

شبیه سازی عددی موج های بلند آب مدل سازی شده توسط معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی بوزینسک با استفاده از یک تقریب طیفی

حوریه فخاری^۱، دانشجوی دکتری، اکبر محبی^{*}، دانشیار

^۱ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده: در این مقاله، روش گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی بوزینسک که توصیف کننده امواج آب می باشد ارائه می گردد. ایده اصلی استفاده از چندجمله ای های ژاکوبی تعمیم یافته به عنوان توابع پایه ای برای مشتقات مکانی به گونه ای می باشد که شرایط مرزی معادله را برآورده سازد. برای پرهیز از حل دستگاه معادلات غیرخطی، روش لپ فراگ-کرانک نیکلسون برای گسسته سازی زمانی معادله پیشنهاد می گردد. تخمین خطای طرح پیشنهادی به صورت دقیق مورد بررسی قرار گرفته و نتایج عددی نشان دهنده دقت بالای روش و زمان محاسباتی پایین و مؤید نتایج تئوری می باشد. همچنین نتایج حاصل نشان می دهد این روش برای معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی و از مراتب زوج کارآمد می باشد.

واژه های کلیدی: چندجمله ای های ژاکوبی تعمیم یافته، معادله بوزینسک، روش گالرکین، روش طیفی، تخمین خطا

* نویسنده مسئول، a_mohebbi@kashanu.ac.ir

Numerical simulation of water long waves modeled by nonlinear Boussinesq partial differential equation using a spectral approximation

Akbar Mohebbi ^{1*}, Associate Professor, Hoorieh Fakhari ¹, PhD Student

¹ Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Science,

University of Kashan, Kashan, Iran

Abstract: In this paper, Galerkin method is proposed for the solution of the nonlinear Boussinesq partial differential equation describing water waves. The main idea is to use generalized Jacobi polynomials (GJPs) as basis functions to deal with spatial derivative such that boundary conditions are satisfied. Error estimate of proposed method is investigated and numerical results show the high accuracy and low CPU time of proposed method and confirmed the theoretical ones. Also, the obtained results show that the method is suitable for nonlinear and even-order partial differential equations.

Keywords: *Generalized Jacobi polynomials; Boussinesq equation; Galerkin method; Spectral method; Error estimate.*

* corresponding author, a_mohebbi@kashanu.ac.ir

۱. مقدمه

فقط به بررسی آنالیز پایداری پرداخته‌اند و بقیه مراجع فاقد تحلیل پایداری و تخمین خطا می‌باشند. در این مقاله، علاوه بر پیشنهاد یک روش از مرتبه دقت بالا، تحلیل همگرایی و تخمین خطای روش پیشنهادی بررسی گردیده است. ایده اصلی، استفاده از الگوریتم طیفی گالرکین^۱ با استفاده از ترکیب فشرده چندجمله‌ای‌های متعامد تعمیم‌یافته به عنوان پایه به گونه‌ای است که شرایط مرزی همگن معادله برآورده شود. از آنجائی‌که، عملگرهای دیفرانسیل در این معادله به سبب زوج بودن، متقارن هستند از روش گالرکین استفاده کرده‌ایم و این امر موجب آسان‌تر شدن برنامه‌نویسی و همچنین بررسی آنالیز روش گردیده است. از طرفی، به دلیل یکسان بودن فضای پایه و تست در روش گالرکین، می‌توان اطمینان داشت که شرایط مرزی در هر دو فضا برقرار خواهند بود.

پایه‌های استفاده شده در این مقاله، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم‌یافته^۲ هستند. این چندجمله‌ای‌ها، شکل تعمیم‌یافته ژاکوبی‌های کلاسیک بوده به گونه‌ای که محدودیت $\alpha, \beta > -1$ را ندارند و برای هر α, β قابل تعریف و به‌کارگیری هستند. شکل کلی این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است

$$J_n^{\alpha, \beta} := \begin{cases} (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} P_{n-n_0}^{\alpha, -\beta}, & \alpha, \beta \leq -1 \\ (1-x)^{-\alpha} P_{n-n_0}^{\alpha, \beta}, & \alpha \leq -1, \beta > -1 \\ (1+x)^{-\beta} P_{n-n_0}^{\alpha, -\beta}, & \alpha > -1, \beta \leq -1, \end{cases} \quad (2)$$

به طوری‌که $n_0 := -(\alpha + \beta)$ برای $n \geq n_0$ و منظور از $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی کلاسیک است که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۵]

معادلات دیفرانسیل مراتب بالا برای مدل سازی پدیده‌های فیزیکی کاربرد بسیار زیادی دارند. برای مثال معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی بالای زوج غالباً در مسائل مربوط به اختربفیزیک^۳، مکانیک سازه^۲ و ژئوفیزیک^۳ ظاهر می‌شوند. در این مقاله، معادله بوزینسک^۴ را که در شبیه سازی امواج آب، پلاسما، لیزر و فیبرنوری کاربرد دارد مورد بررسی قرار می‌دهیم. شکل کلی این معادله به صورت زیر است

