



University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



شبیه‌سازی عددی موج‌های بلند آب مدل‌سازی شده توسط معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی بوزینسک با استفاده از یک تقریب طیفی[✧]

حوریه فخاری^۱، دانشجوی دکتری، اکبر محبی^{۲*}، دانشیار
^۱ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.

چکیده

در این مقاله، روش گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی بوزینسک که توصیف کننده امواج آب می‌باشد، ارائه می‌گردد. ایده اصلی استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم‌یافته به عنوان توابع پایه‌ای برای مشتقات مکانی به گونه‌ای می‌باشد که شرایط مرزی معادله را برآورده سازد. برای پرهیز از حل دستگاه معادلات غیرخطی، روش لپ فراگ-کرائنک نیکلسون برای گسسته‌سازی زمانی معادله پیشنهاد می‌گردد. تخمین خطای طرح پیشنهادی به صورت دقیق مورد بررسی قرار گرفته و نتایج عددی نشان‌دهنده دقت بالای روش و زمان محاسباتی پایین و موید نتایج نظری می‌باشد. همچنین نتایج حاصل نشان می‌دهد این روش برای معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی و از مراتب زوج کارآمد می‌باشد.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۳۱ مرداد ماه ۱۴۰۲

پذیرش ۲۲ مهر ماه ۱۴۰۲

کلمات کلیدی:

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم‌یافته

معادله بوزینسک

روش گالرکین

روش طیفی

تخمین خطا

© ۱۴۰۲ نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

در این مقاله، معادله بوزینسک^۴ را که در شبیه‌سازی امواج آب، پلاسما، لیزر و فیبرنوری کاربرد دارد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. شکل کلی این معادله به صورت زیر است:

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = f(x, t) \quad (1)$$
$$(x, t) \in [-1, 1] \times [0, 1]$$

با شرایط اولیه:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_1(x), \\ u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \end{cases} \quad x \in [-1, 1],$$

و شرایط مرزی:

۱. مقدمه

معادلات دیفرانسیل مراتب بالا برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی کاربرد بسیار زیادی دارند. برای مثال معادلات دیفرانسیل مرتبه بالای زوج غالباً در مسائل مربوط به اخت‌فیزیک^۱، مکانیک سازه^۲ و ژئوفیزیک^۳ ظاهر می‌شوند.

✧ نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: hoorihfakhari@yahoo.com (فخاری)

a_mohebbi@kashanu.ac.ir (محبی)

¹ Astrophysics

² Structural mechanics

³ Geophysics

⁴ Boussinesq

نحوه ارجاع به مقاله: حوریه فخاری و اکبر محبی، «شبیه‌سازی عددی موج‌های بلند آب مدل‌سازی شده توسط معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی بوزینسک با استفاده از یک تقریب طیفی»، مجله محاسبات نرم، جلد ۱۳، شماره ۱، صفحات ۱۷۲-۱۸۱، بهار و تابستان ۱۴۰۳.

$$J_n^{\alpha,\beta} := \begin{cases} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} P_{n-n_0}^{-\alpha,-\beta}, & \alpha, \beta \leq -1 \\ (1-x)^{-\alpha} P_{n-n_0}^{-\alpha,\beta}, & \alpha \leq -1, \beta > -1 \\ (1+x)^{-\beta} P_{n-n_0}^{\alpha,-\beta}, & \alpha > -1, \beta \leq -1, \end{cases} \quad (۲)$$

به طوری که $n_0 := -(\alpha + \beta)$ برای $n \geq n_0$ و منظور از $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی سنتی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۷]:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k. \quad (۳)$$

از جمله ویژگی‌های مهم این چندجمله‌ای‌ها می‌توان به عمود بودن آنها برهم و صفر بودن مشتقات آنها در نقاط مرزی اشاره کرد. به بیان دقیق‌تر داریم:

$$\partial_x^i J_n^{-\alpha,-\beta}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \alpha - 1, \quad (۴)$$

$$\partial_x^j J_n^{-\alpha,-\beta}(-1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \beta - 1. \quad (۵)$$

لازم به ذکر است این ویژگی ما را در برقراری شرایط مرزی یاری می‌کند. ماتریس ضرایب حاصل از حل مساله با استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم‌یافته تنک بوده و همین امر منجر به خوش‌وضعی و کاهش حجم محاسبات می‌گردد. همچنین، استفاده از این چندجمله‌ای‌ها باعث ساده‌تر شدن تجزیه و تحلیل روش و تخمین بهینه کران خطا می‌شود.

