hat{B}_{ki} \times a^i(t) + \hat{C}_k \quad (28)$$

$$\hat{B}_{ki} = \tilde{B}_{ki} + B_{ki}^1$$

$$\hat{C}_k = \tilde{C}_k + B_k^2$$

۸. نتایج

در این قسمت، نتایج حاصل شده از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل سازی رتبه کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی ارائه شده است. در بخش اول معادله برگرز ناپایا یک بعدی لزج تراکم ناپذیر با استفاده از شبیه سازی عددی مستقیم حل شده و سپس با استفاده از رویکرد تفسیر شده در قسمت های پیشین، مدل رتبه کاسته بدست آمده و جایگزین مدل اصلی می شود. بدین منظور از یک مجموعه داده های بدست آمده از شبیه سازی عددی مستقیم، برای ورودی مدل رتبه کاسته استفاده شده است. در مطالعه حاضر برای حل عددی معادله برگرز از روش شبیه سازی عددی مستقیم بهره برده شده و گام زمانی معادل ۰/۰۰۱ فرض شده است. این مقدار گام زمانی طبق مطالعه صورت گرفته منجر به ایجاد یک مدل عددی پایدار برای شبیه سازی با دقت بالا خواهد شد. حل عددی این معادله برای یک واحد زمانی و به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰ انجام شده است. شرایط مرزی و اولیه این مسئله به شرح زیر می باشد:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) \quad (29)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0$$

پس از حل عددی مستقیم معادله برگرز، ماتریس داده ها شامل ۱۰۰ نمایه (عضو) با گام های زمانی مساوی و متوالی ایجاد و به

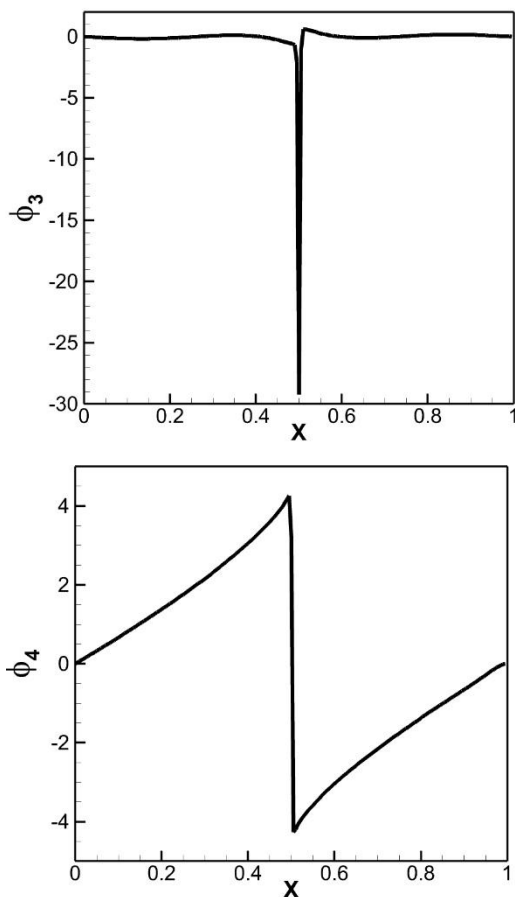
صورت دقیق بدست آورده نشود. در نتیجه مدل جایگزین که بر اساس این داده ها توسعه یافته، پایداری لازم برای پیش بینی رفتار سیستم دینامیکی مورد نظر را نداشته باشد. در این پژوهش برای اصلاح این ناپایداری و جبران استهلاک از دست رفته برای رسیدن مجدد رفتار سیستم به حالت پایدار، از یک عبارت لزجت گردابه ای مصنوعی^۱ در مدل استفاده می شود. همچنین این عبارت می تواند به عنوان جایگزین اثر مودهای حذف شده در فرآیند کاهش مرتبه بکار رفته و مشابه رویکرد شبیه سازی جریان های آشفتنه برای مدل سازی ساختارهای متجانسی که سطح انرژی پایین تری دارند، استفاده شود. ضریب مورد نظر برای پایداری مدل رتبه کاسته به ازای مقادیر متفاوت عدد رینولدز متغیر بوده اما به طور کلی در این پژوهش مقدار آن ثابت فرض شده است. ترم استهلاک مصنوعی که به مدل رتبه کاسته استاندارد اضافه می شود، به صورت رابطه زیر می باشد [۱۶]:

$$B_k^2 = \langle \nu_e \nabla^2 \bar{u}, \phi_k \rangle \quad (27)$$

$$B_{ki}^1 = \langle \nu_e \nabla^2 \phi_i; \phi_k \rangle$$

در این دو رابطه مقدار ν_e نشان دهنده لزجت گردابه ای است. همانطور که در معادله (۲۷) مشخص است یکی از آنها در عبارت ثابت مدل رتبه کاسته لحاظ شده و دیگری در ترم خطی مدل بکار می رود. مقدار دقیق پارامتر لزجت گردابه ای بر اساس نیاز مسئله مورد نظر و به منظور پایداری مدل رتبه کاسته لحاظ می شو. این مقدار عمدتاً در مرتبه عکس عدد رینولدز در نظر گرفته می شود. هدف اصلی در این پژوهش ارائه یک طرح پایدار به ازای نمایه هایی (تصاویر لحظه ای) با مقدار عدد رینولدز ثابت به منظور شبیه سازی مسئله با تغییر عدد رینولدز به کمک مدل رتبه کاسته جایگزین می باشد. بنابراین، طبق این

