



University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



تخمین پارامترهای یک مدل رگرسیون خطی با توسعه روش حداقل مربعات خطا بر اساس محاسبات کوانتومی

مهدی رمضانی^{1*}، استادیار، صادق کلاتری²، دانشجوی دکتری، علی مددی²، دانشیار

¹ گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران.

² گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران.

اطلاعات مقاله

چکیده

تاریخچه مقاله:

دریافت 27 تیر ماه 1402

پذیرش 26 دی ماه 1402

کلمات کلیدی:

شناسایی سیستم

حداقل مربعات خطا

محاسبات کوانتومی

پیچیدگی محاسباتی

الگوریتم کوانتومی

روش حداقل مربعات خطا با وجود سادگی دارای نتایج قابل قبولی در شناسایی سیستم‌ها می‌باشد. فرآیند تخمین پارامترها در شناسایی سیستم منجر به حل معادله خطی $Ax=b$ می‌شود. نکته حائز اهمیت این است که روش عادی حل مساله فوق دارای پیچیدگی محاسباتی از مرتبه $O(n^3)$ برای یک ماتریس $n \times n$ می‌باشد. در حل این مساله، پیچیدگی محاسباتی با افزایش n (اندازه ماتریس داده) افزایش می‌یابد. از طرفی تعداد نمونه‌های بیشتر سبب مدل‌سازی بهتر سیستم می‌گردد. در مسائل عملی شناسایی سیستم، هنگامی که تعداد داده‌های ورودی زیاد است، بار محاسباتی به شدت افزایش می‌یابد. در این مقاله هدف این است که الگوریتم کوانتومی توسعه یافته‌ای برای حل مساله شناسایی حداقل مربعات خطا ارائه نماییم. در این مقاله دو روش کلاسیک - کوانتومی و تمام کوانتومی ارائه می‌گردد. روش‌های ارائه شده در این مقاله قادر هستند برخلاف روش مرسوم HHL با ماتریس‌های غیر هرمیتی، بدحال و با وجود نویز رنگی، پارامترهای بدون بایاس را محاسبه نمایند. روش پیشنهادی کلاسیک - کوانتومی، دارای پیچیدگی محاسباتی از مرتبه $O(n^2 \log n)$ و روش تمام کوانتومی از مرتبه $O(\text{polylog} n)$ نسبت به اندازه ماتریس داده می‌باشند. نتایج و مقایسه‌های انجام شده نشان می‌دهند که روش‌های پیشنهادی مقاله نسبت به روش‌های کلاسیک (با پیچیدگی $O(n^3)$) دارای پیچیدگی و محدودیت کمتری می‌باشند.

© 1402 نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

1. مقدمه

پارامترهایی می‌باشند که باید به نحوی شناسایی شوند. به طور کلی فرآیند شناسایی به معنی ساخت یک مدل ریاضی از سیستم و تخمین پارامترهای مدل در نظر گرفته شده با استفاده از داده‌های نمونه‌برداری شده می‌باشد؛ به نحوی که اگر یک سیگنال ورودی مشابه به سیستم و مدل شبیه‌سازی شده اعمال شود، خروجی‌های سیستم اصلی و مدل تقریباً یکسان باشند [1]-[3]. این حوزه از تحقیق ریشه در ریاضیات، مهندسی

برای توصیف و تعریف پدیده‌های گوناگون به طور معمول از مدل‌های ریاضی استفاده می‌گردد. اغلب مدل‌های ریاضی، دارای

✧ نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: ramezani@tafreshu.ac.ir (رمضانی)

sadeghkalantari@tafreshu.ac.ir (کلاتری)

madadi@tafreshu.ac.ir (مددی)

نحوه ارجاع به مقاله: مهدی رمضانی، صادق کلاتری، علی مددی، «تخمین پارامترهای یک مدل رگرسیون خطی با توسعه روش حداقل مربعات خطا بر اساس محاسبات کوانتومی»، مجله محاسبات نرم، جلد 13، شماره 2، ص 169_154، پاییز و زمستان 1403.

یکی از مهمترین روش‌های ارائه شده استفاده از کامپیوترهای کوانتومی می‌باشد. این کامپیوترها بر اساس قوانین فیزیک کوانتوم ساخته می‌شوند. با توجه به خواص مفید ذرات کوانتومی همچون درهم‌تنیدگی⁴ و موازی‌سازی⁵ میزان بهبود عملکرد کامپیوترهای کوانتومی نسبت به کامپیوترهای فعلی بسیار بهتر می‌باشد. در سالهای اخیر الگوریتم‌هایی بر اساس محاسبات کوانتومی ارائه شده است که پیچیدگی محاسباتی حل یک مسئله را تا حد بسیار زیادی کاهش داده‌اند. الگوریتم‌های کوانتومی شور⁶ و گراور⁷ اولین الگوریتم‌های ارائه شده در این حوزه می‌باشند [10]. الگوریتم شور برای تجزیه یک عدد به عوامل اول ارائه شده است. پیچیدگی محاسباتی این الگوریتم از مرتبه چندجمله‌ای است؛ در صورتی که پیچیدگی محاسباتی بهترین روش کلاسیک از مرتبه نمایی می‌باشد. الگوریتم گراور برای جستجو در یک پایگاه داده نامنظم بکار می‌رود. پیچیدگی محاسباتی این الگوریتم برای یک مجموعه با n عضو از مرتبه $O(\sqrt{n})$ است؛ در صورتی که پیچیدگی محاسباتی بهترین روش کلاسیک $O(n)$ می‌باشد.

الگوریتم‌های کوانتومی در مسائل مختلفی می‌توانند کاربرد داشته باشند. در بسیاری از مسائل پایه‌ای شناسایی همچون روش حداقل مربعات معمولی⁸ (OLS)، محاسبه شبه‌معکوس ماتریس داده (هنگامی که تعداد داده‌های نمونه‌برداری زیاد است) بسیار زمان‌بر خواهد بود. در روش حداقل مربعات معمولی در محاسبه پارامترهای سیستم فرض بر این است که نویز حاصل از اندازه‌گیری و خطای ساختار سفید می‌باشد. برای محاسبه بدون بایاس پارامترهای سیستم با نویز رنگی باید از روش‌های پیشرفته‌تری همچون روش حداقل مربعات تعمیم داده شده استفاده شود. در مسائل مختلف شناسایی سیستم همچون شناسایی با استفاده از روش حداقل مربعات تعمیم داده شده، انتظار می‌رود که استفاده از محاسبات کوانتومی سبب افزایش

کنترل و پردازش سیگنال دارد. در فرآیند شناسایی سیستم، پس از نمونه‌برداری (جمع‌آوری داده‌ها) یک مدل انتخاب می‌گردد. پس از تخمین پارامترهای مدل، در مرحله ارزیابی میزان موفقیت آن بررسی می‌شود. در صورت عدم موفقیت در کسب آزمون های ارزیابی، مدل دیگری انتخاب می‌شود تا با داده‌های نمونه برداری تطبیق بهتری داشته باشد [4]، [5]. این فرآیند دارای چالش‌های مختلفی می‌باشد که در ادامه توضیح داده خواهد شد. یکی از چالش‌های اساسی در شناسایی و بدست آوردن اطلاعات مجهول از سیستم، انتخاب مدل‌ها و الگوریتم‌های عددی مناسب می‌باشد [6]. مدل سبب می‌گردد تا کمبود اطلاعات درباره سیستم تا حدی جبران شود. پس از انتخاب مدل، مسئله اصلی تخمین پارامترها با استفاده از اطلاعات در دسترس می‌باشد. انتخاب صحیح مدل و سرعت اجرای تخمین پارامترها نیز فاکتورهای بسیار مهمی در مسائل شناسایی سیستم می‌باشند [6]. اگر مدل به درستی انتخاب نگردد، حتی اگر نمونه‌ها به درستی برآورده گردند نتیجه قابل اعتماد نخواهد بود [7]. با توجه به ماهیت داده‌های نمونه‌برداری شده، مدل‌های گوناگون می‌توانند منجر به جواب‌های مختلفی برای سیستم شوند. بنابراین اطلاع از نوع داده‌ها و مدلی که قرار است بکار برده شود بسیار حیاتی می‌باشد. در بحث انتخاب مدل، مدلی مناسب است که در عین سادگی تطابق قابل قبولی با سیستم داشته باشد. سرعت اجرای روش پیشنهادی نیز از این حیث حائز اهمیت است که در بسیاری از کاربردهای زمان‌واقعی¹ و شناسایی برخط²، بسیار حیاتی است که شناسایی پارامترها با سرعت و دقت بالایی انجام شود. زیرا بسیاری از مدل‌های به کاررفته در شناسایی سیستم منجر به حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده با روش‌های حل زمان بری می‌گردند. به همین منظور محققان در تلاش هستند تا همواره مدلی انتخاب شود که در عین سادگی دارای پیچیدگی محاسباتی³ مناسبی باشد [7]. برای حل مشکل پیچیدگی محاسباتی الگوریتم‌ها اخیراً روش‌های مختلفی پیشنهاد شده است [8] - [10].

⁴ Entanglement

⁵ Parallelism

⁶ Shor's Algorithm

⁷ Grover's Algorithm

⁸ Ordinary Least Squares

¹ Real Time

² Online Identification

³ Computational Complexity

استفاده از محاسبات کوانتومی روش ارائه شده بسیار ارزشمند می‌باشد. در ادامه برخی از روش‌های کوانتومی که تا کنون پیشنهاد شده اند مرور خواهد شد.