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} + u_{xxxx} = f(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in [-1, 1] \times [0, 1],$$

با شرایط اولیه

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi_1(x), \\ u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \end{cases} \quad x \in [-1, 1],$$

و شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(-1, t) = u(1, t) = 0, \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

چالش عمده در حل این معادله، مرتبه بالای مشتق و غیرخطی بودن آن می‌باشد که ارائه یک الگوریتم دقیق و پایدار برای شبیه‌سازی جواب‌های عددی را بسیار ضروری می‌سازد. معادله‌ی بوزینسک در سال‌های قبل با استفاده از روش‌های مختلفی نظیر روش طیفی فوریه^۵ [۲]، تجزیه‌ی آدومیان^۶ [۶]، توابع پایه شعاعی^۷ [۸]، روش‌های تفاضلات متناهی مرتبه دوم و چهارم [۹ و ۷] و روش عناصر متناهی [۱۰] حل و بررسی شده است. در روش‌های عددی پیشنهادی فوق، برخی از مقالات

^۱ Astrophysics
^۲ Structural mechanics
^۳ Geophysics
^۴ Boussinesq
^۵ Fourier
^۶ Adomian decomposition
^۷ Radial basis functions

^۱ Galerkin method

^۲ Generalized Jacobi polynomials

$$w^{\alpha,\beta}(x) := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta. \quad (7)$$

می‌توان نشان داد که رابطه زیر در بین توابع وزن برقرار است

$$w^{-1,2} \leq 2w^{-1,1} \leq 2w^{-2,0}. \quad (8)$$

همچنین، مجموعه غیریکنواخت فضای سوبولوف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H_{w^{\alpha,\beta}}^m(I) = \{u \in L_{w^{\alpha,\beta}}^2 \mid \partial_x^l u \in L_{w^{l-\alpha,l-\beta}}^2(I), \\ 1 \leq l \leq m\}.$$

۲. روش پیشنهادی

در این بخش، روش حل معادله (۱) پیشنهاد می‌شود. از آنجائی که پایه‌ها براساس شرایط مرزی مسئله ساخته می‌شوند لذا با توجه به شرایط مرزی (۳) و (۴)، پایه‌ها را براساس $J_n^{-2,-2}(x)$ می‌سازیم. همچنین براساس تعریف n_0 در رابطه (۲)، باید $n \geq 4$ باشد. بنابراین فضای پایه برای حل مسئله به صورت زیر است

$$V_N = \text{span}\{J_n^{-2,-2}, n = 4, 5, \dots, N\}.$$

و به‌طور دقیق‌تر، اگر P_N فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه N باشد در این صورت

$$V_N = \{u \in P_N \mid u(\pm 1) = u_x(\pm 1) = 0\}.$$

پایه‌های فضا را به صورت $\phi_n(x) = \gamma_n J_{n+4}^{-2,-2}(x)$ به گونه‌ای می‌سازیم تا شرط دلتای کرونکر زیر برقرار باشد

$$(\phi_i'', \phi_j'') = \delta_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, N-4. \quad (8)$$

با توجه به رابطه بین چندجمله‌ای‌های ژاکوبی و لژاندر، پایه‌های مورد نظر را می‌توان براساس چندجمله‌ای‌های لژاندر به شکل زیر تقریب زد [۵]

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k.$$

از جمله ویژگی‌های مهم این چندجمله‌ای‌ها می‌توان به عمود بودن آنها برهم و صفر بودن مشتقاتشان در نقاط مرزی اشاره کرد. به بیان دقیق‌تر

$$\partial_x^i J_n^{-\alpha,-\beta}(1) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \alpha-1, \quad (3)$$

$$\partial_x^j J_n^{-\alpha,-\beta}(-1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \beta-1. \quad (4)$$

لازم به ذکر است این ویژگی ما را در برقراری شرایط مرزی یاری می‌کند. ماتریس ضرایب حاصل از حل مساله با استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم یافته تنک و همین امر منجر به خوش‌وضع و کاهش حجم محاسبات می‌گردد. همچنین، استفاده از این چندجمله‌ای‌ها باعث ساده‌تر شدن تجزیه و تحلیل روش و تخمین بهینه کران خطا می‌شود.