¹Artificial Eddy Viscosity



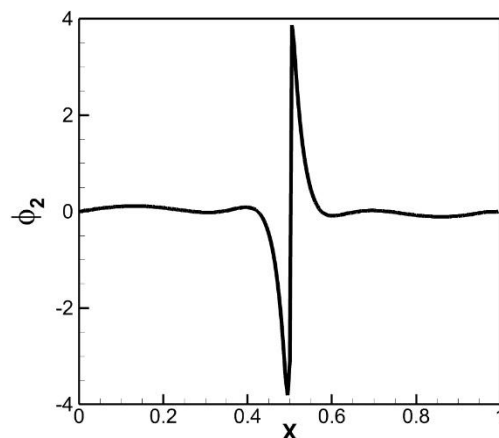
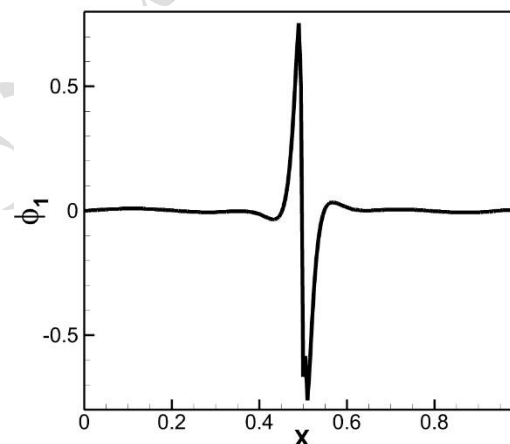
شکل (۲): توزیع چهار مود دینامیکی اول، دوم، سوم و چهارم حاصل از نمایه‌های حل معادله برگرز در عدد رینولدز ۵۰۰۰

۸.۱. انتگرال گیری از مدل رتبه کاسته در بازه زمانی

کوتاه به ازای عدد رینولدز ثابت

در این بخش نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته برای شرایطی که تمام داده‌های موجود در ماتریس نمایه‌ها برای آموزش مدل بکار می‌رود، ارائه شده‌است. لازم به ذکر است در این بخش عدد رینولدز داده‌های ورودی با عدد رینولدز میدان جریان یکسان است. به عبارتی دیگر عدد رینولدز تصاویر لحظه‌ای به کار گرفته شده به عنوان داده‌های ورودی ثابت مانده و میدان موردنظر نیز در همین عدد رینولدز شبیه‌سازی خواهد شد. در این شرایط مدل رتبه کاسته با استفاده از ۱۰۰ نمایه و برای بازه‌ای معادل یک واحد زمانی آموزش داده می‌شود. سپس مدل رتبه کاسته با بهره‌گیری از ۱۰ مود بازسازی شده و انتگرال‌گیری

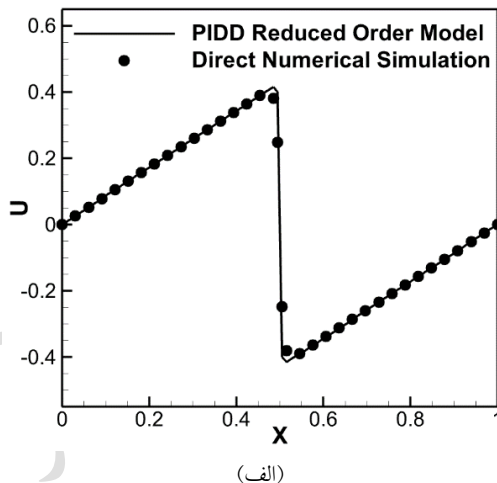
عنوان داده‌های ورودی مدل رتبه کاسته در نظر گرفته شده‌است. پس از حل مسئله مقادیر ویژه، مودهای حاصل از روش تجزیه مود دینامیکی محاسبه خواهند شد. در شکل ۲ توزیع مودهای دینامیکی در عدد رینولدز ۵۰۰۰ آورده شده‌است. مودهای بدست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی نسبت به یکدیگر مستقل نمی‌باشند. به همین دلیل نمی‌توان انرژی مختص به هریک از مودهای مکانی را به طور جداگانه بیان کرد و در نتیجه ده مود استخراج شده، از لحاظ محتوای انرژی، تقدمی نسبت به یکدیگر نداشته و با استفاده از ترکیب خطی این ده مود می‌توان میدان را بازسازی کرد.



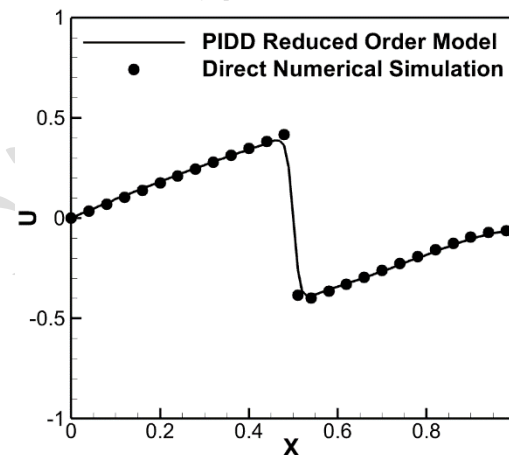
۸.۲. انتگرال گیری از مدل رتبه کاسته در بازه زمانی کوتاه

با تغییرات عدد رینولدز

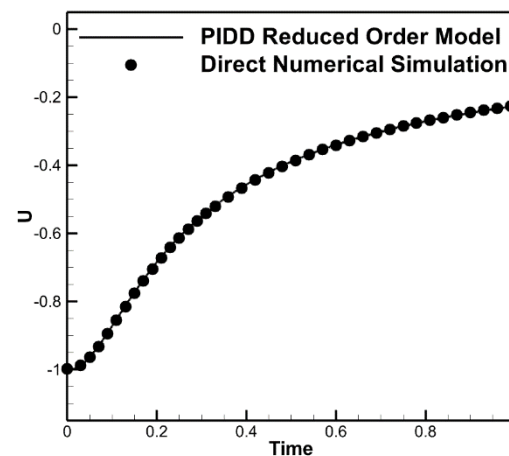
در این قسمت نیز مانند قسمت پیشین، نتایج بدست آمده از مدل رتبه کاسته برای شرایطی که تمام آرایه های ماتریس نمایه ها به صورت کامل برای آموزش مدل بکار می رود، ارائه شده است. بدین معنی که ۱۰۰ نمایه برای مدل سازی به کار گرفته شده است. تفاوت این بخش با بخش قبلی در این است که عدد رینولدز تصاویر لحظه ای به کار گرفته شده به عنوان داده های اولیه ثابت و برابر با ۵۰۰۰ در نظر گرفته شده لیکن مدل رتبه کاسته به ازای اعداد رینولدز متفاوت حل شده است. شکل ۵ مقایسه پاسخ معادله برگرز در زمان $t=1$ (آخرین گام زمانی) حاصل از مدل رتبه کاسته اصلاح شده و شبیه سازی عددی مستقیم را نشان می دهد. در این شکل پاسخ معادله برگرز برای اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۸۰۰۰ نشان داده شده و مشاهده می شود، داده های حاصل از مدل رتبه کاسته در مقایسه با حل عددی مستقیم از دقت بالایی برخوردار می باشد.