روش مرجع [12] یا (^3HHL)، یک الگوریتم کوانتومی برای محاسبه $\theta^* = \Phi^\dagger y$ در زمان $O(\log(n)\kappa^2 s^2/\epsilon)$ ارائه داده است. این روش به عنوان پایه‌ای‌ترین روش حل معادلات خطی شناخته می‌شود. از جمله محدودیت‌های آن می‌توان به هرمیتی بودن و خوش‌حالت بودن ماتریس داده اشاره کرد. همچنین تخمین پارامترها با این روش در حضور نویز رنگی سبب بایاس دار شدن تخمین می‌گردد. روش مرجع [11] از لحاظ ساختار الگوریتم به روش HHL بسیار شبیه است. در این روش مشکل هرمیتی بودن حل شده است و پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(\log(n+p)\kappa^3 s^2/\epsilon^2)$ می‌باشد. در این روش علاوه بر تخمین پارامترها مقدار نرم خروجی $|x|$ نیز (بدون افزایش پیچیدگی محاسباتی) محاسبه می‌شود. روش مرجع [13] یک الگوریتم کوانتومی برای بدست آوردن مقادیر تکین در زمان $O(\text{polylog}(mn)/\delta)$ پیشنهاد داده است که δ پارامتر دقت می‌باشد. این روش مشکل تُنک بودن و هرمیتی بودن ماتریس داده را با بکارگیری ایزومتری‌های مناسب حل کرده است. یکی از مشکلات اساسی این روش عدم تعیین علامت مقادیر تکین تخمین زده شده (که در ساخت خروجی به کار می‌روند) می‌باشد. روش مرجع [14] بر مبنای تخمین مقادیر تکین کوانتومی، تصحیح تخمین فاز و استفاده از ایزومتری‌های مناسب بنا نهاده شده است. این روش محدودیت‌های هرمیتی بودن و تُنک بودن را برطرف نموده است؛ اما نحوه انتخاب ایزومتری‌های مناسب در این روش از چالش‌های اساسی آن می‌باشد. در تمامی روش‌های بیان شده مشکل بایاس دار بودن تخمین پارامترها در حضور نویز رنگی و محدودیت خوش حالت بودن ماتریس ورودی همچنان برقرار می‌باشد. با توجه به اهمیت روش GLS، در این مقاله قصد داریم با بهره‌گیری از ایده‌های بیان شده در مقاله [12] و [13] و برخی از ایده‌های پیشنهادی، روش‌های الگوریتم کلاسیک-کوانتومی و تمام

سرعت قابل قبولی نسبت به روش‌های کلاسیک شود. به همین منظور در این مقاله قصد داریم تا از خواص مفید محاسبات کوانتومی در مبحث افزایش سرعت و کاهش بار محاسباتی روش حداقل مربعات تعمیم داده شده استفاده نماییم. بنابراین، در این مقاله هدف شناسایی پارامترهای یک مدل با ارائه روش حداقل مربعات تعمیم داده شده با بکارگیری محاسبات کوانتومی است. در این روش کلیه سیستم‌هایی که به فرم رگرسیون خطی بیان می‌گردند قابل شناسایی می‌باشند.

روش مرسوم حداقل مربعات دارای محدودیت‌های جدی می‌باشد. از جمله محدودیت‌های این روش این است که در رابطه $y = \Phi\theta + v$ ، برای رسیدن به پارامترهای بدون بایاس، v باید نویز سفید باشد. در رابطه فوق $\Phi_{n \times p}, \theta \in R^p, y \in R^n$ می‌باشند. اما با استفاده از تعمیم‌هایی از روش OLS (همچون GLS)¹ می‌توان محدودیت نویز سفید را برطرف نمود. در روش OLS اگر پارامترهای بهینه با استفاده از رابطه $\theta^* = \Phi^\dagger y$ محاسبه شود، هزینه محاسباتی $O(p^2n + n^2p)$ است که در داده‌های بزرگ بسیار کند می‌باشد [11]. از طرفی برای شناسایی بهتر سیستم نیاز به نمونه‌های بیشتری می‌باشد که طبق رابطه فوق پیچیدگی محاسباتی بسیار زیاد خواهد بود. بنابراین یافتن یک الگوریتم سریع که به صورت تقریبی $\tilde{x} \simeq x^*$ را برآورده نماید بسیار ارزشمند است.

با توجه به اهمیت و کاربرد روش حداقل مربعات خطا در علوم مختلف، بسیاری از محققان بر روی کاهش بار محاسباتی این روش تمرکز کرده‌اند [11]. در محاسبات کلاسیک الگوریتم‌های شناخته شده‌ای وجود دارند که $\tilde{x}$ را با خطای نسبی $\|x - x^*\|_2 \leq \epsilon \|x^*\|_2$ (برای هر ثابت خطای $0 < \epsilon < 1$) محاسبه می‌کنند. این نوع از الگوریتم‌ها همچون CG² برای محاسبه ماتریس‌های رتبه پایین و ماتریس‌های تُنک از روش‌های ساده سریع‌تر هستند؛ اما برای ماتریس‌های دلخواه مربعی و پُر دارای پیچیدگی محاسباتی از مرتبه $O(n^3)$ می‌باشند [12]. بنابراین در صورت دستیابی به پیچیدگی‌های محاسباتی کمتر با

¹ Generalized Least Squares

² Conjugate Gradient

³ Harrow Hassidim Liloyd

با ماتریس‌های بدحالت سروکار داریم. در این مقاله این مساله به وسیله تقریب رتبه پایین ماتریس با استفاده از روش SVD و روش تقریب شبه اسکلت حل شده است. بنابراین روش به کار برده شده در این قسمت با جزئیات توضیح داده خواهد شد. فرض کنید A نشان‌دهنده یک سیگنال می‌باشد. در نظریه SVD، هر ماتریس را می‌توان به صورت معادله زیر تجزیه کرد:

$$A = U\Sigma V^t \quad (1)$$

که در این رابطه $U_{m \times m} = [u_1 \dots u_m]$ (بردار تکین چپ) و $V_{n \times n} = [v_1 \dots v_n]$ (بردار تکین راست) متعامد هستند [16]. بنابراین رابطه $VV^t = V^tV = I_n$, $UU^t = U^tU = I_m$ می‌باشد. لازم به ذکر است که ستون‌های ماتریس‌های $U_{m \times m}$ و $V_{n \times n}$ به ترتیب از بردارهای ویژه متعامد یک ماتریس AA^t و A^tA تشکیل شده است. ماتریس $\Sigma_{m \times n}$ نیز شبه قطری است که مقادیر روی قطر آن مقادیر تکین ماتریس A^tA یا AA^t می‌باشند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Sigma_{m \times n} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p), p = \min\{m, n\} \quad (2)$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0, \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_p = 0$$

که در آن σ_1 بزرگترین و σ_k کوچکترین مقدار منفرد غیر صفر ماتریس می‌باشد.

2.2. فرمول‌بندی مساله تقریب رتبه پایین

تقریب رتبه پایین ماتریس در شناسایی سیستم بسیار سودمند می‌باشد. با توجه به نمونه‌برداری‌های مختلف، ماتریس داده ممکن است بدحالت شود. محاسبه معکوس یک ماتریس بدحالت با چالش‌هایی روبرو می‌باشد. استفاده از تقریب رتبه پایین یکی از روش‌های موثر رفع بدحالتی ماتریس است. تقریب یک ماتریس با رتبه پایین‌تر را می‌توان با استفاده از تجزیه SVD انجام داد. بنابراین هدف در این بخش تخمین ماتریس رتبه پایین B با استفاده از ماتریس A می‌باشد. طبق رابطه زیر در تقریب رتبه پایین ماتریس A با رتبه r خواهیم داشت:

کوانتومی برای روش GLS را ارائه نماییم. روش‌های پیشنهادی در عمل کاربرد بیشتری داشته و برای نویزهای رنگی نیز قابل استفاده هستند. بنابراین این روش‌ها پارامترهای سیستم را بدون بایاس محاسبه می‌کنند. لازم به ذکر است که در روش کلاسیک - کوانتومی پیشنهادی، برای حل مشکل خوش حالت بودن ماتریس داده، از روش SVD و تجزیه اسکلت استفاده می‌شود. برای حل مشکل بایاس دار بودن پارامترها نیز از قضیه GLS استفاده خواهیم کرد. در روش تمام کوانتومی پیشنهادی نیز برای حل خوش حالت بودن ماتریس داده از تقطیع مقادیر تکین استفاده شده است. در قسمت دوم مقاله به مرور برخی از پیش نیازهای اصلی خواهیم پرداخت. در بخش سوم روش‌های پیشنهادی به همراه نتایج ارائه خواهند شد. در بخش چهارم شبیه‌سازی یک مسئله ساده در محیط QISKIT شرکت IBM انجام شده است و بخش پنجم به نتیجه‌گیری می‌پردازد. لازم به ذکر است که در این مقاله مباحث پایه‌ای محاسبات کوانتومی همچون آشنایی با گیت‌های کوانتومی، تخمین فاز، تقویت دامنه، موازی‌سازی کوانتومی و الگوریتم‌های کوانتومی بیان نشده است و خوانندگان را به مرجع [15] ارجاع می‌دهیم.

2. پیش‌نیازها

در این بخش برخی از مباحث ریاضی لازم برای حل مشکل خوش حالت بودن ماتریس داده بیان می‌گردد. به همین منظور ابتدا روش SVD و سپس روش تجزیه اسکلت توضیح داده خواهد شد.

1.2. روش SVD

در این قسمت هدف معرفی روش SVD و استفاده از آن در محاسبه تقریب رتبه پایین ماتریس¹ می‌باشد. همانطور که می‌دانیم در ماتریس‌های بدحالت عدد شرط (نسبت بزرگترین به کوچکترین مقدار تکین) بسیار بزرگ است. به همین علت در روش HHL فرض بر آن است که ماتریس خوش حالت است و عدد شرط کوچک می‌باشد. اما در مساله شناسایی سیستم بعضاً

¹ Low Rank Approximation

$$\Sigma_B = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, 0, 0, \dots, 0)$$

$$B = U \Sigma_B V^T = u_1 \sigma_1 v_1^t + u_2 \sigma_2 v_2^t + \dots + u_k \sigma_k v_k^t \Rightarrow \quad (7)$$

$$B = U_{1a} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{bmatrix} V_{1a}^t = U_{1a} \Sigma_B V_{1a}^t.$$

قضیه در مرجع بالا معیاری را برای محاسبه مقدار بهینه به صورت زیر بیان می‌کند:

$$\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \geq \sum_{i=k+1}^p \sigma_i^2, \quad p = \min\{m, n\}. \quad (8)$$

مطابق با معیار فوق، مجموع مقادیر تکین باقی مانده باید بزرگتر (یا مساوی) از مجموع مقادیر تقطیع شده باشد تا بتوان یک تقریب رتبه پایین مناسب را بدست آورد. بنابراین طبق رابطه (8) برای حل موضوع بدحالت بودن ماتریس داده ابتدا تقریب رتبه پایین ماتریس توسط روش SVD محاسبه می‌گردد. با این عمل مقادیر تکین کوچک‌تر که سبب بدحالت شدن ماتریس شده‌اند حذف می‌شوند. پیچیدگی محاسباتی روش SVD برای یک ماتریس با سائز $n \times n$ از مرتبه $O(n^3)$ می‌باشد. بنابراین استفاده از این روش سبب افزایش بار محاسباتی می‌گردد. به منظور کاهش پیچیدگی محاسباتی در تخمین رتبه پایین، روش تجزیه اسکلت² و تجزیه شبه اسکلت پیشنهاد شده است که در قسمت بعد به آنها می‌پردازیم.