ما در این پژوهش از فضای سوبولوف وزن دار $H_w^m(\Omega)$ با نرم $\|\cdot\|_{m,w}$ و به‌طور خاص نرم $(m = 0, \pm 1, \dots)$ و ضرب داخلی در فضای $L_w^2(\Omega) = \dot{H}_w^1(\Omega)$ که به صورت $\|\cdot\|_w, (\cdot, \cdot)_w$ نمایش داده می‌شوند استفاده می‌کنیم. برای تابع وزن مثبت $w(x)$ تعریف می‌کنیم

$$L_w^2(\Omega) = \left\{ u \mid (u, u)_w = \int_{\Omega} u^2(x)w(x)dx < +\infty \right\}, \quad (5)$$

$$\|u\|_w = (u, u)_w^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

تابع وزن چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به ازای هر مقدار $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left(\frac{\partial_x^2 u_N^{k-1}}{2}, v_N\right) - \left(\frac{\partial_x^4 u_N^{k-1}}{2}, v_N\right) + (f^k, v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \quad (13)$$

با استفاده از روش جزء به جزء، رابطه (۱۳) به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (u_N^{k+1}, v_N) + \frac{1}{2} (\partial_x u_N^{k+1}, \partial_x v_N) + \\ & \frac{1}{2} (\partial_x^2 u_N^{k+1}, \partial_x^2 v_N) = \frac{2}{\Delta t^2} (u_N^k, v_N) + \\ & (\partial_x^2 (u_N^k)^2, v_N) - \frac{1}{\Delta t^2} (u_N^{k-1}, v_N) - \\ & \frac{1}{2} (\partial_x u_N^{k-1}, \partial_x v_N) + \frac{1}{2} (\partial_x^3 u_N^{k-1}, \partial_x v_N) + \\ & (f^k, v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (14)$$

فرض می‌کنیم جواب تقریبی معادله (۱) در هر گام زمانی به شکل $u_N^k = \sum_{j=0}^{N-4} \hat{u}_j^k \phi_j(x)$ باشد، با قرار دادن $v_N = \phi_i(x)$ در رابطه (۱۴)، در هر گام زمانی باید دستگاه معادلات خطی زیر را حل نمود

$$(A + B + C)u^{k+1} = f, \quad (15)$$

به طوری که

$$u^k = (\hat{u}_0^k, \hat{u}_1^k, \dots, \hat{u}_{N-4}^k)^T.$$

ماتریس‌های ضرایب سمت چپ یعنی C, B, A ماتریس‌های به ترتیب پنج قطری، سه قطری و قطری هستند به عبارت دیگر

$$A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq N-4}, \quad a_{ij} = (\phi_j, \phi_i),$$

و اگر $a_{ij} = 0$

$$i \neq j, \quad j \pm 2, \quad j \pm 4,$$

$$B = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq N-4}, \quad b_{ij} = (\phi_j', \phi_i'),$$

$$\phi_n(x) = d_n \left(L_n(x) - \frac{2(2n+5)}{2n+7} L_{n+2}(x) + \frac{2n+3}{2n+7} L_{n+4}(x) \right), \quad (10)$$

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{2(2n+3)^2(2n+5)}}.$$

۱.۲. پیاده سازی روش گالرکین

فرض کنیم Δt طول گام زمانی باشد و قرار می‌دهیم

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N_t.$$

روش گالرکین برای یافتن جواب معادله (۱) عبارت است از یافتن $u_N \in V_N$ به گونه‌ای که

$$\begin{aligned} & (\partial_t^2 u_N, v_N) - (\partial_x^2 u_N, v_N) - (\partial_x^2 (u_N^2), v_N) \\ & + (\partial_x^4 u_N, v_N) \\ & = (f(x), v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (11)$$

با گسسته‌سازی مشتق زمانی با استفاده از روش کرانک نیکلسون^{۱۱}، معادله (۱۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_N^{k+1} - 2u_N^k + u_N^{k-1}}{\Delta t^2}, v_N\right) - \left(\frac{\partial_x^2 u_N^{k+1} + \partial_x^2 u_N^{k-1}}{2}, v_N\right) - \\ & (\partial_x^2 (u_N^k)^2, v_N) + \left(\frac{\partial_x^4 u_N^{k+1} + \partial_x^4 u_N^{k-1}}{2}, v_N\right) = \\ & (f^k, v_N), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (12)$$

پس از مرتب سازی معادله بالا داریم

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_N^{k+1}}{\Delta t^2}, v_N\right) - \left(\frac{\partial_x^2 u_N^{k+1}}{2}, v_N\right) + \left(\frac{\partial_x^4 u_N^{k+1}}{2}, v_N\right) = \\ & \left(\frac{2u_N^k}{\Delta t^2}, v_N\right) + (\partial_x^2 (u_N^k)^2, v_N) - \left(\frac{u_N^{k-1}}{\Delta t^2}, v_N\right) + \end{aligned}$$

و اگر $b_{ij} = 0$

$$y_n \leq c + \sum_{0 \leq k < n} g_k y_k, \quad n \geq 0,$$

در این صورت

$$y_n \leq c \prod_{0 \leq j < n} (1 + g_j) \leq c \exp\left(\sum_{0 \leq j < n} g_j\right), \quad n \geq 0.$$