به ازای ۱۰۰۰ گام زمانی با اندازه $0/001$ انجام شده است. شکل ۳ مقایسه پاسخ معادله برگرز در زمان $t=1$ حاصل از مدل رتبه کاسته اصلاح شده و شبیه سازی عددی مستقیم به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰ را نشان می دهد. تغییرات پاسخ مدل رتبه کاسته معادله برگرز در یک نقطه مشخص ($x=0/75$) با داده های حاصل از حل دقیق مقایسه شده و رفتار مدل در زمان های مختلف در شکل ۴ نمایش داده شده است. نتایج بیانگر این است که دقت داده های حاصل از مدل رتبه کاسته در مقایسه با حل عددی مستقیم در زمان های مختلف قابل قبول می باشد.

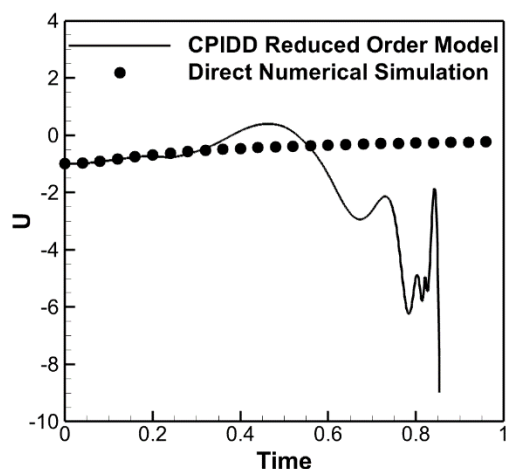


شکل (۳): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل با تمام نمایه ها آموزش داده شده) به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰

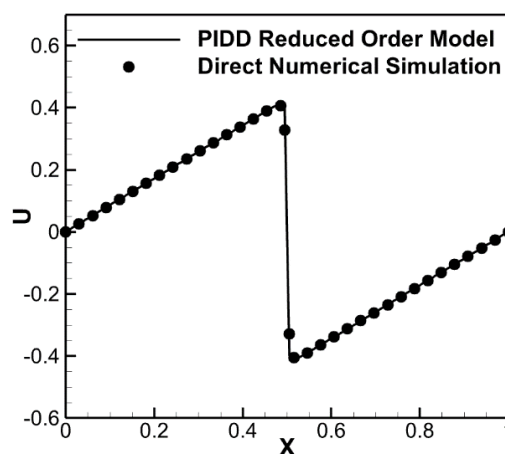


شکل (۴): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0/75$ حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده (مدل با تمام نمایه ها آموزش داده شده) به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰

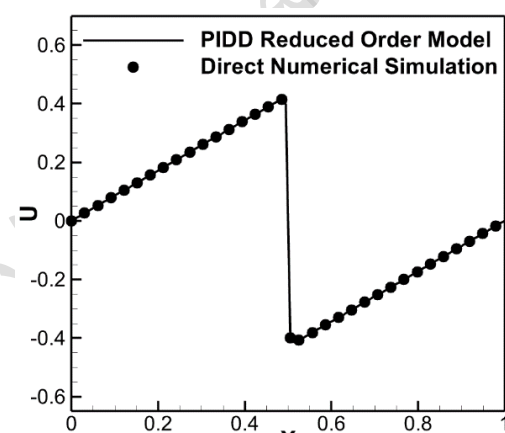
زمانی دسته نمایه جدید، به منظور آزمایش دقت مدل رتبه کاسته در پیش‌بینی رفتار سیستم بکار گرفته شده است. واضح است این بازه زمانی در فرآیند آموزش مدل لحاظ نشده و به خوبی می‌تواند دقت مدل رتبه کاسته در پیش‌بینی داده‌های میدان مورد نظر را نشان دهد. به منظور بررسی عملکرد مدل رتبه کاسته استاندارد در پیش‌بینی دینامیک مسئله مورد نظر، نتایج حاصل از آن بررسی شده است. بدین منظور تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در نقطه مشخص ($x=0.75$) حاصل از حل دقیق و مدل رتبه کاسته استاندارد، در قالب شکل ۶ با هم مقایسه شده‌اند. در این مورد، دسته نمایه جدید شامل ۳۵ درصد داده‌ها به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰ برای آموزش مدل بکار رفته است. همان‌طور که در شکل نشان داده شده دقت مدل رتبه کاسته در مقایسه با داده‌های حل عددی مستقیم مناسب نبوده و مدل نتوانسته دینامیک حاکم بر مسئله را به خوبی پیش‌بینی کند.



شکل ۶: مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته استاندارد (اصلاح نشده)، (مدل با ۳۵ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده)، به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰ در شکل ۷، تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در موقعیت ($x=0.75$)، حاصل از حل دقیق و مدل رتبه کاسته اصلاح شده که با دسته نمایه‌ای مشابه حالت قبل آموزش داده شده، مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند دقت مدل رتبه کاسته اصلاح شده در



(ب)



(ج)

شکل ۵: مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل با تمام نمایه‌ها آموزش داده شده) در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰۰، (ب) ۲۰۰۰ و (ج) ۸۰۰۰

۸.۳. انتگرال‌گیری از مدل رتبه کاسته برای بازه زمانی بلند به ازای عدد رینولدز ثابت

با توجه به دقت بالای بازسازی میدان در بازه زمانی کوتاه، پیش‌بینی مدل از وضعیت میدان در بازه زمانی بلند به ازای دسته نمایه ثابت در عدد رینولدز ۵۰۰۰ نیز مورد انتظار است. بدین منظور از دسته نمایه اصلی، ۳۵ درصد نمایه‌ها انتخاب و دسته نمایه جدیدی ایجاد شده است. از این دسته نمایه‌های جدید به منظور آموزش مدل رتبه کاسته هم در فرم استاندارد و هم اصلاح شده استفاده شده است. بدین صورت خارج از محدوده