ما در این پژوهش از فضای سوبولوف وزن دار $H_W^m(\Omega)$ (که $m = 0, \pm 1, \dots$) با نرم $\|\cdot\|_{m,W}$ و به طور خاص نرم و ضرب داخلی در فضای $L_W^2(\Omega) = H_W^0(\Omega)$ که به شکل $\|\cdot\|_W, (\cdot, \cdot)_W$ نمایش داده می‌شوند، استفاده می‌کنیم. برای تابع وزن مثبت $w(x)$ تعریف می‌کنیم:

$$L_W^2(\Omega) = \left\{ u \mid (u, u)_W = \int_{\Omega} u^2(x) w(x) dx < +\infty \right\}, \quad (۶)$$

$$\|u\|_W = (u, u)_W^{\frac{1}{2}}. \quad (۷)$$

$$\begin{cases} u(-1, t) = u(1, t) = 0, \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

چالش عمده در حل این معادله، مرتبه بالای مشتق و غیرخطی بودن آن می‌باشد که ارائه یک الگوریتم دقیق و پایدار برای شبیه‌سازی جواب‌های عددی را بسیار ضروری می‌سازد. معادله بوزینسک در سال‌های قبل با استفاده از روش‌های مختلفی نظیر روش طیفی فوریه^۱ [۱]، تجزیه آدومیان^۲ [۲]، توابع پایه شعاعی^۳ [۳]، روش‌های تفاضلات متناهی مرتبه دوم و چهارم [۴]، [۵] و روش عناصر متناهی [۶] حل و بررسی شده است. در روش‌های عددی پیشنهادی فوق، برخی از مقالات فقط به بررسی تحلیل پایداری پرداخته‌اند و بقیه مراجع فاقد تحلیل پایداری و تخمین خطا می‌باشند. در این مقاله، علاوه بر پیشنهاد یک روش از مرتبه دقت بالا، تحلیل همگرایی و تخمین خطای روش پیشنهادی بررسی گردیده است. ایده اصلی، استفاده از الگوریتم طیفی گالرکین^۴ با استفاده از ترکیب فشرده چندجمله‌ای‌های متعامد تعمیم‌یافته به عنوان پایه به گونه‌ای است که شرایط مرزی همگن معادله برآورده شود. از آنجایی که، عملگرهای دیفرانسیل در این معادله به سبب زوج بودن، متقارن هستند، از روش گالرکین استفاده کرده‌ایم و این امر موجب آسان‌تر شدن برنامه‌نویسی و همچنین بررسی تحلیل روش گردیده است. از طرفی، به دلیل یکسان بودن فضای پایه و آزمون در روش گالرکین، می‌توان اطمینان داشت که شرایط مرزی در هر دو فضا برقرار خواهند بود.

پایه‌های استفاده شده در این مقاله، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم‌یافته^۵ هستند. این چندجمله‌ای‌ها، شکل تعمیم‌یافته ژاکوبی‌های سنتی بوده به گونه‌ای که محدودیت $\alpha, \beta > -1$ را ندارند و برای هر α و β قابل تعریف و بکارگیری هستند. شکل کلی این چندجمله‌ای‌ها به صورت رابطه (۲) است.

¹ Fourier

² Adomian decomposition

³ Radial basis functions

⁴ Galerkin method

⁵ Generalized Jacobi polynomials

$$\phi_n(x) = d_n \left(L_n(x) - \frac{2(2n+5)}{2n+7} L_{n+2}(x) + \frac{2n+3}{2n+7} L_{n+4}(x) \right), \quad (14)$$

وقتی که:

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2(2n+3)^2(2n+5)}}. \quad (15)$$

۱.۲. پیاده‌سازی روش گالرکین

فرض کنیم Δt طول گام زمانی باشد و قرار می‌دهیم $t_n = n\Delta t$ وقتی که $n = 0, 1, \dots, N_t$ باشد. روش گالرکین برای یافتن جواب معادله (۱) عبارت است از یافتن $u_N \in V_N$ به گونه‌ای که:

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 u_N, v_N) - (\partial_x^2 u_N, v_N) - (\partial_x^2 (u^2)_N, v_N) \\ + (\partial_x^4 u_N, v_N) \\ = (f(x), v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (16)$$

با گسسته‌سازی مشتق زمانی با استفاده از روش کرانک نیکلسون^۱، معادله (۱۶) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_N^{k+1} - 2u_N^k + u_N^{k-1}}{\Delta t^2}, v_N \right) \\ - \left(\frac{\partial_x^2 u_N^{k+1} + \partial_x^2 u_N^{k-1}}{2}, v_N \right) \\ - (\partial_x^2 (u_N^2)^k, v_N) \\ + \left(\frac{\partial_x^4 u_N^{k+1} + \partial_x^4 u_N^{k-1}}{2}, v_N \right) \\ = (f^k, v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (17)$$