3.2. تجزیه اسکلت

ماتریس $A_{m \times n}$ را در نظر بگیرید. تقریب اسکلت این ماتریس به صورت $A = CGR$ می‌باشد که R, C به ترتیب شامل k ستون و سطر انتخاب شده از ماتریس A و $G = M^{-1}$ می‌باشند. ماتریس $M_{k \times k} = A(I, J)$ است که (I, J) سطر و ستون‌های انتخاب شده از ماتریس A با بُعد حداکثر می‌باشند. در رابطه فوق به دست آوردن زیرماتریس با بُعد حداکثر M بسیار دشوار است؛ بنابراین با یک زیرماتریس شبه بهینه جایگزین می‌شود [19]. برای بدست آوردن این ماتریس از الگوریتم maxvol موجود در مرجع [20] استفاده می‌کنیم. برای ساختن یک تقریب

$$A = [U_1 | U_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_r \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}, \text{rank}(A) = r. \quad (3)$$

با توجه به تعریف دو ماتریس U و V ، تجزیه مقدار تکین ماتریس را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$A = u_1 \sigma_1 v_1^t + u_2 \sigma_2 v_2^t + \dots + u_r \sigma_r v_r^t, \quad (4)$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r.$$

به طور کلی ماتریس A را به صورت خطی در قالب معادلات زیر با توجه به تجزیه مقادیر تکین A نشان می‌دهیم.

$$A = U_{1a} [U_{1b} | U_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & 0 & \sigma_k & 0 \\ & & 0 & \sigma_{k+1} & 0 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & \sigma_{r+1} & 0 \\ 0 & & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1a}^T \\ V_{1b}^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

$$A = u_1 \sigma_1 v_1^t + u_2 \sigma_2 v_2^t + \dots + u_k \sigma_k v_k^t + u_{k+1} \sigma_{k+1} v_{k+1}^t + \dots + u_r \sigma_r v_r^t \Rightarrow A$$

$$= \sigma_1 u_1 v_1^t + \sigma_2 u_2 v_2^t + \dots + \sigma_k u_k v_k^t + \sigma_{k+1} u_{k+1} v_{k+1}^t + \dots + \sigma_r u_r v_r^t \Rightarrow A$$

$$= \sum_{i=1}^r a_i \phi_i \quad (5)$$

در رابطه (5) σ_i ها ضرایب و $u_i v_i$ ها پایه‌های متناظر می‌باشند که بر خلاف پایه های ثابت سری فوریه، با استفاده از اطلاعات سیگنال به صورت تطبیقی انتخاب می‌شوند. با توجه به معادله $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r$ ضرایب اولیه نقش بیشتری در بازسازی ماتریس دارند. این موضوع همچنین برای نمایش یک سیگنال توسط سری فوریه بر اساس لم ریمان-لبگ صدق می‌کند. اکنون مساله اصلی تعیین B (تقریب رتبه پایین ماتریس) به عنوان یک مساله بهینه‌سازی به فرم زیر است:

$$B = \underset{z}{\operatorname{argmin}} \|A - z\|_2^2 \quad \text{st.} \quad \text{rank}(z) = k. \quad (6)$$

با فرض اعمال SVD بر روی ماتریس، و با در نظر گرفتن قضیه اکارت-یونگ-میرسکی¹ که در مرجع [18] موجود است، پاسخ فرم بسته برای مساله بهینه سازی به صورت زیر خواهد بود:

² Skeleton Approximation

¹ Eckart-Young-Mirsky

یافتن k سطر با اندیس‌های $I = (i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(k)})$ استفاده کرده و ماتریس $R_{k \times n} = A(I, :)$ را تشکیل می‌دهیم. بنابراین، ماتریس $M_{k \times k} = A(I, J)$ و تقریب شبه اسکلت به صورت $A \sim C_{m \times k} M_{k \times k}^{-1} R_{k \times n}$ می‌باشد. به دلیل انتخاب تصادفی ستون ها، معکوس ماتریس M ممکن است پایدار نباشد. برای حل این مشکل، ماتریس M با استفاده از روش SVD تجزیه می‌گردد. بنابراین، $M = U_M S_M V_M^T$ و V_M ماتریس‌های متعامد می‌باشند و S_M نیز ماتریس قطری شامل k مقدار تکی $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$ است. حال با استفاده از روش یانگ-میرسکی تقریب رتبه پایین ماتریس M محاسبه می‌گردد و به جای مقادیر تکی بسیار کوچک صفر قرار داده می‌شود. بنابراین ماتریس‌های U, V, S با مقدار تکی تقطیع می‌شوند و شبه معکوس M از رابطه (9) بدست می‌آید.

$$M^+ = (U_r S_r V_r^T)^{-1} = V_r S_r^{-1} U_r^T \quad (9)$$

در نهایت ماتریس A به صورت $A \sim C V_r S_r^{-1} U_r^T R$ تقریب زده می‌شود. مراحل توضیح داده شده به صورت الگوریتم در زیر بیان شده است.

1- k ستون را از ماتریس A به صورت رندوم با اندیس‌های $J = (j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(k)})$ انتخاب نمایید و آنها را در ماتریس $C_{m \times k} = A(:, J)$ قرار دهید.

2- ماتریس مناسب را با بکارگیری پروسه maxvol (مرجع [20]) بر روی C به دست آورید. خروجی در این قسمت اندیس سطرهای $I = (i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(k)})$ می‌باشد.

بنابراین داریم: $R_{k \times n} = A(I, :)$ و $M_{k \times k} = A(I, J)$.

3- بر روی ماتریس M روش SVD را اعمال نمایید.

4- فرآیند تقطیع مقادیر تکی را برای مقدار r بر روی ماتریس‌های U, V, S انجام دهید.

5- شبه معکوس M را با استفاده از رابطه $M^+ = (U_r S_r V_r^T)^{-1} = V_r S_r^{-1} U_r^T$ به دست آورید.

6- تقریب A به صورت $A \sim C V_r S_r^{-1} U_r^T R$ خواهد بود.

اسکلت رتبه k از ماتریس A با استفاده از الگوریتم maxvol، مراحل زیر اجرا می‌شود.

1- k ستون از A با اندیس‌های $J = (j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(k)})$ را محاسبه کرده و در یک ماتریس ذخیره کرده و آن را C بنامید. یعنی قرار دهید: $C_{m \times k} = A(:, J)$.

2- ماتریس مناسب را با بکارگیری پروسه maxvol (مرجع [20]) بر روی C به دست آورید. خروجی در این قسمت اندیس سطرهای $I = (i^{(1)}, i^{(2)}, \dots, i^{(k)})$ می‌باشد.

3- k سطر به دست آمده را در ماتریس $R_{k \times n} = A(I, :)$ قرار دهید.

4- تجزیه اسکلت به صورت $A \approx CGR$ است که $G = M^{-1}$ و $M_{k \times k} = A(I, J)$ می‌باشد.

اگر در ابتدای الگوریتم اندیس‌های $J = (j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(k)})$ به درستی انتخاب نشوند، تقریب بدست آمده ممکن است قابل اعتماد نباشد؛ بنابراین ماتریس M نیز بدحالت بوده و معکوس پذیر نخواهد بود. برای حل این مشکل روش تقریب شبه اسکلت ارائه شده است که در قسمت بعد توضیح خواهیم داد. پیچیدگی محاسباتی روش maxvol برابر با $O(mk)$ می‌باشد [20]. پیچیدگی محاسباتی الگوریتم بالا نیز به صورت $O(mk + mk + kn + k^2m + kmn + k^3)$ می‌باشد. با توجه به $k \ll m, n$ ، پیچیدگی محاسباتی الگوریتم فوق از مرتبه $O(kmn)$ خواهد بود.

4.2. روش تجزیه شبه اسکلت

همانطور که در بخش قبل بیان شد، ماتریس M باید معکوس پذیر باشد. شبه معکوس این ماتریس یک انتخاب مناسب برای M می‌باشد. برای ساخت تقریب شبه اسکلت ماتریس $A_{m \times n}$ با رتبه $r \leq \min(m, n)$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم. به جای انتخاب r ستون از ماتریس A ، k ($k > r$) ستون تصادفی با اندیس‌های $J = (j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(k)})$ را انتخاب می‌کنیم و آن را $C_{m \times k} = A(:, J)$ می‌نامیم. سپس از الگوریتم maxvol برای

GLS باید دینامیک نویز یا ماتریس همبستگی خطا (R_e) معلوم باشد، می توان $\hat{\theta}$ بدون بایاس را از روی روش حداقل مربعات وزن داده شده هنگامی که $W = R_e^{-1}$ بدست آورد. همانطور که می دانیم ماتریس همبستگی خطا به صورت زیر می باشد:

$$R_e(e) = \begin{bmatrix} E(e_1^2) & E(e_1 \cdot e_2) & \cdots & E(e_1 e_N) \\ E(e_2 \cdot e_1) & E(e_2^2) & \cdots & E(e_2 \cdot e_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(e_N \cdot e_1) & E(e_N \cdot e_2) & \cdots & E(e_N^2) \end{bmatrix} \quad (11)$$

همچنین ماتریس همبستگی با تابع خود همبستگی $R(k)$ دارای رابطه زیر می باشد:

$$R(k) = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(N-1) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & R(1) \\ R(N-1) & R(N-2) & R(1) & R(0) \end{bmatrix} \quad (12)$$

اگر مدل $e_t = C(z^{-1}) \cdot v_t$ مشخص باشد از روی آن می توان ماتریس همبستگی را بدست آورد. فرض می کنیم ضرائب چند جمله ای $e_t = C(z^{-1})v_t = v_t + C_1 v_{t-1}$ معلوم است. بنابراین داریم:

$$R_e(e) = \sigma^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 + C_1^2 & C_1 & \cdots & 0 \\ C_1 & 1 + C_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & C_1 & 1 + C_1^2 & \end{bmatrix} \quad (13)$$

حال فرض کنید در روش حداقل مربعات، e_t نویز سفید نیست اما دینامیک نویز مشخص می باشد. هدف در GLS این است که نویز e_t به نحوی به نویز سفید تبدیل شود تا بتوان تخمین بدون بایاس برای θ بدست آورد. با استفاده از قضیه زیر این مشکل حل می شود.