■

لم ۵: برای هر $u \in H_{W^{-2,-2}}^m$ و $0 \leq l \leq m$ داریم [۴]

$$\|\partial_x^l(u - \pi_N u)\|_{W^{l-2,l-2}} \lesssim N^{l-m} \|\partial_x^m u\|_{W^{m-2,m-2}}.$$

■

لم ۶ (نامساوی یانگ): اگر $1 < p < +\infty$ و $q > 1$ نمای مزدوج p باشد، به ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی α و β داریم

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

■

همچنین با فرض $|u(x,t)| \leq M$ ، تابع برش $H(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 2M, \\ 2M, & x > 2M, \\ -2M, & x < -2M. \end{cases} \quad (۱۶)$$

می‌توان نشان داد

$$|H(x) - H(y)| \leq |x - y|, \quad \forall x, y. \quad (۱۷)$$

حال ضرب‌های داخلی در الگوریتم روش پیشنهادی یعنی رابطه (۱۴) را به صورت وزن دار بازنویسی می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت

$$i \neq j, \quad j \pm 2,$$

و ماتریس $C = (\phi_j'', \phi_i'')$ با توجه به رابطه (۹) یک ماتریس همبندی است. درایه‌های بردار سمت راست f از ضرب داخلی مقادیر گام‌های قبلی و تابع معلوم سمت راست در پایه ϕ_i حاصل می‌شود.

۲.۲. تخمین خطا

قبل از اینکه به بررسی حداکثر کران خطای روش پیشنهادی در بخش قبل بپردازیم چند لم مهم را بیان می‌کنیم.

لم ۱: عملگر متعامد $\pi_N = \pi_N^{(-2,-2)}: L_{W^{-2,-2}}^2 \rightarrow V_N$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(u - \pi_N u, v)_{W^{-2,-2}} = 0, \quad \forall v \in V_N.$$

در این صورت برای هر $u \in H_{W^{-2,-2}}^2$ [۳]

$$\begin{aligned} (\partial_x^2(u - \pi_N u), \partial_x^2 v) &= \\ (u - \pi_N u, w^{2,2} \partial_x^4 v)_{W^{-2,-2}} &= 0. \end{aligned}$$

■

لم ۲: برای هر $u, v \in V_N$ رابطه زیر برقرار است [۱]

$$|u + v|^p \leq 2^p (|u|^p + |v|^p).$$

■

لم ۳: برای هر $u \in V_N$ رابطه زیر برقرار است [۴]

$$\begin{aligned} \int_I \frac{u^2}{(1-x)^6} dx &\leq \\ \frac{4}{25} \int_I \frac{u_x^2}{(1-x)^4} dx &\leq \frac{16}{225} \int_I \frac{u_{xx}^2}{(1-x)^2} dx. \end{aligned}$$

■

لم ۴ (نامساوی گرانوال): فرض کنید $\{y_n\}$ و $\{g_n\}$

دنباله‌های نامنفی و C یک ثابت نامنفی باشد. اگر

$$\begin{aligned} & \tilde{e}_N^{k-1}, \partial_x v_N)_{w^{-1,1}} + \frac{1}{2} (\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1} + \\ & \tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} = (u^2(\cdot, t_k) - \\ & H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} + (E^k, v_N)_{w^{-1,1}}. \end{aligned} \quad (21)$$

با توجه به لم ۱، رابطه (۲۱) به صورت زیر قابل بازنویسی

است

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (\hat{e}_N^{k+1} - 2\hat{e}_N^k + \hat{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} + \\ & \frac{1}{2} (\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}), \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} = \\ & (u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} + \\ & (E^k, v_N)_{w^{-1,1}} - \frac{1}{\Delta t^2} (\tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \\ & \tilde{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} - \frac{1}{2} (\partial_x (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} + \\ & \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}}, \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (22)$$

سمت راست رابطه (۲۲) را برابر $RHS(v_N)$ و قرار می‌دهیم

$$v_N = \Delta t^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (\hat{e}_N^{k+1} - 2\hat{e}_N^k + \hat{e}_N^{k-1}, \Delta t^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \\ & \hat{e}_N^{k-1}))_{w^{-1,1}} + \\ & \frac{1}{2} (\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}), \partial_x^2 (\Delta t^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \\ & \hat{e}_N^{k-1})))_{w^{-1,1}} = RHS(v_N). \end{aligned} \quad (9)$$

با انجام برخی محاسبات، رابطه (۲۳) به شکل زیر بازنویسی

می‌شود

$$\begin{aligned} & \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2(\hat{e}_N^{k+1}, \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} - \\ & 2(\hat{e}_N^k, \hat{e}_N^{k+1})_{w^{-1,1}} - 2(\hat{e}_N^k, \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} + \\ & \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \\ & \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 = RHS(v_N). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (u_N^{k+1} - 2u_N^k + u_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} + \\ & \frac{1}{2} (\partial_x (u_N^{k+1} + u_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}} + \\ & \frac{1}{2} (\partial_x^2 (u_N^{k+1} + u_N^{k-1}), \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} = \\ & (f(\cdot, t_k), v_N)_{w^{-1,1}} + \\ & (H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 (v_N w^{-1,1})), \quad \forall v_N \in V_N. \end{aligned} \quad (18)$$