پس از مرتب‌سازی معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_N^{k+1}}{\Delta t^2}, v_N \right) - \left(\frac{\partial_x^2 u_N^{k+1}}{2}, v_N \right) + \left(\frac{\partial_x^4 u_N^{k+1}}{2}, v_N \right) \\ = \left(\frac{2u_N^k}{\Delta t^2}, v_N \right) + (\partial_x^2 (u_N^2)^k, v_N) \\ - \left(\frac{u_N^{k-1}}{\Delta t^2}, v_N \right) + \left(\frac{\partial_x^2 u_N^{k-1}}{2}, v_N \right) \\ - \left(\frac{\partial_x^4 u_N^{k-1}}{2}, v_N \right) \\ + (f^k, v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (18)$$

تابع وزن چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به ازای هر مقدار $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w^{\alpha, \beta}(x) := (1-x)^\alpha (1+x)^\beta. \quad (8)$$

می‌توان نشان داد که رابطه زیر در بین توابع وزن برقرار است:

$$w^{-1,2} \leq 2w^{-1,1} \leq 2w^{-2,0}. \quad (9)$$

همچنین، مجموعه غیریکناخت فضای سوبولوف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_{w^{\alpha, \beta}}^m(I) = \{u \in L_{w^{\alpha, \beta}}^2 \mid \partial_x^l u \in L_{w^{l-\alpha, l-\beta}}^2(I), 1 \leq l \leq m\}. \quad (10)$$

۲. روش پیشنهادی

در این بخش، روش حل معادله (۱) پیشنهاد می‌شود. از آنجایی که پایه‌ها بر اساس شرایط مرزی مساله ساخته می‌شوند، لذا با توجه به شرایط مرزی (۴) و (۵)، پایه‌ها را بر اساس $J_n^{-2,-2}(x)$ می‌سازیم. همچنین بر اساس تعریف n_0 در رابطه (۲)، باید $n \geq 4$ باشد. بنابراین فضای پایه برای حل مساله به صورت زیر است:

$$V_N = \text{span}\{J_n^{-2,-2}, n = 4, 5, \dots, N\}. \quad (11)$$

و به طور دقیق‌تر، اگر P_N فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه N باشد در این صورت داریم:

$$V_N = \{u \in P_N \mid u(\pm 1) = u_x(\pm 1) = 0\}. \quad (12)$$

پایه‌های فضا را به صورت $\phi_n(x) = \gamma_n J_{n+4}^{-2,-2}(x)$ به گونه‌ای می‌سازیم تا شرط دلتای کرونکر زیر برقرار باشد:

$$(\phi_i'', \phi_j'') = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N-4. \quad (13)$$

با توجه به رابطه بین چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و لژاندر، پایه‌های مورد نظر را می‌توان بر اساس چندجمله‌ای‌های لژاندر به شکل رابطه (۱۴) تقریب زد [۷]:

¹ Crank-Nicolson

با استفاده از روش جزء-به-جزء، رابطه (۱۸) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (u_N^{k+1}, v_N) + \frac{1}{2} (\partial_x u_N^{k+1}, \partial_x v_N) + \frac{1}{2} (\partial_x^2 u_N^{k+1}, \partial_x^2 v_N) \\ &= \frac{2}{\Delta t^2} (u_N^k, v_N) + (\partial_x^2 (u_N^k)^2, v_N) \\ & - \frac{1}{\Delta t^2} (u_N^{k-1}, v_N) - \frac{1}{2} (\partial_x u_N^{k-1}, \partial_x v_N) \\ & + \frac{1}{2} (\partial_x^3 u_N^{k-1}, \partial_x v_N) \\ & + (f^k, v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned}$$

(۱۹)

فرض می‌کنیم جواب تقریبی معادله (۱) در هر گام زمانی به شکل $u_N^k = \sum_{j=0}^{N-4} \hat{u}_j^k \phi_j(x)$ باشد. با قرار دادن $v_N = \phi_i(x)$ در رابطه (۱۹)، در هر گام زمانی باید دستگاه معادلات خطی زیر را حل نمود:

$$(A + B + C)u^{k+1} = f, \quad (20)$$

به طوری که $u^k = (\hat{u}_0^k, \hat{u}_1^k, \dots, \hat{u}_{N-4}^k)^T$ باشد.

ماتریس‌های ضرایب سمت چپ یعنی A ، B و C ماتریس‌های به ترتیب پنج قطری، سه قطری هستند. به عبارت دیگر $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq N-4}$ وقتی که $a_{ij} = (\phi_j, \phi_i)$ و $a_{ij} = 0$ اگر $i \neq j, j \pm 2, j \pm 4$ و $B = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq N-4}$ وقتی که $b_{ij} = (\phi_j', \phi_i')$ اگر $i \neq j, j \pm 2$ و $b_{ij} = 0$ و $C = (\phi_j'', \phi_i'')$ یک ماتریس همانی است. درایه‌های بردار سمت راست f از ضرب داخلی مقادیر گام‌های قبلی و تابع معلوم سمت راست در پایه ϕ_i حاصل می‌شود.