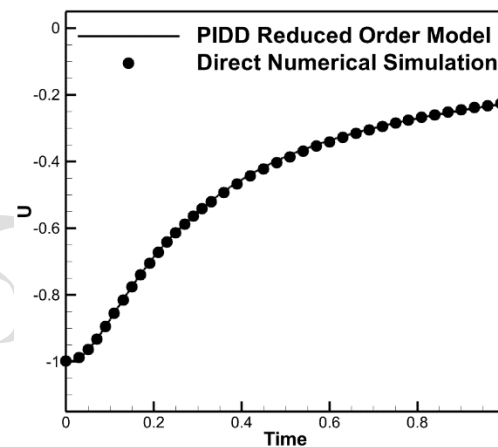
۸.۴. انتگرال گیری از مدل رتبه کاسته برای بازه زمانی

بلند با تغییرات عدد رینولدز

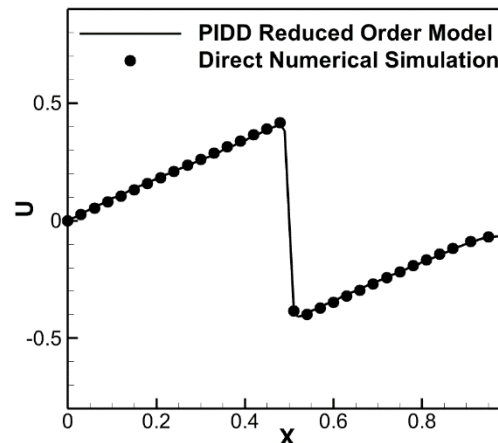
با توسعه مدل جایگزین برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی مسئله مورد نظر و بررسی صحت عملکرد آن، انتظار می‌رود مدل حاصل بتواند به عنوان جایگزینی برای معادله حاکم اصلی در بازه‌های زمانی متغیر و به ازای تغییرات پارامتر مهمی چون عدد رینولدز به کار رود. در این بخش نیز همانند بخش قبلی مدل رتبه کاسته با ۳۵ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده است. داده‌های آموزش دهنده مدل رتبه کاسته در این قسمت نیز در عدد رینولدز ۵۰۰۰ تولید شده ولی مدل رتبه کاسته اصلاح شده حاصل در اعداد رینولدز مختلفی بکار گرفته شده تا توانایی آن در شبیه‌سازی مسئله مورد نظر بررسی شود. در شکل ۹ مقایسه‌ای بین داده‌های حاصل از مدل رتبه کاسته استاندارد و داده‌های حل دقیق، در حالتی که دسته نمایه مورد نظر با شرایطی مشابه بخش قبل بکار گرفته شده، ارائه شده است. این مقایسه برای آخرین گام زمانی در دسته نمایه اصلی معادل با زمان $t=1$ صورت گرفته است. همان‌طور که از نتایج نمایان است، در این شرایط که عدد رینولدز داده‌های اولیه ۵۰۰۰ و میدان جریان در اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ می‌باشد، دقت مدل رتبه کاسته در مقایسه با داده‌های حل عددی مستقیم به ازای عدد رینولدز بالاتر و بازه زمانی بیشتر کاهش یافته و دینامیک حاکم بر مسئله به خوبی پیش‌بینی نشده است.

در شکل ۱۰ تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در موقعیت $(x=0.75)$ حاصل از حل دقیق و مدل رتبه کاسته استاندارد مقایسه و بررسی شده‌اند. در این شکل میدان مورد نظر در اعداد رینولدز ۱۰۰۰، ۲۰۰۰ شبیه‌سازی و با داده‌های دقیق مقایسه شده است. نتایج حاصل بیانگر این است که به ازای اعداد رینولدز بالاتر دقت مدل کاهش یافته و دینامیک حاکم بر مسئله

پیش‌بینی رفتار دینامیکی مسئله مورد نظر و در بازه زمانی بیش از محدوده‌ای که برای آموزش مدل رتبه کاسته بکار رفته است، قابل قبول می‌باشد. در شکل ۸ مقایسه‌ای بین داده‌های حاصل از مدل رتبه کاسته اصلاح شده و داده‌های حل دقیق مطابق شرایط مدل بکار رفته در شکل ۷، انجام شده است. این مقایسه در زمان $t=1$ ، صورت گرفته و به خوبی دقت مدل رتبه کاسته اصلاح شده به ازای عدد رینولدز ثابت، ۵۰۰۰ در قیاس با داده‌های حل دقیق را نمایش می‌دهد.

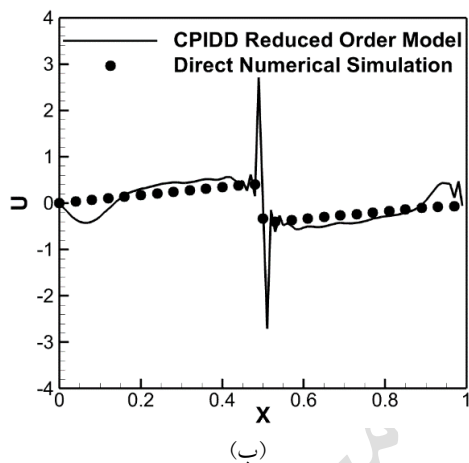
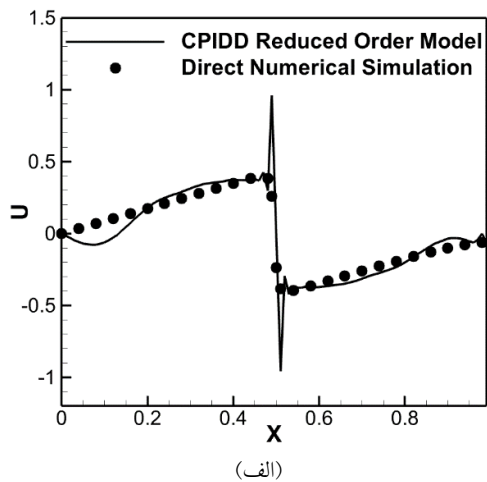