فرض کنیم $u(\cdot, t_k)$ و u_N^k به ترتیب نشان دهنده جواب

واقعی و تقریبی در زمان t_k باشد، قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \hat{e}_N^k &= \pi_N u(\cdot, t_k) - u_N^k, \\ \tilde{e}_N^k &= u(\cdot, t_k) - \pi_N u(\cdot, t_k), \\ e_N^k &= u(\cdot, t_k) - u_N^k. \end{aligned} \quad (19)$$

قضیه ۱: طرح عددی پیشنهادی (۱۸) پایدار نامشروط است و

تخمین خطای زیر برقرار است

$$\|e_N^{n+1}\|_{w^{-1,1}} \lesssim C(\Delta t^2 + N^{-m}).$$

اثبات: فرض کنیم $E^k(\cdot)$ خطای برشی طرح و به صورت زیر

باشد

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (u(\cdot, t_{k+1}) - 2u(\cdot, t_k) + u(\cdot, t_{k-1})) - \\ & \frac{1}{2} \partial_x^2 (u(\cdot, t_{k+1}) + u(\cdot, t_{k-1})) - \\ & \partial_x^2 (u^2(\cdot, t_k)) + \frac{1}{2} \partial_x^4 (u(\cdot, t_{k+1}) + \\ & u(\cdot, t_{k-1})) - f(\cdot, t_k) = E^k(\cdot). \end{aligned} \quad (20)$$

اگر در رابطه (۲۰) روش گالرکین را هم‌چون رابطه (۱۹) پیاده

سازی کنیم و سپس رابطه (۱۹) را از آن کم کنیم داریم

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t^2} (\hat{e}_N^{k+1} - 2\hat{e}_N^k + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \\ & \tilde{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} + \frac{1}{2} (\partial_x (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} + \end{aligned}$$

$$(u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} = \Delta t^2 (u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}))_{w^{-1,1}} \leq \quad (24)$$

با استفاده از نامساوی‌های کوشی-شوارتز و یانگ، رابطه

(24) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} & \Delta t^2 \|u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k\|_{w^{-1,1}} \cdot \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} = \Delta t^2 \|u(\cdot, t_k) (H(u(\cdot, t_k)) - H(u_N^k)) + H(u_N^k)(u(\cdot, t_k) - u_N^k)\|_{w^{-1,1}} \cdot \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} \leq \Delta t^2 (\|u(\cdot, t_k) (H(u(\cdot, t_k)) - H(u_N^k))\|_{w^{-1,1}} + \|H(u_N^k)(u(\cdot, t_k) - u_N^k)\|_{w^{-1,1}}) \cdot \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} \\ & \leq 2M\Delta t^2 \|e_N^k\|_{w^{-1,1}} \cdot \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} \leq M\Delta t^2 \|e_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + M\Delta t^2 \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 = M\Delta t^2 \|\hat{e}_N^k + \tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + M\Delta t^2 \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \leq c_1 \Delta t^2 \|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + M\Delta t^2 \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \end{aligned} \quad (27)$$

همچنین با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز، رابطه (8) و لم 3، داریم

$$\begin{aligned} (E^k, v_N)_{w^{-1,1}} &= \Delta t^2 (E^k, \hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} \leq \Delta t^2 \|E^k\|_{w^{-1,1}} \cdot \|\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}} \leq \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \|\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \leq \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \|\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-6,0}}^2 \leq \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_2 \Delta t^2 \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2, \end{aligned} \quad (28)$$

برای ادامه محاسبات لازم است تعریف کنیم

$$\begin{aligned} & \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \|\partial_x^2 (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 = -2(\hat{e}_N^{k+1}, \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} + 2(\hat{e}_N^k, \hat{e}_N^{k+1})_{w^{-1,1}} + 2(\hat{e}_N^k, \hat{e}_N^{k-1})_{w^{-1,1}} + RHS(v_N) \leq 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}} \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}} + 2\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}} \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}} + 2\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}} \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}} + RHS(v_N) \leq \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + RHS(v_N) = 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + RHS(v_N). \end{aligned} \quad (25)$$

در ادامه کران‌های $RHS(v_N)$ را بررسی خواهیم کرد. با توجه به تعریف $RHS(v_N)$ داریم

$$\begin{aligned} RHS(v_N) &= (u^2(\cdot, t_k) - H(u_N^k)u_N^k, \partial_x^2 v_N)_{w^{-1,1}} + (E^k, v_N)_{w^{-1,1}} - \frac{1}{\Delta t^2} (\tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \tilde{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} - \frac{1}{2} (\partial_x (\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}}. \end{aligned} \quad (26)$$