۲.۲. تخمین خطا

قبل از اینکه به بررسی حداکثر کران خطای روش پیشنهادی در بخش قبل بپردازیم، چند لم مهم را بیان می‌کنیم.

لم ۱: عملگر متعامد $\pi_N = \pi_N^{(-2,-2)}: L_{w^{-2,-2}}^2 \rightarrow V_N$ را به صورت رابطه (۲۱) تعریف می‌کنیم.

$$(u - \pi_N u, v)_{w^{-2,-2}} = 0, \quad \forall v \in V_N. \quad (21)$$

در این صورت برای هر $u \in H_{w^{-2,-2}}^2$ داریم:

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 (u - \pi_N u), \partial_x^2 v) &= (u - \pi_N u, w^{2,2} \partial_x^4 v)_{w^{-2,-2}} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

لم ۲: برای هر $u, v \in V_N$ رابطه زیر برقرار است [۹]:

$$|u + v|^p \leq 2^p (|u|^p + |v|^p). \quad (23)$$

لم ۳: برای هر $u \in V_N$ رابطه زیر برقرار است [۱۰]:

$$\begin{aligned} \int_I \frac{u^2}{(1-x)^6} dx &\leq \frac{4}{25} \int_I \frac{u_x^2}{(1-x)^4} dx \\ &\leq \frac{16}{225} \int_I \frac{u_{xx}^2}{(1-x)^2} dx. \end{aligned} \quad (24)$$

لم ۴ (نامساوی گرانوال) [۹]: فرض کنید $\{y_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌های نامنفی و c یک ثابت نامنفی باشد. اگر

$$y_n \leq c + \sum_{0 \leq k < n} g_k y_k, \quad n \geq 0, \quad (25)$$

در این صورت داریم:

$$y_n \leq c \prod_{0 \leq j < n} (1 + g_j) \leq c \exp \left(\sum_{0 \leq j < n} g_j \right), \quad n \geq 0. \quad (26)$$

لم ۵: برای هر $u \in H_{w^{-2,-2}}^m$ و $0 \leq l \leq m$ داریم [۱۰]:

$$\|\partial_x^l (u - \pi_N u)\|_{w^{l-2,l-2}} \lesssim N^{l-m} \|\partial_x^m u\|_{w^{m-2,m-2}}. \quad (27)$$

لم ۶ (نامساوی یانگ): اگر $1 < p < +\infty$ و $q > 1$ نمای مزدوج p باشد، به ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی α و β داریم:

اگر در رابطه (۳۴) روش گالرکین را مانند رابطه (۳۲) پیاده‌سازی کنیم و سپس رابطه (۳۲) را از آن کم کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (\hat{e}_N^{k+1} - 2\hat{e}_N^k + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k \\ & + \tilde{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} \\ & + \frac{1}{2} (\partial_x (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} \\ & + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}} \\ & + \frac{1}{2} (\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} \\ & + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} \\ & = (u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} \\ & + (E^k, v_N)_{w^{-1,1}}. \end{aligned} \quad (35)$$

با توجه به لم ۱، رابطه (۳۵) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (\hat{e}_N^{k+1} - 2\hat{e}_N^k + \hat{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} \\ & + \frac{1}{2} (\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}), \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} \\ & = (u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} \\ & + (E^k, v_N)_{w^{-1,1}} \\ & - \frac{1}{\Delta t^2} (\tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \tilde{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} \\ & - \frac{1}{2} (\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} \\ & + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}}, \quad \forall v_N \in V_N \end{aligned} \quad (36)$$

سمت راست رابطه (۳۶) را برابر $RHS(v_N)$ در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $v_N = \Delta t^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})$ در این صورت:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (\hat{e}_N^{k+1} - 2\hat{e}_N^k + \hat{e}_N^{k-1}, \Delta t^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}))_{w^{-1,1}} \\ & + \frac{1}{2} (\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}), \partial_x^2 (\Delta t^2 (\hat{e}_N^{k+1} \\ & + \hat{e}_N^{k-1})))_{w^{-1,1}} = RHS(v_N). \end{aligned} \quad (37)$$

با انجام برخی محاسبات، رابطه (۳۷) به شکل رابطه (۳۸) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} & \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2(\hat{e}_N^{k+1}, \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} \\ & - 2(\hat{e}_N^k, \hat{e}_N^{k+1})_{w^{-1,1}} \\ & - 2(\hat{e}_N^k, \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} \\ & + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ & = RHS(v_N). \end{aligned} \quad (38)$$