شکل (۷): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل با ۳۵ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده)، به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰

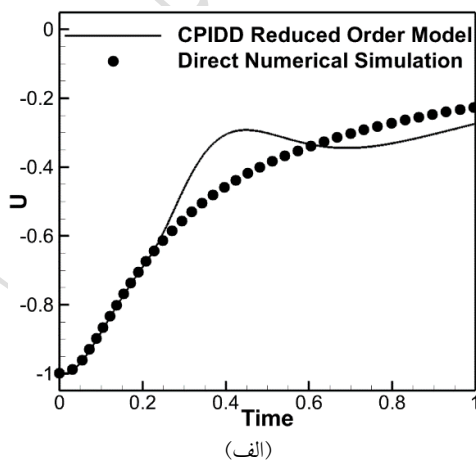


شکل (۸): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل با ۳۵ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده) در عدد رینولدز ۵۰۰۰

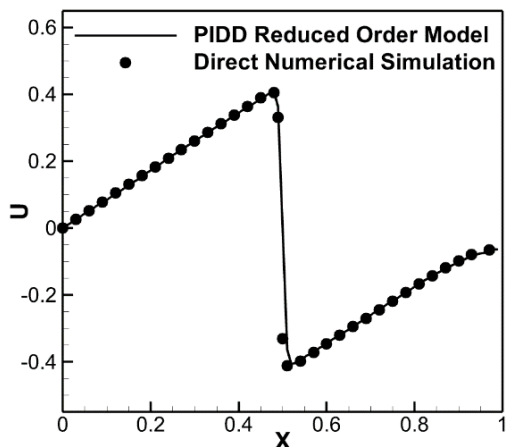
و یک عدم پیوستگی ناشی از حرکت موج سینوسی در راستای مکانی دیده می‌شود.



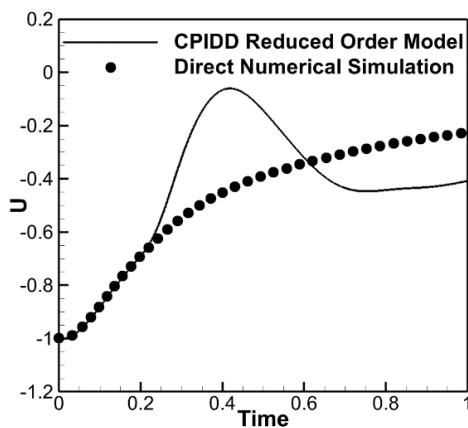
شکل (۹): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد، (مدل با ۳۵ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده) در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰۰ و (ب) ۲۰۰۰



به خوبی پیش‌بینی نشده‌است. در شکل ۱۱ مقایسه‌ای بین داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم در بازه زمانی بلند انجام گرفته‌است. نتایج به ازای زمان $t=1$ انجام شده و واضح است که دقت مدل در پیش‌بینی داده‌های میدان مورد نظر خارج از بازه زمانی که برای آموزش مدل به کار رفته، مناسب می‌باشد. همچنین تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در موقعیت $(x=0.75)$ حاصل از حل دقیق و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده در شکل ۱۲ نمایش داده شده‌است. لازم به ذکر است مدل رتبه‌کاسته به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰ ایجاد و میدان موردنظر در اعداد رینولدز ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ شبیه‌سازی شده‌است. در شکل ۱۳ تغییرات زمانی پاسخ معادله برگرز در موقعیت $(x=0.75)$ حاصل از حل دقیق و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده در شرایطی که دسته نمایه‌ای با ۸۰ عضو برای آموزش مدل بکار رفته، مقایسه شده‌است. در این مسئله میدان موردنظر در عدد رینولدز ۸۰۰۰ با استفاده از مدل رتبه‌کاسته شبیه‌سازی شده‌است. نتایج دقت بالای مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده در پیش‌بینی رفتار دینامیکی مسئله مورد نظر را اثبات می‌کند. برای درک بیشتر مسئله و چگونگی عملکرد مدل رتبه‌کاسته، توزیع سه بعدی از پاسخ معادله برگرز در راستای مکان و زمان، مطابق با شکل ۱۴، نمایش داده شده‌است. در این تصاویر داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته آورده شده و به خوبی دقت مدل جایگزین در قیاس با داده‌های حل دقیق در راستای مکان و زمان مشاهده می‌شود. همانطور که واضح است رفتار متغیر مسئله در راستای زمان، یک فرآیند استهلاکی ناشی از اثرات لزجت را نشان داده که این موضوع به کاهش بیشینه مقدار کمیت وابسته معادله برگرز منجر می‌شود. همچنین با بررسی رفتار پاسخ معادله برگرز در راستای مکان، اثرات جابجایی (اینرسی) به صورت ایجاد یک شبه موج ضربه‌ای



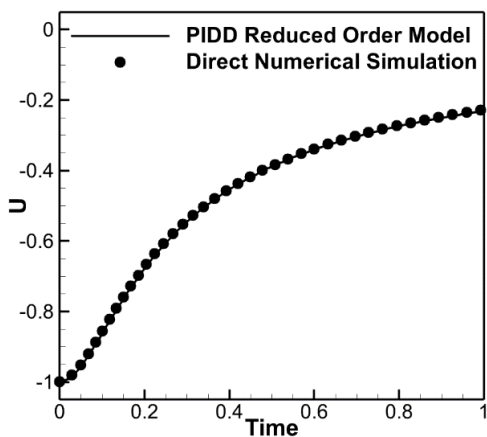
(ج)



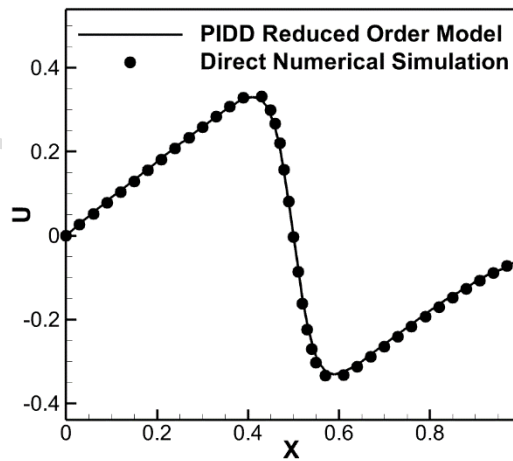
(ب)