قضیه 1: اگر R_e معلوم باشد $\hat{\theta}$ بدون بایاس را می توان از روی روش حداقل مربعات وزن داده شده وقتی $W = R_e^{-1}$ است بدست آورد [5].

یکی از مشکلات روش حداقل مربعات معمولی تخمین بایاس دار در حضور نویز رنگی می باشد. در قسمت قبل دیدیم که در صورت شناخت دینامیک نویز می توان به تخمین بدون بایاس

پیچیدگی محاسباتی الگوریتم فوق همانند بخش قبلی به صورت $O(k^3 + rk(m+n) + mr^2 + mrn)$ محاسبه می گردد. عبارت k^3 اضافه شده در رابطه بالا مربوط به فرآیند SVD می باشد. با توجه به رابطه $k \ll m, n$ ، پیچیدگی محاسباتی الگوریتم فوق نسبت به مقادیر ورودی m, n از مرتبه $O(rmn)$ خواهد بود. بنابراین در این قسمت با استفاده از روش شبه اسکلت می توانیم مشکل بدحالت بودن ماتریس ورودی را با پیچیدگی محاسباتی کمتری حل نماییم.

5.2. روش حداقل مربعات وزن دار¹ (WLS)

در روش حداقل مربعات وزن داده شده خطا در لحظات مختلف از ارزش یکسانی برخوردار نیست. در WLS ماتریس وزن می تواند هر ماتریس دلخواهی باشد و تنها شرط این است که مثبت معین باشد. با مشتق گرفتن از S نسبت به θ می توان رابطه پارامترهای بهینه را به صورت زیر به دست آورد:

$$\hat{\theta}_{WLS} = (U^T W U)^{-1} \cdot U^T W y. \quad (10)$$

3. روش GLS تعمیم یافته کوانتومی

روش GLS به منظور حل مشکل تخمین پارامترها در حضور نویز رنگی ارائه شده است. در این روش فرض بر آن است که دینامیک نویز مشخص می باشد و تلاش می شود که تخمین بدون بایاس از پارامترهای سیستم ارائه شود. در شناسایی سیستم با استفاده از حداقل مربعات، با بکارگیری تابع همبستگی، ماتریس همبستگی و مدل $e_t = C(z^{-1}) \cdot v_t$ می توان به تخمین بدون بایاس رسید. با استفاده از روش تکراری IGLS، دینامیک نویز نیز بدست می آید [5]. در این روش با فرض داشتن دینامیک نویز (مقداردهی اولیه) دینامیک سیستم شناسایی می شود و در بخش دوم با فرض شناختن سیستم دینامیک نویز بدست می آید. این مراحل به طور مداوم تکرار می گردد تا تخمین بهینه بدست آید. بنابراین فرض داشتن دینامیک نویز در مساله GLS محدودیتی ایجاد نمی کند. با توجه به اینکه در روش

¹Weighted Least Square

دست یافت. در توضیحات روش HHL یکی از فرضیات خوش حالت بودن ماتریس A (به منظور تضمین معکوس پذیر بودن) و تُنک بودن آن می باشد. در این قسمت ابتدا روشی (ترکیب روش های کوانتومی و کلاسیک) ارائه خواهد شد که نسبت به روش های کلاسیک دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری می باشد. در روش پیشنهادی، فقط کافیست که ماتریس داده دارای تقریب رتبه پایین باشد. پس از تقریب رتبه پایین ماتریس توسط روش شبه اسکلت (مبتنی بر SVD)، مقادیر تکینی که سبب بد حالت شدن ماتریس می شوند حذف می گردد. با توجه به رابطه $\hat{\theta}_{WLS} = (U^T W U)^{-1} U^T W y$ برای مساله رگرسیون تعمیم یافته کوانتومی می توانیم مساله $Ax = b$ را با مقادیر ورودی $A = U^T W U$, $b = U^T W y$ حل کنیم. بر اساس قضیه 1 با روش پیشنهادی تخمین پارامترها بدون بایاس خواهد بود. مراحل الگوریتم ترکیبی کلاسیک-کوانتومی پیشنهادی به منظور حل مساله حداقل مربعات تعمیم داده شده کوانتومی به صورت زیر می باشد.

1.3. الگوریتم تمام کوانتومی حداقل مربعات تعمیم یافته GLS

در این قسمت یک الگوریتم تمام کوانتومی برای حل مساله حداقل مربعات تعمیم یافته ارائه خواهد شد. در الگوریتم پیشنهادی، برخلاف روش قبلی مرحله اول نیز به صورت کوانتومی انجام می گردد. در این روش از مقادیر تکین به صورت مستقیم در ساخت خروجی استفاده خواهد شد. قبل از ارائه الگوریتم پیشنهادی به مرور قضیه QSVE می پردازیم.

قضیه 2: قضیه QSVE (برگرفته از مرجع [13]): فرض کنید

که $A \in R^{m \times n}$ یک ماتریس با تجزیه مقادیر تکین $A = \sum_i \sigma_i u_i v_i^T$ می باشد که در ساختار داده لم 1 ذخیره شده است و $\delta > 0$ نیز پارامتر دقت باشد. آنگاه الگوریتم QSVE در زمان $O(polylog(mn)/\delta)$ اجرا می گردد و نگاشت $\sum_i \alpha_{v_i} |v_i\rangle |0\rangle \rightarrow \sum_i \alpha_{v_i} |v_i\rangle |\tilde{\sigma}_i\rangle$ انجام می شود که در آن $\tilde{\sigma}_i \in \sigma_i \pm \delta \|A\|_F$ می باشد. خوانندگان محترم برای اطلاعات بیشتر درباره لم 1 و اثبات قضیه به مرجع [13] مراجعه نمایند.

در الگوریتم پیشنهادی تمام کوانتومی مقاله از روش QSVE

دست یافت. در توضیحات روش HHL یکی از فرضیات خوش حالت بودن ماتریس A (به منظور تضمین معکوس پذیر بودن) و تُنک بودن آن می باشد. در این قسمت ابتدا روشی (ترکیب روش های کوانتومی و کلاسیک) ارائه خواهد شد که نسبت به روش های کلاسیک دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری می باشد. در روش پیشنهادی، فقط کافیست که ماتریس داده دارای تقریب رتبه پایین باشد. پس از تقریب رتبه پایین ماتریس توسط روش شبه اسکلت (مبتنی بر SVD)، مقادیر تکینی که سبب بد حالت شدن ماتریس می شوند حذف می گردد. با توجه به رابطه $\hat{\theta}_{WLS} = (U^T W U)^{-1} U^T W y$ برای مساله رگرسیون تعمیم یافته کوانتومی می توانیم مساله $Ax = b$ را با مقادیر ورودی $A = U^T W U$, $b = U^T W y$ حل کنیم. بر اساس قضیه 1 با روش پیشنهادی تخمین پارامترها بدون بایاس خواهد بود. مراحل الگوریتم ترکیبی کلاسیک-کوانتومی پیشنهادی به منظور حل مساله حداقل مربعات تعمیم داده شده کوانتومی به صورت زیر می باشد.

الگوریتم (1): الگوریتم ترکیبی کلاسیک-کوانتومی پیشنهادی

ورودی ها: ماتریس A_i ، b_i و $W = R_e^{-1}$

$$A_n = A_i^T W A_i, \quad b_i = A_i^T W b_i \\ A = \begin{bmatrix} 0 & A_n^T \\ A_n & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_n \end{bmatrix}$$

1- با استفاده از روش شبه اسکلت تقریب رتبه پایین ماتریس A محاسبه گردد.

2- حالت کوانتومی $|b\rangle = \sum_{i=1}^N \beta_i |v_i\rangle$ را با استفاده از روش [21] آماده کنید.

3- با استفاده از روش تخمین فاز مقادیر ویژه محاسبه گردد: $\sum_{i=1}^N \beta_i |v_i\rangle |\lambda_i\rangle$

4- با استفاده از چرخش کنترل حالت زیر را ایجاد نمایید.

$$\sum_{i=1}^N \beta_i |v_i\rangle |\lambda_i\rangle (\sqrt{1 - \lambda_i^{-2}} |0\rangle + \lambda_i^{-1} |1\rangle)$$

5- فرآیند عدم محاسبه (عکس فرآیند تخمین مقدار ویژه) را برای $|\lambda_i\rangle$ انجام دهید.

6- دامنه حالت $|1\rangle$ را $|x\rangle = \sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i^{-1} |v_i\rangle$ اندازه گیری نمایید.

خروجی: $|x\rangle$ (تخمین پارامترها)

خروجی الگوریتم و پیچیدگی محاسباتی آن خواهیم پرداخت.

الگوریتم (2): الگوریتم تمام کوانتومی

ورودی ها: ماتریس A_i ، b_i و $W = R_e^{-1}$

$$A_n = A_i^T W A_i, \quad b_i = A_i^T W b_i$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_n^T \\ A_n & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_n \end{bmatrix}$$

1- حالت کوانتومی $|b\rangle = \sum_{i=1} \beta_i |v_i\rangle = |\psi_1\rangle$ را با استفاده

از روش [21] آماده کنید.