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}. \quad (28)$$

همچنین با فرض $|u(x, t)| \leq M$ تابع برش $H(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 2M, \\ 2M, & x > 2M, \\ -2M, & x < -2M. \end{cases} \quad (29)$$

می‌توان نشان داد که:

$$|H(x) - H(y)| \leq |x - y|, \quad \forall x, y. \quad (30)$$

حال ضرب‌های داخلی در الگوریتم روش پیشنهادی یعنی رابطه (۱۹) را به صورت وزن‌دار بازنویسی می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (u_N^{k+1} - 2u_N^k + u_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} \\ & + \frac{1}{2} (\partial_x (u_N^{k+1} + u_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}} \\ & + \frac{1}{2} (\partial_x^2 (u_N^{k+1} + u_N^{k-1}), \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} \\ & = (f(\cdot, t_k), v_N)_{w^{-1,1}} \\ & + (H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 (v_N w^{-1,1})), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (31)$$

فرض کنیم $u(\cdot, t_k)$ و u_N^k به ترتیب نشان‌دهنده جواب واقعی و تقریبی در زمان t_k باشد، قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \hat{e}_N^k &= \pi_N u(\cdot, t_k) - u_N^k, \\ \tilde{e}_N^k &= u(\cdot, t_k) - \pi_N u(\cdot, t_k), \\ e_N^k &= u(\cdot, t_k) - u_N^k. \end{aligned} \quad (32)$$

قضیه ۱: طرح عددی پیشنهادی (۳۱) پایدار نامشروط است و تخمین خطای زیر برقرار است:

$$\|e_N^{n+1}\|_{w^{-1,1}} \lesssim C(\Delta t^2 + N^{-m}). \quad (33)$$

اثبات: فرض کنیم $E^k(\cdot)$ خطای برشی طرح و به صورت رابطه (۳۴) باشد.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (u(\cdot, t_{k+1}) - 2u(\cdot, t_k) + u(\cdot, t_{k-1})) \\ & - \frac{1}{2} \partial_x^2 (u(\cdot, t_{k+1}) + u(\cdot, t_{k-1})) \\ & - \partial_x^2 (u^2(\cdot, t_k)) \\ & + \frac{1}{2} \partial_x^4 (u(\cdot, t_{k+1}) + u(\cdot, t_{k-1})) \\ & - f(\cdot, t_k) = E^k(\cdot). \end{aligned} \quad (34)$$

با استفاده از نامساوی‌های کوشی-شوارتز و یانگ، رابطه (۳۸) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 &= \Delta t^2 \left\| u(\cdot, t_k) \left(H(u(\cdot, t_k)) - H(u_N^k) \right) \right. \\
 &\quad \left. + H(u_N^k)(u(\cdot, t_k) - u_N^k) \right\|_{w^{-1,1}} \cdot \left\| \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) \right\|_{w^{-1,1}} \\
 &\leq \Delta t^2 \left(\left\| u(\cdot, t_k) \left(H(u(\cdot, t_k)) - H(u_N^k) \right) \right\|_{w^{-1,1}} \right. \\
 &\quad \left. + \left\| H(u_N^k)(u(\cdot, t_k) - u_N^k) \right\|_{w^{-1,1}} \right) \cdot \left\| \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) \right\|_{w^{-1,1}} \\
 &\leq 2M\Delta t^2 \left\| e_N^k \right\|_{w^{-1,1}} \cdot \left\| \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) \right\|_{w^{-1,1}} \\
 &\leq M\Delta t^2 \left\| e_N^k \right\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + M\Delta t^2 \left\| \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) \right\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &= M\Delta t^2 \left\| \hat{e}_N^k + \tilde{e}_N^k \right\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + M\Delta t^2 \left\| \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) \right\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\leq c_1 \Delta t^2 \left\| \hat{e}_N^k \right\|_{w^{-1,1}}^2 + c_1 \Delta t^2 \left\| \tilde{e}_N^k \right\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + M\Delta t^2 \left\| \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) \right\|_{w^{-1,1}}^2
 \end{aligned} \tag{۴۱}$$

همچنین با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز، رابطه (۹) و لم ۳،

داریم:

$$\begin{aligned}
 (E^k, v_N)_{w^{-1,1}} &= \Delta t^2 (E^k, \hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} \\
 &\leq \Delta t^2 \|E^k\|_{w^{-1,1}} \cdot \|\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}} \\
 &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \|\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \|\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-6,0}}^2 \\
 &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + c_2 \Delta t^2 \left\| \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) \right\|_{w^{-2,0}}^2
 \end{aligned} \tag{۴۲}$$