برای جمله اول، با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز،

رابطه (17)، نامساوی یانگ و لم 2 خواهیم داشت

(۱۰)

با جایگذاری روابط (۲۷) تا (۳۰) در رابطه (۲۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
& \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& \frac{\Delta t^2}{2} \|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \leq \\
& 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& 2\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_1\Delta t^2\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& c_1\Delta t^2\|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + M\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2}\|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& c_2\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 - \\
& \frac{\Delta t^2}{2}\|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 - c_3\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 - c_4\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 - \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2.
\end{aligned}$$

(۳۱)

که با استفاده از رابطه (۸) می توان نوشت

$$\begin{aligned}
& \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \leq \\
& 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& (2 + c_1\Delta t^2)\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_1\Delta t^2\|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& \frac{\Delta t^2}{2}\|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 - \frac{\Delta t^2}{2}\|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 + (M - \\
& \frac{1}{2})\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& (c_2 - c_3 - \\
& c_4)\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 - \\
& \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \leq \\
& 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& (2 + c_1\Delta t^2)\|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_1\Delta t^2\|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& \frac{\Delta t^2}{2}\|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 - \frac{\Delta t^2}{2}\|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 + (c_2 - c_3 - \\
& c_4 + M - \frac{1}{2})\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 - \\
& \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2.
\end{aligned}$$

$$\tilde{E}^k := \frac{1}{\Delta t^2}(\tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \tilde{e}_N^{k-1}).$$

در این صورت می توان نوشت

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t^2}(\tilde{e}_N^{k+1} - 2\tilde{e}_N^k + \tilde{e}_N^{k-1}, v_N)_{w^{-1,1}} = \\
& (\tilde{E}^k, v_N)_{w^{-1,1}} \leq \Delta t^2\|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}\|\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}} \leq \frac{\Delta t^2}{2}\|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2}\|\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 \leq \frac{\Delta t^2}{2}\|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2}\|\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-6,0}}^2 \leq \\
& \frac{\Delta t^2}{2}\|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 + c_3\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2.
\end{aligned}$$

(۲۹)

برای آخرین جمله از رابطه (۲۶) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1} + \tilde{e}_N^{k+1} + \\
& \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}} = \frac{1}{2}(\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1}) + \\
& \partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1}), \partial_x v_N)_{w^{-1,1}} \leq \frac{1}{2}\|\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1}) + \partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \\
& \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}\|\partial_x v_N\|_{w^{-1,1}} \leq \frac{1}{2}(\|\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}} + \\
& \|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}) \cdot \|\partial_x v_N\|_{w^{-1,1}} = \\
& \frac{1}{2}\|\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}\|\partial_x v_N\|_{w^{-1,1}} + \\
& \frac{1}{2}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}\|\partial_x v_N\|_{w^{-1,1}} \leq \\
& \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 + \\
& \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 = \frac{3\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \leq \\
& \frac{3\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-4,0}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \\
& \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 \leq c_4\Delta t^2\|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \\
& \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 + \frac{\Delta t^2}{4}\|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2.
\end{aligned}$$

مختلف را نمایش می دهد. ملاحظه می شود که با کاهش طول گام زمانی، دقت افزایش و نتایج در زمان محاسباتی بسیار پایین حاصل می شوند. در جداول ۲ و ۳، نرم بی نهایت خطا و زمان محاسباتی به ازای $N = 128$ نقطه‌ی مکانی و مقادیر متفاوت N_t و T محاسبه شده‌اند. جواب واقعی معادله به شکل $u(x) = (1 + \sin(t^3))x^4(1 - x^2)^4$ است. در جداول زیر، منظور از خطا نرم بی نهایت خطا در گام نهائی زمان است که از فرمول زیر محاسبه می شود

$$\|e_N^{N_t}\|_\infty = \max|u_N^{N_t} - u(\cdot, T)|.$$

N_t	خطا	زمان محاسباتی (ثانیه)
16	2.7123×10^{-3}	0.015996
32	6.1905×10^{-4}	0.026497
64	1.4317×10^{-4}	0.036913
128	7.0920×10^{-5}	0.063417
256	1.7571×10^{-5}	0.138719

جدول ۱: نرم بی نهایت خطا و زمان محاسبه به ازای $N = 64$ ، $T = 0.5$ و N_t های مختلف.