2- بر روی A و $A + \alpha I$ روش SVE انجام شود. بنابراین

حالت سیستم در این مرحله به صورت زیر خواهد بود.

$$|\psi_2\rangle = \sum_i \beta_i |v_i\rangle \|\tilde{\sigma}_i\|_B \|\tilde{\sigma}_i + \alpha\|_C$$

3- یک رجیستر کمکی اضافه نمایید و در صورتی که مقدار

رجیستر B بزرگتر از مقدار رجیستر C بود آن را 1 کرده و

گیت فاز شرطی را اجرا نمایید. بنابراین داریم:

$$|\psi_3\rangle = \sum_i (-1)^{v_i} \beta_i |v_i\rangle \|\tilde{\sigma}_i\|_B \|\tilde{\sigma}_i + \alpha\|_C |v_i\rangle_D$$

4- فرآیند عدم محاسبه را بر روی رجیستریهای C,D انجام

دهید. اگر مقدار رجیستر B بزرگتر از T بود یک کیوبیت

کمکی با مقدار $|0\rangle$ اضافه کرده و چرخش کنترلی به حالت

$$\left(\frac{1}{2\kappa\tilde{\sigma}_i} |1\rangle + \sqrt{1 - \frac{1}{4\kappa^2\tilde{\sigma}_i^2}} |0\rangle \right)$$

سیستم در این مرحله به صورت زیر است.

$$|\psi_4\rangle = \sum_{i=1}^k (-1)^{v_i} \beta_i |v_i\rangle \|\tilde{\sigma}_i\|_B \left(\frac{1}{2\kappa\tilde{\sigma}_i} |1\rangle + \sqrt{1 - \frac{1}{4\kappa^2\tilde{\sigma}_i^2}} |0\rangle \right)$$

5- فرآیند عدم محاسبه برای رجیستر B انجام گردد.

$$|\psi_5\rangle = \sum_{i=1}^k (-1)^{v_i} \beta_i |v_i\rangle \left(\frac{1}{2\kappa\tilde{\sigma}_i} |1\rangle + \sqrt{1 - \frac{1}{4\kappa^2\tilde{\sigma}_i^2}} |0\rangle \right)$$

6- روش تقویت دامنه را بر روی حالت $|1\rangle$ انجام دهید و

سپس آن (یعنی $|x\rangle = \sum_{i=1}^k (-1)^{v_i} \beta_i \left(\frac{1}{2\kappa\tilde{\sigma}_i} \right) |v_i\rangle$) را اندازه

گیری نمایید.

7- پس از متناسب سازی پارامترهای واقعی برابر با $|x\rangle =$

$$\sum_{i=1}^k (-1)^{v_i} \beta_i \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_i} \right) |v_i\rangle$$

خروجی $|x\rangle$ (تخمین پارامترها)

استفاده خواهیم کرد. با استفاده از این روش مشکل خوش

حالت بودن ماتریس حل خواهد شد و الگوریتم توانایی حل

مسائل با ماتریس غیرهرمیشی را دارا خواهد بود. با فرض

تجزیه مقادیر تکین $A = \sum_i \sigma_i u_i v_i^T$ ، برای حل مساله حداقل

مربعات داریم: $e = \|Ax - b\|^2$. با فرض نمایش بردارهای x

و b بر حسب پایه های $\{u_i\}$ و $\{v_i\}$ داریم:

$$e = \|Ax - b\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^m \beta_i u_i \right\|^2 \quad (14)$$

$$= \sum_{i=1}^r (\sigma_i \alpha_i - \beta_i)^2 - \sum_{i=r+1}^m \beta_i^2$$

برای حداقل شدن رابطه (16)، باید $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\sigma_i}$ باشد. بنابراین

$x = \sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\sigma_i} v_i$ خواهد بود. طبق فرمول بندی بیان شده در

(16)، برای رسیدن به تخمین بهینه در روش حداقل مربعات

باید حالت کوانتومی $|x\rangle = \sum_{i=1}^r \beta_i \sigma_i^{-1} |v_i\rangle$ محاسبه شود.

بنابراین در این قسمت هدف تبدیل $\sum_{i=1}^r \beta_i u_i$ به $\sum_{i=1}^r \frac{\beta_i}{\sigma_i} v_i$

می باشد. یکی از مشکلات مهم در قضیه QSVE عدم تعیین

علامت مقادیر تکین تخمین زده شده می باشد. همچنین با توجه

به هرمیتی بودن ماتریس ورودی داریم: $\tilde{\sigma}_i = |\tilde{\lambda}_i|$. در این مقاله

به منظور حل مساله GLS برای ماتریس های کلی باید علامت

مقادیر تکین مشخص باشد. به همین دلیل با الهام از ایده مطرح

شده در مرجع [22]، به منظور تعیین علامت مقادیر تکین از

روش زیر استفاده خواهیم کرد. ابتدا روش QSVE بر روی دو

ماتریس A و $A' = A + \alpha I$ (که α یک اسکالر مثبت می باشد)

اجرا می گردد. لازم به ذکر است که بردارهای ویژه ماتریس A'

همان بردارهای ویژه ماتریس A هستند. اما مقادیر ویژه آن برابر

با $\sigma_i + \alpha$ خواهد بود. برای هر $\sigma_i \geq 0$ داریم: $|\sigma_i + \alpha| =$

$|\sigma_i| + |\alpha| \geq |\sigma_i|$ ، و اگر $\sigma_i \leq -\frac{\alpha}{2}$ داریم: $|\sigma_i + \alpha| \leq |\sigma_i|$.

بنابراین با مقایسه دو مقدار تکین بدست آمده در این مرحله می

توانیم علامت مقدار تکین تخمین زده شده را تعیین نماییم.

الگوریتم تمام کوانتومی این مقاله به صورت زیر می باشد.

از آنجایی که در الگوریتم پیشنهادی ماتریس ورودی با روش

بیان شده هرمیتی می گردد، بنابراین حالت ورودی الگوریتم برابر

با $|b\rangle = \sum_{i=1} \beta_i |v_i\rangle$ خواهد بود. در ادامه به تحلیل خطای باند

1.1.3. تحلیل باند خطای خروجی

در مرحله 6 وقتی $|1\rangle$ مشاهده می گردد، حالت خروجی برابر

با $|\tilde{x}\rangle = \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\tilde{\sigma}_i} |v_i\rangle$ می باشد. طبق توضیحات اول این بخش

بود. بنابراین طبق مرجع [20] برای تقویت دامنه و رساندن احتمال به یک مقدار ثابت (99 درصد) نیاز است که مراحل قبلی به تعداد $\sqrt{1/p} = O(\kappa^2/\varepsilon)$ تکرار گردد. بنابراین پیچیدگی محاسباتی کلی الگوریتم از مرتبه لگاریتمی $O((polylog(n^2)/\delta)(\kappa^2/\varepsilon)) = O(\frac{\kappa polylog(n^2)}{\delta^2 \|A\|_F})$ خواهد بود.

3.1.3. مقایسه بین روش‌های مختلف

در جدول (1)، پیچیدگی محاسباتی (سرعت الگوریتم)، محدودیت‌های مختلف، نحوه پیاده‌سازی و کاربرد زمان واقعی روش‌های پیشنهادی مقاله با چند روش رایج کلاسیک و کوانتومی مقایسه شده است. روش کلاسیک-کوانتومی پیشنهادی به علت انجام محاسبات کلاسیک در مرحله 1 دارای پیچیدگی نسبتاً زیادی می‌باشد. اما در مقایسه با روش‌های کلاسیک همچون تجزیه چولسکی دارای پیچیدگی کمتری است. روش تمام کوانتومی پیشنهادی این مقاله در مقایسه با روش‌های دیگر دارای پیچیدگی مناسب و شامل محدودیت‌های کمتری می‌باشد. همچنین با توجه به استفاده از قضیه 1 در ساخت ورودی الگوریتم، پارامترهای تخمین زده شده در هر دو روش پیشنهادی دارای بایاس نخواهند بود. طبق جدول (1)، هر دو روش پیشنهادی از نظر پیاده‌سازی آسان و کاربرد زمان واقعی دارای عملکرد قابل قبولی در مقایسه با دیگر روش‌ها می‌باشند. با توجه به توضیحات داده شده روش‌های پیشنهادی این مقاله در حالی که محدودیت‌های کمتری نسبت به سایر روش‌ها دارند، پیچیدگی محاسباتی آنها قابل قبول بوده و از لحاظ پیاده‌سازی آسان و کاربرد زمان واقعی دارای عملکرد مناسبی می‌باشند.

4. شبیه‌سازی

در این قسمت دو نمونه مثال از شبیه‌سازی الگوریتم کلاسیک-کوانتومی پیشنهادی ارائه خواهد شد. برای حل این مثال‌ها از محیط گوگل کلاب² استفاده می‌کنیم. برای شبیه‌سازی الگوریتم

حالت واقعی برابر با $|x^*\rangle = \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i}{\sigma_i} |v_i\rangle$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - x^*\|_2^2 &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{\beta_i}{\tilde{\sigma}_i} - \frac{\beta_i}{\sigma_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \left(1 - \frac{\sigma_i}{\tilde{\sigma}_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \left(\frac{(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i)^2}{\sigma_i^2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

با توجه به قضیه 2، $\|\tilde{\sigma}_i - \sigma_i\| \leq \delta \|A\|_F$ خواهد بود. همچنین با توجه به شرط مرحله 4 الگوریتم، $\tilde{\sigma}_i > T$ می‌باشند. بنابراین یک کران بالا برای رابطه فوق به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2} \left(\frac{(\tilde{\sigma}_i - \sigma_i)^2}{\sigma_i^2} \right) \leq \left(\frac{\delta \|A\|_F}{T} \right)^2. \quad (16)$$

طبق مرجع [20]، یکی از انتخاب‌های مناسب $T = \frac{1}{2\kappa}$ می‌باشد. با این انتخاب داریم:

$$\|\tilde{x} - x^*\|_2^2 \leq \frac{4\delta^2 \|A\|_F^2 \kappa^2}{\varepsilon^2} \|x^*\|_2^2. \quad (17)$$

بنابراین با انتخاب مناسب پارامتر دقت δ می‌توان خطای باند خروجی را در محدوده مناسبی قرار داد.