برای ادامه محاسبات لازم است تعریف کنیم:

$$\tilde{E}^k := \frac{1}{\Delta t^2} (\tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \tilde{e}_N^{k-1}). \tag{۴۳}$$

$$\begin{aligned}
 &\left\| \hat{e}_N^{k+1} \right\|_{w^{-1,1}}^2 + \left\| \hat{e}_N^{k-1} \right\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \left\| \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) \right\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &= -2(\hat{e}_N^{k+1}, \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} \\
 &\quad + 2(\hat{e}_N^k, \hat{e}_N^{k+1})_{w^{-1,1}} \\
 &\quad + 2(\hat{e}_N^k, \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} + RHS(v_N) \\
 &\leq 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}} \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}} \\
 &\quad + 2\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}} \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}} \\
 &\quad + 2\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}} \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}} \\
 &\quad + RHS(v_N) \\
 &\leq \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + \|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + \|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + RHS(v_N) \\
 &= 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\
 &\quad + 2\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + RHS(v_N).
 \end{aligned} \tag{۳۹}$$

در ادامه کران‌های $RHS(v_N)$ را بررسی خواهیم کرد. با توجه به تعریف $RHS(v_N)$ داریم:

$$\begin{aligned}
 RHS(v_N) &= (u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} \\
 &\quad + (E^k, v_N)_{w^{-1,1}} \\
 &\quad - \frac{1}{\Delta t^2} (\tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \tilde{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} (\partial_x (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} \\
 &\quad + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}}.
 \end{aligned} \tag{۴۰}$$

برای جمله اول، با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز، رابطه (۳۰)، نامساوی یانگ و لم ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 &(u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} \\
 &= \Delta t^2 (u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} \\
 &\quad + \hat{e}_N^{k-1}))_{w^{-1,1}} \\
 &\leq \Delta t^2 \|u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k\|_{w^{-1,1}} \cdot \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} \\
 &\quad + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}
 \end{aligned}$$

در این صورت می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t^2} (\tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \tilde{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} &= (\tilde{E}^k, v_N)_{w^{-1,1}} \\ &\leq \Delta t^2 \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 \|\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}\|_{w^{-6,0}}^2 \\ &\leq \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ &\quad + c_3 \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2. \end{aligned} \quad (44)$$

برای آخرین جمله از رابطه (۴۰) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}} \\ = \frac{1}{2} (\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}) + \partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}} \\ \leq \frac{1}{2} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}) + \partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} \|\partial_x v_N\|_{w^{-1,1}} \\ \leq \frac{1}{2} (\|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} + \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}) \|\partial_x v_N\|_{w^{-1,1}} \\ = \frac{1}{2} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} \|\partial_x v_N\|_{w^{-1,1}} \\ + \frac{1}{2} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} \|\partial_x v_N\|_{w^{-1,1}} \\ \leq \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ = \frac{3\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ \leq \frac{3\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-4,0}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ \leq c_4 \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2. \end{aligned}$$

(۴۵)

با جایگذاری روابط (۴۱) تا (۴۵) در رابطه (۳۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\tilde{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ \leq 2\|\tilde{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\tilde{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + 2\|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + M \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + c_2 \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 \\ - \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ - c_3 \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 \\ - c_4 \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 \\ - \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2. \end{aligned} \quad (46)$$

که با استفاده از رابطه (۹) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \|\tilde{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\tilde{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ \leq 2\|\tilde{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\tilde{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + (2 + c_1 \Delta t^2) \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 - \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \left(M - \frac{1}{2}\right) \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + (c_2 - c_3) \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 \\ - \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ \leq 2\|\tilde{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\tilde{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + (2 + c_1 \Delta t^2) \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 - \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ + (c_2 - c_3 - c_4 + M - \frac{1}{2}) \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 \\ - \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x (\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2. \end{aligned}$$

(۴۷)

در نهایت داریم:

$$\begin{aligned} & \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \left(-c_2 + c_3 + c_4 - M\right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\right) \Delta t^2 \|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 \\ & \leq c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ & \quad - \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ & \quad - \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \\ & \quad + 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ & \quad + (2 + c_1 \Delta t^2) \|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2. \end{aligned} \quad (48)$$

رابطه (۴۸) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 & \leq c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 \\ & \quad + 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \\ & \quad + (2 + c_1 \Delta t^2) \|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2. \end{aligned} \quad (49)$$