T	خطا	زمان محاسباتی (ثانیه)
0.5	8.2818×10^{-9}	1.040203
1	3.6964×10^{-8}	1.084787
2	5.2839×10^{-6}	1.092259
5	2.0014×10^{-3}	1.099587

در نهایت داریم

$$\begin{aligned} & \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \left(-c_2 + c_3 + c_4 - M + \right. \\ & \left. \frac{1}{2}\right) \Delta t^2 \|\partial_x^2(\hat{e}_N^{k+1} + \hat{e}_N^{k-1})\|_{w^{-2,0}}^2 \leq \\ & c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 - \\ & \frac{\Delta t^2}{2} \|\tilde{E}^k\|_{w^{-1,1}}^2 - \frac{\Delta t^2}{4} \|\partial_x(\tilde{e}_N^{k+1} + \tilde{e}_N^{k-1})\|_{w^{-1,1}}^2 + \\ & 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \\ & (2 + c_1 \Delta t^2) \|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2. \end{aligned} \quad (33)$$

رابطه (۳۳) به صورت زیر قابل بازنویسی است

$$\begin{aligned} \|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 & \leq c_1 \Delta t^2 \|\tilde{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2 + \\ & \frac{\Delta t^2}{2} \|E^k\|_{w^{-1,1}}^2 + 2\|\hat{e}_N^{k+1}\|_{w^{-1,1}}^2 + \\ & \|\hat{e}_N^{k-1}\|_{w^{-1,1}}^2 + (2 + c_1 \Delta t^2) \|\hat{e}_N^k\|_{w^{-1,1}}^2. \end{aligned}$$

با استفاده از لم های ۴ و ۵ و از آنجائی که $e_N^k = \hat{e}_N^k + \tilde{e}_N^k$ اثبات قضیه به شکل زیر کامل می شود

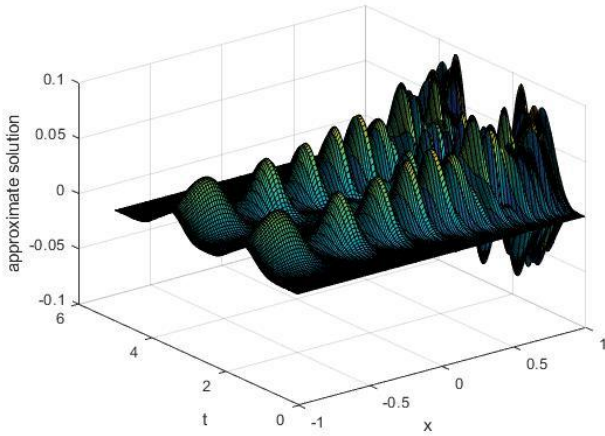
$$\|e_N^{n+1}\|_{w^{-1,1}} \lesssim C(\Delta t^2 + N^{-m}).$$

۳.۲. نتایج عددی

معادله (۱) را توسط الگوریتم پیشنهاد شده روی بازه مکانی $[-1, 1]$ و با به کارگیری نقاط گره‌ای لژاندر-گوس-لوباتو^{۱۱} و در بازه زمانی $[0, T]$ حل کردیم. گام‌های زمانی با استفاده از فرمول $\Delta t = \frac{T}{N_t}$ محاسبه شده‌اند. جدول ۱ نرم بی نهایت خطا و زمان محاسباتی به ازای $N = 64$ و $T = 0.5$ و N_t های

جدول ۲: نرم بی‌نهایت خطا و زمان محاسبه به ازای $N = 128$ و

$N_t = 1000$ و برای مقادیر متفاوت T .



شکل ۲: نمودار جواب تقریبی به ازای $N = 128$, $N_t = 125$ و در زمان های مختلف.

T	خطا	زمان محاسباتی (ثانیه)
0.5	2.0683×10^{-9}	1.969159
1	9.2257×10^{-9}	2.148417
2	1.3207×10^{-6}	2.288683
5	4.4957×10^{-4}	2.326207

جدول ۳: نرم بی‌نهایت خطا و زمان محاسباتی به ازای $N = 128$ و

$N_t = 2000$ و برای مقادیر متفاوت T .

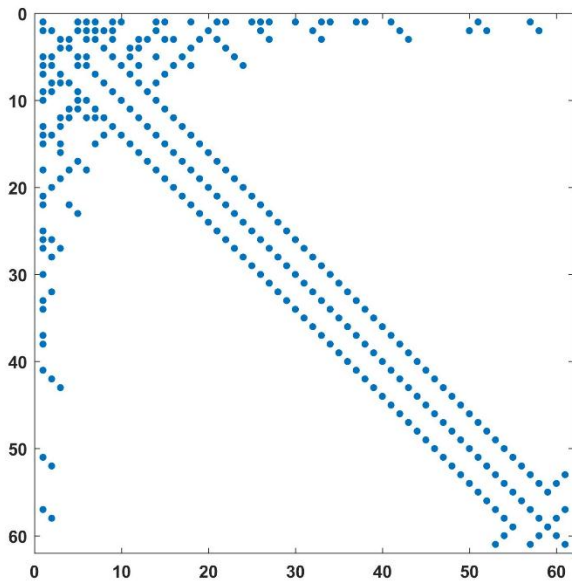
شکل ۱ نمودار خطا را به ازای $N = 100$ و $T = 0.5$ نشان