شکل (۱۰): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته استاندارد، (مدل با ۳۵ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده)، در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰۰ و (ب) ۲۰۰۰

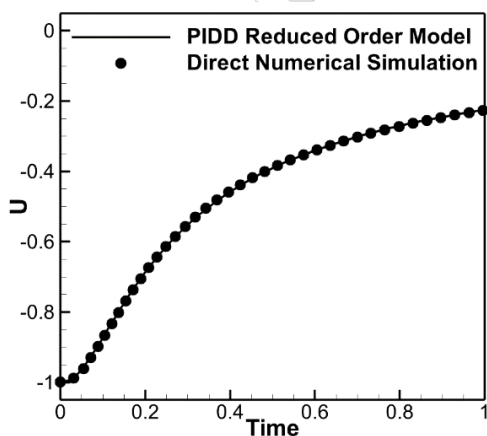
شکل (۱۱): مقایسه پاسخ معادله برگرز در $t=1$ ، حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده، (مدل با ۳۵ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده) در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰



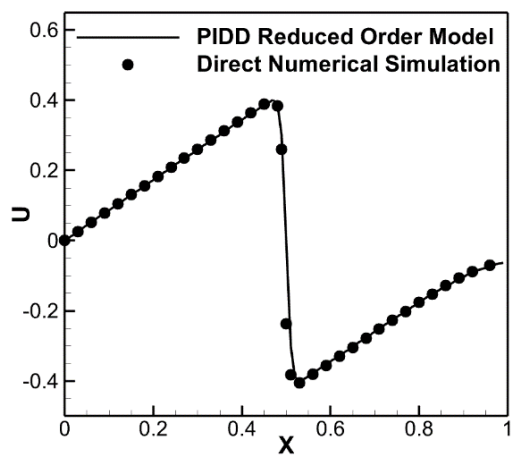
(الف)



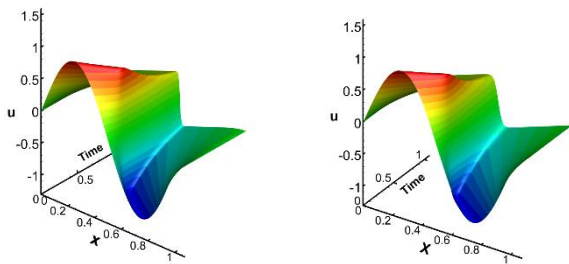
(الف)



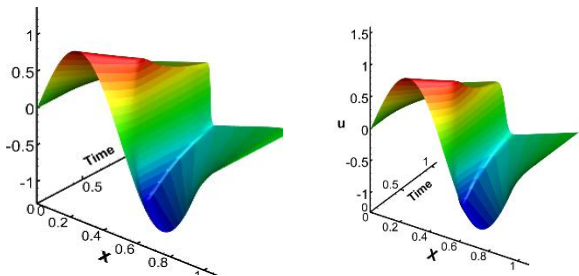
(ب)



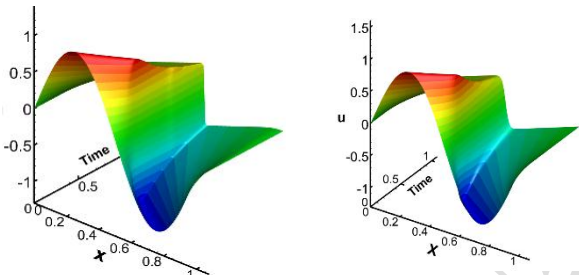
(ب)



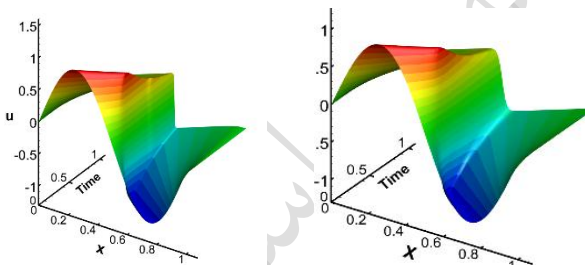
(ب)



(ج)



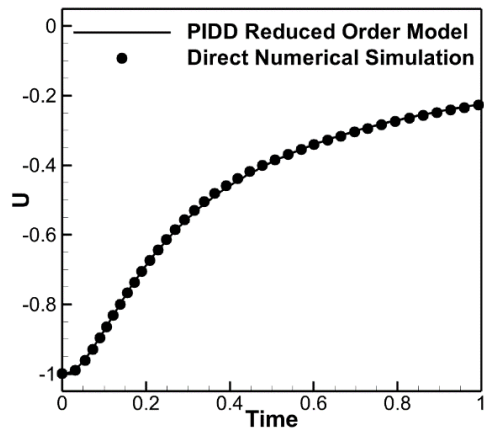
(د)



(و)

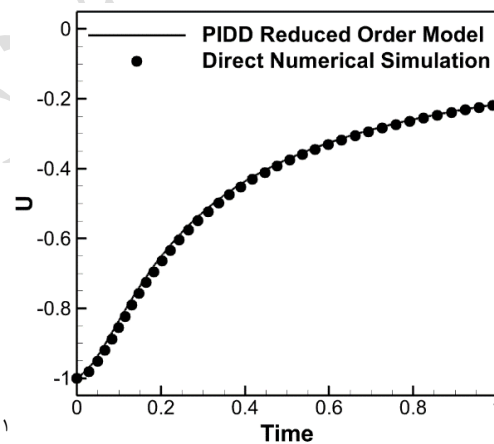
شکل (۱۴): پاسخ معادله برگرز در راستای مکانی-زمانی حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم (ستون سمت چپ) و مدل رتبه کاسته اصلاح شده (ستون سمت راست) در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰، (د) ۵۰۰۰ و (و) ۸۰۰۰

به منظور ارزیابی راندمان محاسباتی مدل رتبه کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک در جدول (۱) و (۲) مقایسه‌ای بین زمان محاسبات هر بخش و زمان کل بین روش شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل جایگزین انجام شده است. همانطور که در جدول مشخص است هزینه محاسباتی این مدل در مقایسه با روش حل