با استفاده از لم‌های ۴ و ۵ و از آنجایی که $e_N^k = \hat{e}_N^k + \tilde{e}_N^k$ است، اثبات قضیه به شکل زیر کامل می‌شود:

$$\|e_N^{n+1}\|_{w^{-1,1}} \lesssim C(\Delta t^2 + N^{-m}) \quad (50)$$

■

۳.۲. نتایج عددی

معادله (۱) را توسط الگوریتم پیشنهاد شده روی بازه مکانی $[-1, 1]$ و با بکارگیری نقاط گره‌ای لژاندر-گوس-لوباتو^۱ و در بازه زمانی $[0, T]$ حل کردیم. گام‌های زمانی با استفاده از فرمول $\Delta t = \frac{T}{N_t}$ محاسبه شده‌اند. جدول (۱) نرم بی‌نهایت خطا و زمان محاسباتی به ازای $N = 64$ و $T = 0.5$ و N_t های مختلف را نمایش می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با کاهش طول گام زمانی، دقت افزایش و نتایج در زمان محاسباتی بسیار پایین حاصل می‌شوند. در جداول (۲) و (۳)، نرم بی‌نهایت خطا و زمان محاسباتی به ازای $N = 128$ نقطه مکانی و مقادیر متفاوت N_t

و T محاسبه شده‌اند. جواب واقعی معادله به صورت $u(x) = (1 + \sin(t^3))x^4(1 - x^2)^4$ است. در جداول زیر، منظور از خطا نرم بی‌نهایت خطا در گام نهایی زمان است که از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\|e_N^{N_t}\|_{\infty} = \max |u_N^{N_t} - u(., T)|. \quad (51)$$

جدول (۱): نرم بی‌نهایت خطا و زمان محاسبه به ازای $N = 64$ و $T = 0.5$ و N_t های مختلف.

N_t	خطا	زمان محاسباتی (ثانیه)
16	2.7123×10^{-3}	0.015996
32	6.1905×10^{-4}	0.026497
64	1.4317×10^{-4}	0.036913
128	7.0920×10^{-5}	0.063417
256	1.7571×10^{-5}	0.138719

جدول (۲): نرم بی‌نهایت خطا و زمان محاسبه به ازای $N = 128$ و

$N_t = 1000$ و برای مقادیر متفاوت T

T	خطا	زمان محاسباتی (ثانیه)
0.5	8.2818×10^{-9}	1.040203
1	3.6964×10^{-8}	1.084787
2	5.2839×10^{-6}	1.092259
5	2.0014×10^{-3}	1.099587

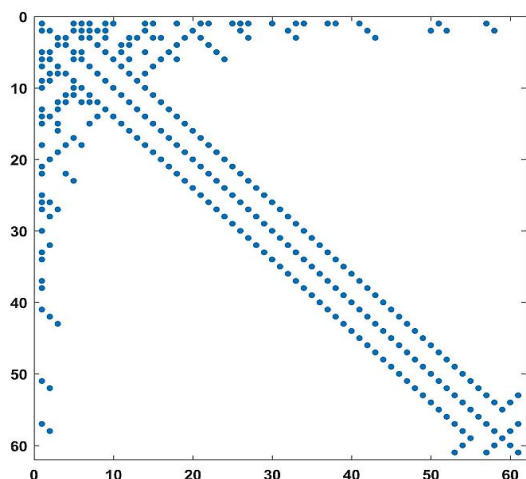
جدول (۳): نرم بی‌نهایت خطا و زمان محاسباتی به ازای $N = 128$ و

$N_t = 2000$ و برای مقادیر متفاوت T

T	خطا	زمان محاسباتی (ثانیه)
0.5	2.0683×10^{-9}	1.969159
1	9.2257×10^{-9}	2.148417
2	1.3207×10^{-6}	2.288683
5	4.4957×10^{-4}	2.326207

شکل (۱) نمودار خطا را به ازای $N = 100$ و $T = 0.5$ نشان می‌دهد و در شکل (۲) جواب تقریبی معادله به ازای $N = 128$ و $T = 5$ رسم شده است. همچنین شکل (۳) ساختار تنک بودن ماتریس ضرایب حاصل برای $N = 64$ در حل مساله را نشان می‌دهد.

¹ Legendre-Gauss-Lobatto

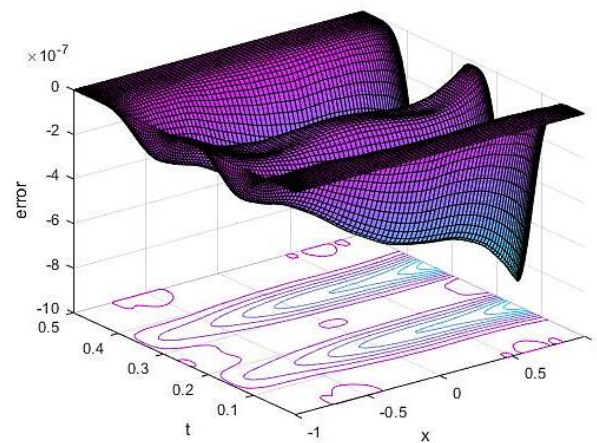


شکل (۳): ساختار تنک بودن ماتریس ضرایب حاصل برای $N = 64$.