2.1.3. تحلیل پیچیدگی محاسباتی

در مرحله 1 می‌توان با بکارگیری مراحل مرجع [21]، حالت کوانتومی $|b\rangle = \sum_{i=1}^k \beta_i |v_i\rangle = |\psi_1\rangle$ را ایجاد نمود. پیچیدگی محاسباتی این مرحله از مرتبه $O(\log(n))$ می‌باشد. در مرحله 2 با توجه به مرجع [19]، پیچیدگی محاسباتی روش QSVE از مرتبه $O(polylog(n^2)/\delta)$ خواهد بود. در مرحله 6، با انتخاب $T = \frac{1}{2\kappa}$ احتمال اصلی مشاهده حالت $|1\rangle$ برابر با $p = \sum_i \frac{\beta_i^2}{4\kappa^2 \tilde{\sigma}_i^2}$ می‌باشد. با در نظر گرفتن $\eta = \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\tilde{\sigma}_i^2}$ داریم:

$$p = \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{4\kappa^2 \tilde{\sigma}_i^2} = \frac{1}{4\kappa^2} \sum_{i=1}^k \frac{\beta_i^2}{\tilde{\sigma}_i^2} = \frac{1}{4\kappa^2} \eta \quad (18)$$

همچنین مقدار بدست آمده برای باند خطا در قسمت قبل $\varepsilon^2 = 4\delta^2 \|A\|_F^2 \kappa^2$ می‌باشد. اگر $\eta \geq \frac{\varepsilon^2}{\kappa^2}$ باشد آنگاه $p \geq \frac{\varepsilon^2}{4\kappa^4}$ خواهد

² Google Colab

ابرسانا و یون های به دام افتاده پشتیبانی می کند) استفاده شود. برای شبیه سازی و آنالیز مدار در این نرم افزار باید از زبان پایتون استفاده کرد. ابتدا به عنوان مثال یک مساله ساده که نیاز به 4 کیوبیت دارد را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که ماتریس های داده به الگوریتم کوانتومی به صورت زیر خواهند بود:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

های کوانتومی در این محیط باید ابتدا پکیج QISKIT در این محیط نصب گردد. QISKIT یک نرم افزار منبع باز برای کار با کامپیوترهای کوانتومی در سطح مدارها، پالس ها و الگوریتم ها است. این نرم افزار ابزارهایی برای ساخت و دستکاری برنامه های کوانتومی و اجرای آن ها بر روی نمونه های اولیه دستگاه های کوانتومی (IBM Quantum Experience) یا شبیه سازهای یک رایانه کوانتومی ارائه می کند. این نرم افزار از مدل مداری برای محاسبات کوانتومی پیروی می کند و می تواند برای هر سخت افزار کوانتومی (در حال حاضر از کیوبیت های

جدول (1): مقایسه روش های مختلف

روش	پیچیدگی	محدودیت ها	پیاده سازی	کاربرد زمان واقعی
[12]	$O(\frac{\kappa^2 s^2 \log(n)}{\epsilon})$	هرمیتی بودن، خوش حالت بودن، تنگ بودن	متوسط	دارد
[11]	$O(\frac{\kappa^3 s^2 \log(n)}{\epsilon^2})$	هرمیتی بودن، خوش حالت بودن، تنگ بودن	متوسط	دارد
[14]	$O(\frac{\kappa^2 \sqrt{r} \text{polylog}(n^2)}{\epsilon})$	ندارد	متوسط	دارد
روش تجزیه چولسکی (کلاسیک)	$O(n^3)$	ندارد	آسان	ندارد
روش CG (کلاسیک)	$O(\sqrt{\kappa} sn)$	خوش حالت بودن، تنگ بودن	آسان	ندارد
روش پیشنهادی کلاسیک-کوانتومی	$O(n^2(\log(n) + r))$	ندارد	متوسط	ندارد
روش پیشنهادی تمام کوانتومی	$O(\frac{\kappa \text{polylog}(n^2)}{\delta^2 \ A\ _F})$	ندارد	متوسط	دارد

در این مثال از یک کیوبیت برای نمایش $|b\rangle$ و در نهایت برای نمایش $|x\rangle$ و از دو کیوبیت برای ذخیره سازی دو مقدار ویژه و از یک کیوبیت به عنوان کیوبیت کمکی استفاده خواهیم کرد. ابتدا مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم تا بتوانیم یک نمایش دودویی دقیق از مقادیر ویژه مقیاس شده در رجیستر را انتخاب کنیم. با این حال، می دانیم که برای اجرای الگوریتم نیازی به دانش قبلی از مقادیر ویژه نیست. بنابراین داریم:

در این مثال از یک کیوبیت برای نمایش $|b\rangle$ و در نهایت برای نمایش $|x\rangle$ و از دو کیوبیت برای ذخیره سازی دو مقدار ویژه و از یک کیوبیت به عنوان کیوبیت کمکی استفاده خواهیم کرد. ابتدا مقادیر ویژه را محاسبه می کنیم تا بتوانیم یک نمایش دودویی دقیق از مقادیر ویژه مقیاس شده در رجیستر را انتخاب کنیم. با این حال، می دانیم که برای اجرای الگوریتم نیازی به دانش قبلی از مقادیر ویژه نیست. بنابراین داریم:

$$\lambda_1 = \frac{2}{3}, \lambda_2 = \frac{4}{3}. \quad (20)$$

در مرحله تخمین فاز خروجی به صورت دودویی و به فرم $\frac{\lambda_j t}{2\pi}$ خواهد بود. بنابراین با تنظیم $t = 2\pi \cdot \frac{3}{8}$ ، تخمین فاز دارای خروجی $\frac{\lambda_1 t}{2\pi} = \frac{1}{4}$ ، $\frac{\lambda_2 t}{2\pi} = \frac{1}{2}$ خواهد بود که به ترتیب به فرم $|10\rangle$ و $|01\rangle$ نوشته می شود. بردارهای ویژه نیز برابر با $|u_1\rangle =$

$$\begin{aligned} 1. \text{ آماده سازی حالت های کوانتومی: } |b\rangle &= |0\rangle. \\ 2. \text{ پس از تخمین فاز داریم: } \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle &+ \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle \\ 3. \text{ در مرحله چرخش کنترلی با تنظیم } C = \frac{1}{8} \text{ داریم:} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle &\left(\sqrt{1 - \frac{(1/8)^2}{(1/4)^2}}|0\rangle + \frac{1/8}{1/4}|1\rangle \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle \left(\sqrt{1 - \frac{(1/8)^2}{(1/2)^2}}|0\rangle + \frac{1/8}{1/2}|1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle|u_1\rangle \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \right) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle|u_2\rangle \left(\sqrt{1 - \frac{1}{16}}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle \right). \end{aligned}$$

4. بعد از اعمال عکس تخمین فاز داریم:

$$\left\{-\frac{1}{8} + \frac{1}{8\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{3}{8} - \frac{3}{8\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right\},$$

$$\left\{-\frac{1}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{3}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right\}$$

(22)

با توجه به داده‌های مساله سیستم خطی به فرم زیر نمایش داده می‌شود.

$$\begin{aligned}\beta_0 - \sqrt{2}\beta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \\ \beta_0 - \sqrt{2}\beta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3 &= \frac{3}{8} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \\ \beta_0 + \sqrt{2}\beta_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \\ \beta_0 + \sqrt{2}\beta_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3 &= \frac{3}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(23)

سیستم فوق به فرم ماتریسی دارای نمایش زیر است:

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \\ \frac{3}{8} - \frac{3}{8\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}} \\ \frac{3}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(24)

این مساله در حالت کلی به صورت $Ax = b$ نشان داده می‌شود. برای ایجاد ماتریس‌های ورودی به الگوریتم (شرط هرمیتی بودن)، رابطه $A^T Ax = A^T b$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $A^T A$ و $A^T b$ به عنوان ورودی‌های الگوریتم در نظر گرفته می‌شوند و ورودی‌های الگوریتم به صورت زیر خواهند بود.

$$A^T A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 15 & 9 & 5 & -3 \\ 9 & 15 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & 15 & -9 \\ -3 & -5 & -9 & 15 \end{bmatrix}, A^T b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(25)

ماتریس فوق یک ماتریس هرمیتی با مقادیر ویژه $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$ و $\lambda_2 = 4$ و $\lambda_4 = 8$ می‌باشد. بردارهای ویژه متناظر آنها به صورت زیر می‌باشد.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_1\rangle \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4}}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_2\rangle \left(\sqrt{1 - \frac{1}{16}}|0\rangle + \frac{1}{4}|1\rangle \right).$$

با اندازه‌گیری کیوبیت کمکی در حالت $|1\rangle$ داریم:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_1\rangle \left(\frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle|u_2\rangle \left(\frac{1}{4}|1\rangle\right)}{\sqrt{\frac{5}{32}}}.$$

با دقت در رابطه بالا داریم:

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_2\rangle}{\sqrt{5/32}} = \frac{|x\rangle}{\|x\|}.$$

بنابراین بدون استفاده از گیت اضافی می‌توان نرم $|x\rangle$ را بدست آورد که احتمال مشاهده 1 در کیوبیت کمکی می‌باشد.

$$p(|1\rangle) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{32} = \|x\|^2$$

لازم به ذکر است که خروجی نهایی الگوریتم (جواب $|x\rangle$) برابر با

$$\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}|u_2\rangle}{\sqrt{5/32}} \right) \cdot \left(\frac{1}{8} \times \frac{3}{8} \right) = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 0.375 \end{pmatrix}$$

خواهد بود. در قسمت پیوست مقاله به منظور آشنایی بیشتر خوانندگان با نحوه شبیه‌سازی با استفاده از QISKIT، کدهای شبیه‌سازی و توضیحات مربوطه به زبان پایتون قرار داده شده است. در مثال دوم یک مساله رگرسیون خطی با استفاده از روش پیشنهادی حل می‌گردد. در این قسمت مدل در نظر گرفته شده برای سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i = x_i^T \beta + \varepsilon_i. \quad (21)$$

به منظور بررسی الگوریتم پیشنهادی فرض می‌کنیم مجموعه داده نمونه‌برداری شده (4 پارامتری) به صورت زیر می‌باشد.