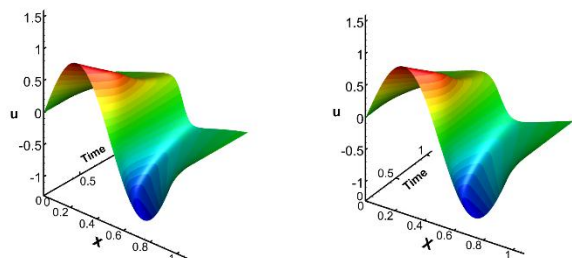


(ج)

شکل (۱۲): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل با ۳۵ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده)، در اعداد رینولدز (الف) ۱۰۰، (ب) ۱۰۰۰، (ج) ۲۰۰۰



شکل (۱۳): مقایسه پاسخ معادله برگرز در نقطه $x=0.75$ حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه کاسته اصلاح شده، (مدل به ازای ۸۰ درصد نمایه‌ها آموزش داده شده)، در عدد رینولدز ۸۰۰۰



(الف)

بکار رفته در مدل رتبه‌کاسته یکسان باشد، و (۲) حالتی که عدد رینولدز بکار رفته برای آموزش مدل با عدد رینولدز مورد استفاده در شبیه‌سازی به کمک مدل رتبه‌کاسته متفاوت باشد. چندین عامل در ناپایداری یک مدل رتبه‌کاسته مؤثر می‌باشد. یکی از این عوامل ناپایداری، تغییر کمیت مهمی چون عدد رینولدز می‌باشد. با افزایش عدد رینولدز تا مقادیر ۵۰۰۰، ۱۰۰۰۰، ۲۰۰۰۰ و در نهایت ۸۰۰۰ و به دنبال آن کاهش استهلاك مورد نیاز، مشابه با شرایط جریان آشفته، تاثیر ترم لزج موجود در معادله کاهش یافته و این رفتار در مدل رتبه‌کاسته تشدید می‌شود. در نهایت پاسخ‌های مدل رتبه‌کاسته ناپایدار شده و در نهایت منجر به واگرایی جواب‌ها خواهد شد که این واگرایی با گذر زمان بیشتر می‌شود. از دیگر عوامل ناپایداری به حذف مودها و عدم دقت در داده‌های ورودی نیز می‌توان اشاره کرد. بدین منظور برای پایدارسازی مدل رتبه‌کاسته و جبران استهلاك از دست رفته، یک ترم اتلاف مصنوعی تحت عنوان لزجت گردابه‌ای مبتنی بر مفاهیم مدل‌سازی جریان آشفته به ترم لزج موجود در معادله اضافه شده‌است. به طور کل دستاوردهای این پژوهش را در قالب موارد زیر می‌توان بیان کرد:

(۱) توسعه یک مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک برای مسائل جابجایی - نفوذ

(۲) پیش‌بینی رفتار سیستم در بازه‌های زمانی کوتاه و بلند با استفاده از حجم محدود داده‌های موردنیاز برای آموزش مدل

(۳) پایدارسازی مدل رتبه‌کاسته به منظور بهبود پیش‌بینی آن در به ویژه در اعداد رینولدز بالا

(۴) استفاده از داده‌های محدود به مقدار (مقادیر) مشخص از پارامتر تأثیرگذار مسئله و پیش‌بینی رفتار سیستم به ازای تغییر مقدار این پارامتر، به نحوی که مدل حاصل می‌تواند به نوعی مدل وابسته به زمان و پارامتریک نیز محسوب شود.

عددی مستقیم بسیار کمتر بوده و توانایی مدل در کاهش زمان محاسبات با وجود دقتی مشابه با مدل اصلی را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است داده‌های مندرج در جداول (۱) و (۲) توسط رایانه‌ای با پردازشگر intel(R) Core (TM) i7-6500U و حافظه 8.00GB بدست آمده‌اند. CPU @ 2.5GHZ

جدول (۱): مقایسه زمان مورد نیاز برای شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک در بازه زمانی کوتاه

مدل	زمان(ثانیه)	زمان کل(ثانیه)
شبیه‌سازی عددی مستقیم	۴۵	۴۵
محاسبه مودهای دینامیکی	۱۱	
محاسبه ضرایب معادله مدل رتبه کاسته	۸	۲۶
انتگرال‌گیری از مدل رتبه‌کاسته	۷	

جدول (۲): مقایسه زمان مورد نیاز برای شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل رتبه‌کاسته داده محور مبتنی بر فیزیک در بازه زمانی بلند

مدل	زمان(ثانیه)	زمان کل(ثانیه)
شبیه‌سازی عددی مستقیم	۹۰	۹۰
محاسبه مودهای دینامیکی	۱۱	
محاسبه ضرایب معادله مدل رتبه کاسته	۸	۲۸
انتگرال‌گیری از مدل رتبه‌کاسته	۹	

۹. نتیجه گیری

در این مطالعه، با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی معادله برگرز لزج به یک مدل کاهش مرتبه‌یافته مبتنی بر داده و فیزیک تبدیل شده‌است. در ابتدا معادله حاکم بر مسئله با استفاده از روش شبیه‌سازی عددی مستقیم حل شده و سپس از نتایج حاصل به عنوان داده‌های اولیه استفاده شده‌است. داده‌های ورودی برای آموزش مدل رتبه‌کاسته، به ازای عدد رینولدز ۵۰۰۰ در نظر گرفته شده‌است. نتایج برای دو حالت ارزیابی شده: (الف) حالتی که عدد رینولدز داده‌های ورودی با عدد رینولدز