می‌دهد و در شکل ۲ جواب تقریبی معادله به ازای $N = 128$

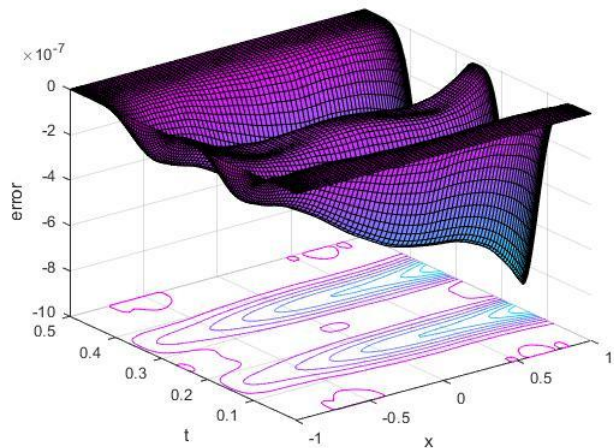
و $T = 5$ رسم شده است. همچنین شکل ۳ ساختار تنک بودن

ماتریس ضرایب حاصل برای $N = 64$ در حل مسئله را نشان

می‌دهد.



شکل ۳: ساختار تنک بودن ماتریس ضرایب حاصل برای $N = 64$.



شکل ۱: نمودار کانتور خطا به ازای $N_t = N = 100$ و در زمان های

مختلف.

۳. نتیجه گیری

[6] Wazwaz A.M., "Constructions of soliton solutions and periodic solutions of the Boussinesq equation by the modified decomposition method", *Chaos Solitons Fractals* 12 (2001) 1549–1556, doi: [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(00\)00133-8](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00133-8).

[7] Bratsos A.G., "A second order numerical scheme for the solution of the one-dimensional Boussinesq equation", *Numer. Algor.* 46 (2007) 45–58, doi: <https://doi.org/10.1007/s11075-007-9126-Y>.

[8] Shokri A., Dehghan M., "A Not-a-Knot meshless method using radial basis functions and predictor–corrector scheme to the numerical solution of improved Boussinesq equation", *Comput. Phys. Comm.* 181 (2010) 1990–2000, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2010.08.035>.

[9] Ismail M.S., Mosally F., "A fourth order finite difference method for the good Boussinesq equation", *Abs. Appl. Anal.* 323260 (2014), doi: 10.1155/2014/323260.

[10] Ucar Y., Esen A., Karaagac B., "Numerical solutions of Boussinesq equation using Galerkin finite element method", *Numer. Methods Partial Diff. Equ.* 3782 (2020) 1612–1630, doi: <https://doi.org/10.1002/num.22600>.

[11] Tabrizidooz H.R., Hajiramezanali F., "A numerical algorithm for determining time-dependent coefficient in a parabolic inverse problem using Legendre multiwavelet base", *Soft Computing Journal* 10 (2022) 110–123, doi:10.22052/scj.2022.243311.1028.

در این مقاله، روش گالرکین برای گسسته‌سازی مکان و روش کرانک نیکلسون لیب-فراگ برای گسسته‌سازی زمانی معادله بوزینسک پیشنهاد گردید. از آنجائی که چندجمله‌ای‌های ژاکوبی تعمیم‌یافته در شرایط مرزی مسئله صدق کردند، دیگری نیازی به بررسی مجزا این شرایط نمی‌باشد. استفاده از این چندجمله‌ای‌ها به عنوان پایه باعث شد تا ماتریس ضرایب تنک و در نتیجه سرعت اجرای برنامه مطلوب‌تر شود. روش پیشنهادی برای حل معادلات با مراتب زوج قابل استفاده و تعمیم می‌باشد.

مراجع

[1] Dehghan, M., Abbaszadeh, M., Mohebbi, A. "The numerical solution of the two-dimensional sinh-Gordon equation via three meshless methods", *Eng. Anal. Bound. Elem.* 51, 220–235, 2015, doi: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2014.10.015>

[2] Mohebbi, A., Asgari, Z., "Efficient numerical algorithms for the solution of good Boussinesq equation in water wave propagation", *Comput. Phy. Commun.* 182, 2464–2470, 2011, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2011.07.004>

[3] Shen, J., "A new dual-Petrov-Galerkin method for third and higher odd-order differential equations: application to the KdV equation", *SIAM J. Num. Anal.* 41, 1595–1619, 2003, doi: <https://doi.org/10.1137/S0036142902410271>

[4] Yuan, J., Shen, J., Wu, J., "A Dual-Petrov-Galerkin Method for the Kawahara-Type Equations", *J. Sci Comput.* 34, 48–63, 2008, doi: <https://doi.org/10.1007/s10915-007-9158-4>

[5] Shen, J., Tang, T., Wang, L., "Spectral Methods Algorithms, Analysis and Applications", Springer, 2011.