این خروجی متناسب با جواب اصلی مساله یعنی $\frac{1}{32}[-1 \ 7 \ 11 \ 13]^T$ می باشد زیرا ضرب داخلی آنها برابر با یک می باشد.

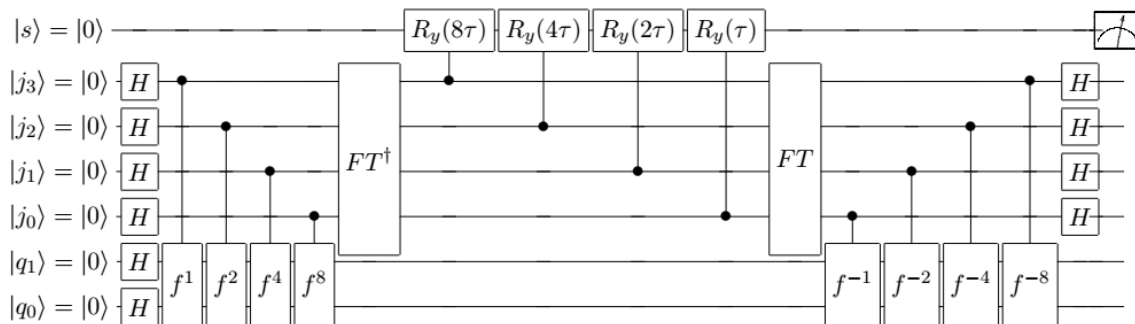
در این قسمت برای شبیه سازی مدار فوق از QISKIT Aer Backend استفاده شده است. همچنین برای پیاده سازی اپراتورهای یکانی $U = \exp(iAt/16)$ از روش GLOA استفاده شده است [23]. این روش سبب می شود که اپراتور مورد نظر به گیت های یکانی ساده تر تجزیه شده و پیاده سازی آن ساده تر گردد. از آنجایی که الگوریتم کوانتومی مورد نظر احتمالی می باشد خروجی بدست آمده در شبیه ساز QISKIT به صورت شکل (2) خواهد بود. در شکل (2) نمودار آبی رنگ معادل با خروجی اصلی (محاسبات کلاسیک) و نمودار قرمز رنگ معادل با خروجی بدست آمده حاصل از الگوریتم کوانتومی پیشنهادی می باشد. همانطور که مشخص است. اعداد بدست آمده نسبت به اعداد واقعی دارای مقدار خطا می باشند که علت آن استفاده از روش GLOA در تخمین اپراتورهای یکانی مرحله تخمین فاز می باشد.

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= -|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle \\ |u_2\rangle &= |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle \\ |u_3\rangle &= |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \\ |u_4\rangle &= -|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \end{aligned} \quad (26)$$

همچنین $b = \left[\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}\right]^T$ را می توان به صورت $\sum_{j=1}^4 |u_j\rangle$ با ضرب $\beta_j = \frac{1}{2}$ نوشت. بنابراین ورودی b به صورت $|b\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$ بیان می گردد. مدار پیشنهادی برای حل مساله فوق در شکل (1) نشان داده شده است. مرحله تخمین فاز با $U = \exp(iAt/16)$ انجام می شود که خروجی آن به صورت رابطه (27) می باشد.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|0001\rangle^c |u_1\rangle^I + \frac{1}{2}|0010\rangle^c |u_2\rangle^I \\ + \frac{1}{2}|0100\rangle^c |u_3\rangle^I \\ + \frac{1}{2}|1000\rangle^c |u_4\rangle^I \end{aligned} \quad (27)$$

این رابطه معادل با $\sum_{j=1}^N \beta_j |u_j\rangle^I \left| \frac{\lambda_j t_0}{2\pi} \right\rangle$ (با فرض $t_0 = 2\pi$) می باشد. لازم به ذکر است که در این مثال به علت 4 کیوبیتی بودن رجیستر ساعت، $|\tilde{\lambda}_j\rangle = |\lambda_j\rangle$ می باشد. با انتخاب $C = \frac{8\pi}{2^r}$ پس از مرحله چرخش کنترل خروجی به صورت $\frac{1}{\sqrt{340}}(-|00\rangle + 7|01\rangle + 11|10\rangle + 13|11\rangle)$ خواهد بود.



شکل (1): مدار پیشنهادی برای حل مساله، در این شکل $f = \exp(iAt/16)$ و $\tau = \frac{\pi}{2^r}$ می باشد.

حضور نویز رنگی (به شرط داشتن ماتریس همبستگی) به تخمین بدون بایاس نویز دست یافت. روش پیشنهادی ترکیبی مقاله دارای پیچیدگی محاسباتی از مرتبه $O(n^2 \log(n))$ و روش تمام کوانتومی پیشنهادی از مرتبه $O(\text{polylog}(n))$ نسبت به داده های ورودی می باشد. این در حالی است که روش های معمول حل حداقل مربعات از مرتبه $O(n^3)$ می باشند. در این مقاله روش پیشنهادی ترکیبی به منظور

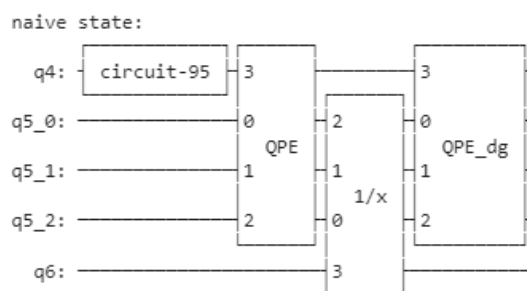
5. نتیجه گیری

در این مقاله از محاسبات کوانتومی برای حل مساله حداقل مربعات تعمیم داده شده GLS در شناسایی سیستم استفاده گردید. در روش های پیشنهادی برخلاف روش پایه حداقل مربعات HHL، نیاز نیست که ماتریس داده هرمیتی و خوش حالت باشد. همچنین با بکارگیری این الگوریتم ها می توان در

print('classical state:', classical_solution.state)
classical state: [1.125, 0.375]

یکی از مشکلات الگوریتم کوانتومی HHL این است که خروجی مساله به صورت یک حالت کوانتومی است و برای بدست آوردن تک تک المانهای حالت باید به تعداد N پرس وجو انجام داد. بنابراین پیچیدگی محاسباتی الگوریتم به مقدار $O(N)$ افزایش خواهد یافت که ویژگی افزایش سرعت با این کار از بین می‌رود. بنابراین معمولاً خروجی الگوریتم به صورت تابعی از حالت $|x\rangle$ خواهد بود (برای مثال $\langle x^T | M | x \rangle$ محاسبه می‌گردد). بنابراین خروجی الگوریتم به صورت ساده³ و بدون تغییر در نظر گرفته می‌شود. با دستور شکل (3) خروجی ساده الگوریتم مشاهده می‌گردد.

print ('naive state:')
print (naive_hhl_solution.state)



شکل (3): خروجی ساده الگوریتم

با استفاده از دستور زیر نرم جواب‌های کلاسیک و کوانتومی به دست می‌آید.

```
print ('classical Euclidean norm:',  
classical_solution.euclidean_norm)  
print ('naive Euclidean norm: ',  
naive_hhl_solution.euclidean_norm)  
classical Euclidean norm: 1.1858  
naive Euclidean norm: 1.1858
```

برای رسیدن به جواب نهایی (جواب غیرساده همچون جواب کلاسیک) از دستورات زیر استفاده می‌کنیم.

```
from qiskit.quantum_info import Statevector  
naive_sv = Statevector (naive_hhl_solution.state).data  
naive_full_vector = np.array ([naive_sv [16], naive_sv  
[17 ]])  
print ('naive raw solution vector : ' , naive_full_vector)
```

³ Naive

شبیه‌سازی و آزمون عملی بر روی محیط QISKIT شرکت IBM پیاده‌سازی شده است. مقایسه بین روش‌های پیشنهادی و روش‌های رایج کلاسیک و کوانتومی نشان داد که روش‌های پیشنهادی مقاله علاوه بر داشتن کمترین محدودیت‌ها سبب کاهش بار محاسباتی و افزایش سرعت در حل مسائل شناسایی مبتنی بر حداقل مربعات خطا می‌گردند.

Qiskit Simulation_Sample Output:

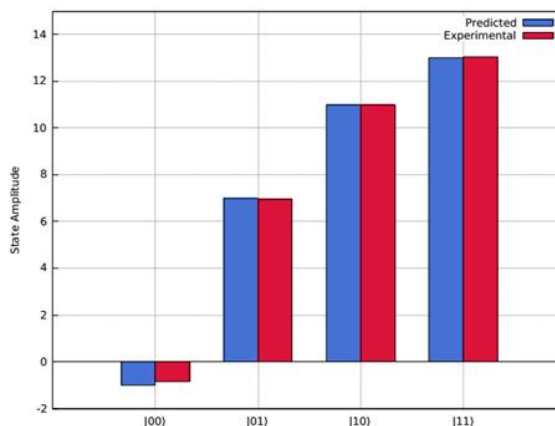
Predicted solution:

[-1 7 11 13]

Simulated experiment solution:

[-0.8425 6.9604 10.9980 13.0341]

Error: 0.1660



شکل (2): خروجی به دست آمده در شبیه‌سازی با QISKIT

پیوست. پیاده‌سازی مساله در شبیه‌ساز کوانتومی

QISKIT

برای حل مساله اول بیان شده در بخش 4 در شبیه‌ساز کوانتومی، ابتدا پکیج QISKIT بر روی محیط گوگل کلاب نصب می‌شود. سپس ورودی‌های مساله و نتیجه الگوریتم به صورت زیر تعریف می‌گردد.

```
import numpy as np  
from linear_solvers import NumPyLinearSolver, HHL  
matrix = np.array( [1,-1/3], [-1/3,1] )  
vector = np.array ( [1,0] )  
naive_hhl_solution = HHL().solve(matrix, vector)
```