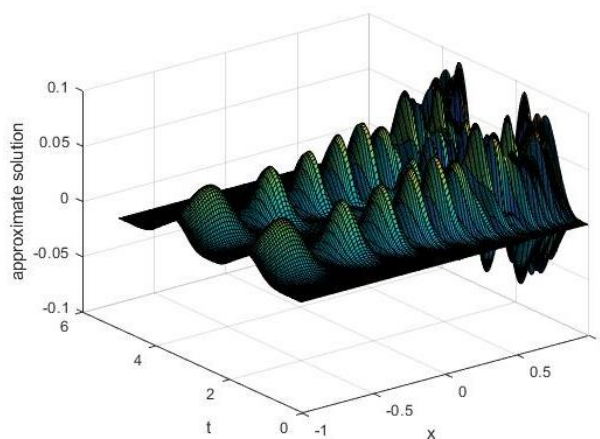
۳. نتیجه گیری

در این مقاله، روش گالرکین برای گسسته‌سازی مکان و روش کرانک نیکلسون لیپ-فراگ برای گسسته‌سازی زمانی معادله بوزینسک پیشنهاد گردید. از آنجایی که چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم‌یافته در شرایط مرزی مساله صدق کردند، دیگری نیازی به بررسی مجزا این شرایط نمی‌باشد. استفاده از این چندجمله‌ای‌ها به عنوان پایه باعث شد تا ماتریس ضرایب تنک و در نتیجه سرعت اجرای برنامه مطلوب‌تر شود. روش پیشنهادی برای حل معادلات با مراتب زوج قابل استفاده و تعمیم می‌باشد.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافی ندارند.



شکل (۱): نمودار کانتور خطا به ازای $N_t = N = 100$ و در زمان‌های مختلف.



شکل (۲): نمودار جواب تقریبی به ازای $N = 128$, $N_t = 125$ و در زمان‌های مختلف.

مراجع

- [1] A. Mohebbi and Z. Asgari, "Efficient numerical algorithms for the solution of good Boussinesq equation in water wave propagation," Comput. Phys. Commun., vol. 182, no. 12, pp. 2464-2470, 2011, doi: 10.1016/j.cpc.2011.07.004.
- [2] A.M. Wazwaz, "Constructions of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method," Chaos Solitons Fractals, vol. 12, no. 8, pp. 1549-1556, 2001, doi: 10.1016/S0960-0779(00)00133-8.
- [3] A. Shokri and M. Dehghan, "A Not-a-Knot meshless method using radial basis functions and predictor-corrector scheme to the numerical solution of improved Boussinesq equation," Comput. Phys. Commun., vol. 181, no. 12, pp. 1990-2000, 2010, doi: 10.1016/j.cpc.2010.08.035.
- [4] A.G. Bratsos, "A second order numerical scheme for the solution of the one-dimensional Boussinesq equation," Numer. Algorithms, vol. 46, no. 1, pp. 45-58, 2007, doi: 10.1007/s11075-007-9126-y.
- [5] M.S. Ismail and F. Mosally, "A fourth order finite difference method for the good Boussinesq

- equation,” *Abs. Appl. Anal.*, vol. 2014, no. 1, p. 323260, 2014, doi: 10.1155/2014/323260.
- [6] Y. Ucar, A. Esen, and B. Karaagac, “Numerical solutions of Boussinesq equation using Galerkin finite element method,” *Numer. Methods Partial Diff. Equ.*, vol. 37, no. 2, pp. 1612-1630, 2020, doi: 10.1002/num.22600.
- [7] J. Shen, T. Tang, and L.-L. Wang, *Spectral Methods Algorithms, Analysis and Applications*, Springer Berlin, Heidelberg, 2011, doi: 10.1007/978-3-540-71041-7.
- [8] J. Shen, “A new dual-Petrov-Galerkin method for third and higher odd-order differential equations: application to the KdV equation,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 41, no. 5, pp. 1595-1619, 2003, doi: 10.1137/S0036142902410271.
- [9] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, and A. Mohebbi, “The numerical solution of the two-dimensional sinh-Gordon equation via three meshless methods,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 51, pp. 220-235, 2015, doi: 10.1016/j.enganabound.2014.10.015
- [10] J.-M. Yuan, J. Shen, and J. Wu, “A Dual-Petrov-Galerkin Method for the Kawahara-Type Equations,” *J. Sci. Comput.*, vol. 34, no. 1, pp. 48-63, 2008, doi: 10.1007/s10915-007-9158-4.