شماره مکانی

 i

شمارنده زمانی

 k

مراجع

- [1] Y. Bang, H. S. Abdel-khalik, J. M. Hite, "Hybrid reduced order modeling applied to nonlinear models," *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 91(9): pp. 929-949, 2012, doi: 10.1002/nme.4298.
- [2] S. Afzali, MK . Moayyedi, F. Fotouhi, "Development of an equation-free reduced-order model based on different feature extraction patterns on the two-dimensional steady-state heat transfer dataset," *Soft Computing Journal*, vol. 10, no. 1, pp. 16-31, 2021, doi:10.22052/scj.2021.242830.0 [In Persian].
- [3] Y. C. Liang, H. P. Lee, S. P. Lim, W. Z. Lin, K. H. Lee, C. G. WU, "Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory," *Journal of Sound and vibration*, vol. 252, pp. 527-544, 2002, doi: 10.1006/jsvi.2001.4041.
- [4] J. E. Higham, M. Shahnaim, A. Vaidheeswaran, "Using a proper orthogonal decomposition to elucidate features in granular flows," *Granular Matter* 22, pp. 1-13, 2020, doi:10.1007/s10035-020-01037-7.
- [5] MK . Moayyedi, F. Sabaghzadeghan, "Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition," *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(7), 8-8, pp. 4241, (2021), doi: 10.22060/mej.2020.16939.6483 [In Persian].
- [6] W. S. Edwards, S. Laurette, S. Tuckerman, R. A. Friesner, D. C. Sorensen, "Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations," *Journal of computational physics* 110(1): pp. 82-102, 1994.
- [7] R. B. Lehoucq, J. A. Scott, "Implicitly restarted arnoldi methods and subspace iteration," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(2): pp. 551-562 (1997).
- [8] P. J. Schmid, "Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data," *Journal of fluid mechanics*, 656: pp. 5-28, 2010, doi:10.1017/s0022112010001217 .

(۵) دستیابی به داده‌هایی با دقت بالا حاصل از پیش‌بینی مدل از رفتار سیستم به ازای تغییر پارامتر مهم عدد رینولدز و در بازه‌های زمانی بلند.

فهرست اختصارات

تجزیه مقادیر تکین	SVD
رانگ کوتاه با دقت مرتبه چهارم	RK4
مدل رتبه کاسته	ROM
تجزیه متعامد بهینه	POD
تجزیه مود دینامیکی	DMD

فهرست علائم

میدان لحظه‌ای	U
مقدار متوسط	\bar{U}
مقدار اغتشاشی	U'
ضرایب سیستم دینامیکی	a^i
تعداد کل نمایه‌ها	N
تعداد نقاط مکانی	M
ماتریس بردارهای تکین سمت چپ	W
ماتریس مقادیر تکین	Σ
ماتریس نگاشت	A
ماتریس متشابه	S
مقدار ویژه ماتریس نگاشت	μ_i
بردار ویژه ماتریس نگاشت	y_i
عدد رینولدز	Re
مقدار لزجت گردابه‌ای	ν_e

علائم یونانی

مودهای مکانی	ϕ
پایه‌های الحاقی مودهای دینامیکی	ϕ^{ad}

زیر نویس

- equations, " *Journal of computational and applied mathematics*, vol. 235, pp. 2477-2491, 2011, doi:10.1016/j.cam.2010.11.001
- [19] C.W. Rowely, I. Mezic, S. Bagheri, P. Schilatter, D. S. Henningson, "Spectral analysis of nonlinear flows," *J.Fluid. Mech.* vol. 641, pp. 115-127, Dec 2009, doi:10.1017/s0022112009992059 .
- [20] F. Sabaghzadeghan, M. Moayyedi, "Reduced Order Model of Conduction Heat Transfer in a Solid Plate Based on Dynamic Mode Decomposition," *Sharif Journal of Mechanical Engineering*, 37(2) pp. 3-12, 2021, [In Persian], doi:10.24200/j40.2021.55926.1555 .
- [9] P. J. Schmid, " Dynamic Mode Decomposition and Its Variants," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 54:225-54, 2022, doi:10.1146/annurev-fluid-030121-015835.
- [10] S. E. Ahmed, P. H. Dabaghian, O. San, D. A. Bistran, I. M. Novan, "Dynamic mode decomposition with core sketch," *Physics of Fluids*, 34(6): 066603, 2022, doi: 10.1063/5.0095163.
- [11] T. Krake, D. Klotzl, D. Eberhardt, D. Weiskopf, "Constrained Dynamic Mode Decomposition," *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 29(1): pp. 182-192, 2022, doi:10.1109/TVCG.2022.3209437
- [12] P. J. Baddoo, B. Hermann, B. J. Mckeon, J. Nathan Kutz, S. L. Bunton, "Physics-informed dynamic mode decomposition," *Proceedings of the Royal Society A*, 479.2271, 2023, doi:10.1098/rspa.2022.0576
- [13] C. Hu, et al., "Numerical investigation of centrifugal compressor stall with compressed dynamic mode decomposition," *Aerospace Science and Technology*, 106 106153, 2020, doi:10.1016/j.ast.2020.106153.
- [14] C. Sun, T. Tian, X. Zu, O. Hua, Z. Du, "Investigation of the near wake of a horizontal-axis wind turbine model by dynamic mode decomposition," *Energy*. Vol. 227, 2021, doi:10.1016/j.energy.2021.120418
- [15] MK. Moayyedi, F. Bigdeloo, F. Sabaghzadeghan, "Stabilization of Reduced Order Model for Convection-Diffusion Problems Based on Dynamic Mode Decomposition at High Reynolds Numbers Using Eddy Viscosity Approach," *Amirkabir. Journal. Mechanical. Eng.*, 2022, doi:10.22060/MEJ.2022.20801.732 [In Persian].
- [16] MK. Moayyedi, , Z. Khakzari, F. Sabaghzadeghan, "Study of the Effect of Eddy Viscosity Closure in Calibration of the DMD Based Reduced-order Model to Predict the Long-Term Behavior of Convection-Diffusion Equations," *Fluid Mechanics and Aerodynamics Journal*, 2022 , [In Persian].
- [17] F. Sabaghzadeghan, "Development the Reduce Order Model for Convection-Diffusion and Diffusion Problems Based on Proper Orthogonal Decomposition and Dynamic Mode Decomposition" Thesis for Degree of Master of Science (MSc). Mechanical Engineering-Energy Conversion, Faculty of Engineering, University of Qom, 2019 [In Persian].
- [18] Z. F. Tian, P. X. Yu, "A high-order exponential scheme for solving 1D unsteady convection–diffusion