با استفاده از دستور زیر ابتدا مساله بالا را به شکل کلاسیک حل می‌کنیم.

```
classical_solution = NumPyLinearSolver().solve(matrix,  
vector)
```

```

params=b*t
qc.p(np.pi/2,qrb[0])
qc.cx(qrl[0],qrb[0])
qc.ry(params,qrb[0])
qc.cx(qrl[0],qrb[0])
qc.ry(-params,qrb[0])
qc.p(3*np.pi/2,qrb[0])
# Controlled  $e^{i2At}$  on  $\lambda_{2}$ :
params = b*t*2
qc.p(np.pi/2,qrb[0])
qc.cx(qrl[1],qrb[0])
qc.ry(params,qrb[0])
qc.cx(qrl[1],qrb[0])
qc.ry(-params,qrb[0])
qc.p(3*np.pi/2,qrb[0])
# Inverse QFT
qc.h(qrl[1])
qc.rz(-np.pi/4,qrl[1])
qc.cx(qrl[0],qrl[1])
qc.rz(np.pi/4,qrl[1])
qc.cx(qrl[0],qrl[1])
qc.rz(-np.pi/4,qrl[0])
qc.h(qrl[0])
# Eigenvalue rotation
t1=(-np.pi +np.pi/3 - 2*np.arcsin(1/3))/4
t2=(-np.pi -np.pi/3 + 2*np.arcsin(1/3))/4
t3=(np.pi -np.pi/3 - 2*np.arcsin(1/3))/4
t4=(np.pi +np.pi/3 + 2*np.arcsin(1/3))/4
qc.cx(qrl[1],qra[0])
qc.ry(t1,qra[0])
qc.cx(qrl[0],qra[0])
qc.ry(t2,qra[0])
qc.cx(qrl[1],qra[0])
qc.ry(t3,qra[0])
qc.cx(qrl[0],qra[0])
qc.ry(t4,qra[0])
qc.measure_all()
print(f'Depth: {qc.depth()}')
print(f'CNOTS: {qc.count_ops()['cx']}')
qc.draw(fold=-1)

```

naive raw solution vector : $[0.75+3.01063-16j$
 $0.25+3.3695-17j]$

```

def get_solution_vector (solution)
solution_vector = Statevector
(solution.state).data[16:18].real
norm= solution.euclidean_norm
return norm= *solution_vector /
np.linalg.norm(solution_vector)
print ('full naive solution vector:)
get_solution_vector (naive_hhl_solution))
print ('classical state:' , classical_solution.state)

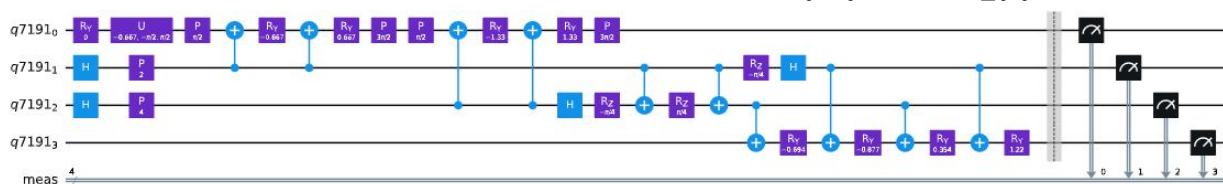
```

طبق نتایج به دست آمده، نتیجه خروجی الگوریتم کلاسیک و کوانتومی با یکدیگر برابر شده است. در شکل (4) نیز کدهای مربوط به شبیه‌سازی مدار کوانتومی برای مثال مورد نظر قرار داده شده است.

```

from qiskit import QuantumRegister, QuantumCircuit
import numpy as np
t = 2
NUM_QUBITS = 4 # Total number of qubits
nb = 1 # Number of qubits representing the solution
nl = 2 # Number of qubits representing the eigenvalues
theta = 0 # Angle defining  $|b\rangle$ 
a = 1 # Matrix diagonal
b = -1/3 # Matrix off-diagonal
# Initialize the quantum and classical registers
qr = QuantumRegister(NUM_QUBITS)
# Create a Quantum Circuit
qc = QuantumCircuit(qr)
qrb = qr[0:nb]
qrl = qr[nb:nb+nl]
qra = qr[nb+nl:nb+nl+1]
# State preparation.
qc.ry(2*theta, qrb[0])
# QPE with  $e^{iAt}$ 
for qu in qrl:
qc.h(qu)
qc.p(a*t, qrl[0])
qc.p(a*t*2, qrl[1])
qc.u(b*t, -np.pi/2, np.pi/2, qrb[0])
# Controlled  $e^{iAt}$  on  $\lambda_{1}$ :

```



شکل (4): رسم مدار کوانتومی

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می کنند که هیچ تعارض منافی ندارند.

مراجع

- [1] P. Eykhoff, "Identification theory: Practical implications and limitations," *Measurement*, vol. 2, no. 2, pp. 75-85, 1984, doi: 10.1016/0263-2241(84)90036-8.
- [2] L. Ljung, "System Identification," *Signal Anal. Predict.*, pp. 163-173, 1998, doi: 10.1007/978-1-4612-1768-8_11.
- [3] A. Ghanbari Sorkhi, H. Hassanpour, and M. Fateh, "Regions Proposal Selection in Objects Detection and Recognition Systems," *Soft Comput. J.*, vol. 5, no. 2, pp. 34-47, 2016, dor: 20.1001.1.23223707.1395.5.2.4.1 [In Persian]
- [4] J.J. Vyas, B. Gopalsamy, and H. Joshi, "System Identification," *SpringerBriefs Appl. Sci. Technol.*, pp. 47-51, 2018, doi: 10.1007/978-981-13-2547-2_4.
- [5] M. Karari, *System Identification*, 4th ed., Amirkabir University of Technology Press, 2013 [In Persian].
- [6] M. Mohagheghi, "An approach to accelerate policy iteration for probabilistic model checking of Markov decision processes using machine learning," *Soft Comput. J.*, vol. 11, no. 2, pp. 134-148, 2023, doi: 10.22052/scj.2023.243360.1029 [In Persian]
- [7] S. Kalantari and M.J. Abdollahifard, "Optimization-based multiple-point geostatistics: A sparse way," *Comput. Geosci.*, vol. 95, pp. 85-98, 2016, doi: 10.1016/j.cageo.2016.07.006.
- [8] S. Kalantari, A. Madadi, M. Ramezani, and A. Hajati, "Controlling the Ground Particle Size and Ball Mill Load Based on Acoustic Signal, Quantum Computation Basis, and Least Squares Regression, Case Study: Lakan Lead-Zinc Processing Plant," *Int. J. Ind. Electron. Control Optim.*, vol. 6, no. 3, pp. 205-218, Sep. 2023, doi: 10.22111/ieco.2023.45981.1488.
- [9] S. Kalantari, A. Madadi, and M. Ramezani, "Reconstruction of geological images based on an adaptive spatial domain filter: an example to introduce quantum computation to geosciences," *Int. J. Min. Geo-Eng.*, vol. 57, no. 2, pp. 183-194, 2023, doi: 10.22059/IJMGE.2023.352048.595007.
- [10] M. Khosravi and M. Zekri, "A review of quantum neural networks," *Soft Comput. J.*, vol. 1, no. 1, pp. 46-55, 2012, dor: 20.1001.1.23223707.1391.1.1.113.0 [In Persian].
- [11] Y. Liu and S. Zhang, "Fast quantum algorithms for least squares regression and statistic leverage scores," *Theor. Comput. Sci.*, vol. 657, pp. 38-47, 2017, doi: 10.1016/j.tcs.2016.05.044.
- [12] A.W. Harrow, A. Hassidim, and S. Lloyd, "Quantum algorithm for linear systems of equations," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, no. 15, 2009, doi: 10.1103/physrevlett.103.150502.
- [13] I. Kerenidis and A. Prakash, "Quantum Recommendation Systems," 2016, arXiv:1603.08675, [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/1603.08675>.
- [14] K. Li et al., "Quantum Linear System Algorithm for General Matrices in System Identification," *Entropy*, vol. 24, no. 7, p. 893, 2022, doi: 10.3390/e24070893.
- [15] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2010, doi: 10.1017/CBO9780511976667.
- [16] S. Kalantari, M. Ramezani, and A. Madadi, "Introducing a New Hybrid Adaptive Local Optimal Low Rank Approximation Method for Denoising Images," *Int. J. Ind. Electron. Control Optim.*, vol. 3, no. 2, pp. 173-185, 2020, doi: 10.22111/ieco.2019.31245.1199.
- [17] S. Kalantari, M. Ramezani, A. Madadi, and V.V. Estrela, "Reduction AWGN from Digital Images Using a New Local Optimal Low-Rank Approximation Method," *Smart Innov. Syst. Technol.*, 2020, doi: 10.1007/978-3-030-57548-9_5.
- [18] G.H. Golub, A. Hoffman, and G.W. Stewart, "A generalization of the Eckart-Young-Mirsky matrix approximation theorem," *Linear Algebra Appl.*, vol. 88-89, pp. 317-327, 1987, doi: 10.1016/0024-3795(87)90114-5.
- [19] S.A. Goreinov, I. Oseledets, D. Savostyanov, E.E. Tyrtshnikov, and N.L. Zamarashkin, "How to Find a Good Submatrix," *Matrix Methods Theory Alg. Appl.*, pp. 247-256, 2010, doi: 10.1142/9789812836021_0015.
- [20] N.K. Kumar and J. Schneider, "Literature survey on low rank approximation of matrices," *Linear Multilinear Algebra*, vol. 65, no. 11, pp. 2212-2244, 2016, doi: 10.1080/03081087.2016.1267104.
- [21] L. Grover and T. Rudolph, "Creating superpositions that correspond to efficiently integrable probability distributions," 2002, arXiv:quant-ph/0208112, [Online]. Available: <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0208112>
- [22] L. Wossnig, Z. Zhao, and A. Prakash, "Quantum Linear System Algorithm for Dense Matrices," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, no. 5, 2018, doi: 10.1103/physrevlett.120.050502.
- [23] Y. Cao, A. Daskin, S. Frankel, and S. Kais, "Quantum Circuit Design for Solving Linear Systems of Equations," *Mol. Phys.*, vol. 110, no. 15-16, pp. 1675-1680, 2012, doi: 10.1080/00268976.2012.668289.