



University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: [scj.kashanu.ac.ir](http://scj.kashanu.ac.ir)



## پرسه زدن تصادفی روی گراف‌های همبند و کاربرد آن در شبکه‌های الکترونیکی<sup>✧</sup>

مهدی شمس<sup>✱</sup>، استادیار، غلامرضا حسامیان<sup>۲</sup>، دانشیار

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.

<sup>۲</sup> گروه آمار، دانشکده ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

### چکیده

در این مقاله متغیرهای پرسه زدن تصادفی تحلیل می‌شوند. سپس روابط مقادیر ویژه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این میان یک کران برای متغیرهای اصلی تعیین می‌شود. سپس کاربرد در شبکه‌های الکترونیکی شرح داده خواهد شد. همچنین کاربردهایی در علوم کامپیوتر به ویژه در مدیریت رمزگذاری برای شبکه محاسبات ذکر می‌شود. دستاوردهای فیزیکی برای به دست آوردن نتایجی در پرسه زدن تصادفی به کار برده می‌شوند. در پایان الگوریتم‌های کاربردی پرسه زدن تصادفی و نمونه‌گیری با پرسه زدن تصادفی بیان خواهند شد.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۲۴ مهر ماه ۱۴۰۱

پذیرش ۱۵ مهر ماه ۱۴۰۲

کلمات کلیدی:

زنجیر مارکوف

توزیع ایستا

نرخ آمیختگی

تابع مولد احتمال

گراف همبند

© ۱۴۰۲ نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

### ۱. مقدمه

تصادفی روی گراف جهت‌دار نشان داد. به طور مشابه، زنجیر مارکوف برگشت‌پذیر را نیز می‌توان به صورت یک پرسه زدن تصادفی روی گراف بدون جهت و زنجیر مارکوف متقارن را به صورت پرسه زدن تصادفی روی گراف متقارن منتظم نشان داد. در این مقاله، نتایج انواع پرسه زدن تصادفی فرمول‌نویسی می‌شود.

پرسه زدن تصادفی در بسیاری از مدل‌های ریاضی و فیزیک وارد می‌شود. برای مثال برهم‌زدن نظم یک دسته کارت را در نظر بگیرید. همچنین گرافی را فرض کنید که راس‌های آن جایگشت هر دسته باشد و هر زوجی که با هر بار برهم‌زدن نظم آمده‌اند، مجاور یکدیگر باشند که این به نحوه برهم‌زدن نظم وابسته است. تکرار این حرکات، یک پرسه زدن تصادفی روی گراف را تشکیل می‌دهد [۱]. حرکات براونی گرد و غبار در یک اتاق نیز

پرسه زدن تصادفی روی گراف، یک دنباله تصادفی از راس‌های گراف است که شروع حرکت از یک نقطه دلخواه بوده و سپس یک همسایگی از آن نقطه به تصادف انتخاب شده و بعد از حرکت به نقطه جدید، عمل مذکور تکرار می‌شود. پرسه زدن تصادفی یک زنجیر مارکوف متناهی برگشت‌پذیر است. در حقیقت، تفاوت زیادی بین پرسه زدن تصادفی روی گراف و زنجیر مارکوف متناهی وجود ندارد. اگر یال‌ها وزن‌دار باشند، همه زنجیرهای مارکوف را می‌توان به صورت یک پرسه زدن

✧ نوع مقاله: مروری

✱ نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: [mehdishams@kashanu.ac.ir](mailto:mehdishams@kashanu.ac.ir) (شمس)

[gh.hesamian@pnu.ac.ir](mailto:gh.hesamian@pnu.ac.ir) (حسامیان)

یک پرسه زدن تصادفی است. در برخی موارد مدل‌های مکانیک آماری نیز شامل پرسه زدن تصادفی هستند. نظریه سستی پرسه زدن تصادفی، فقط شامل پرسه زدن تصادفی ساده بود و در مورد گراف‌های نامتناهی مثل شبکه‌ها و مطالعه رفتار کیفی آنها تحقیقاتی صورت نگرفته بود. برای مثال در نظریه سستی سوالاتی نظیر اینکه آیا با احتمال یک، پرسه زدن تصادفی به نقطه شروع خود بازمی‌گردد و آیا این برگشت در بی‌نهایت رخ می‌دهد، بی‌جواب مانده بود. پولیا [۲] ثابت می‌کند که در یک پرسه زدن تصادفی در شبکه  $d$ -بُعدی، اگر  $d = 2$  باشد در بی‌نهایت، و برای  $d \geq 3$  با تعداد متناهی حرکت، به نقطه شروع خود باز می‌گردد [۳]. برای مشاهده نتایج بیشتر در پرسه زدن تصادفی روی گراف نامتناهی مرجع [۴] را ببینید. کاربردهای زنجیرهای مارکوف در هوش مصنوعی و راستی‌آزمایی مدل‌سازی سیستم‌های کامپیوتری در مرجع [۵] و کاربرد آنها در مدل‌سازی برای شبیه‌سازی انتشار ویروس در مرجع [۶] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین مطالعه مرجع [۱] در رابطه با پرسه زدن تصادفی و زنجیر مارکوف متناهی [۳] و در مورد پرسه زدن تصادفی و شبکه‌های الکترونیکی مطالعه‌های [۷] و [۸] می‌تواند مفید باشد. شبکه‌های الکتریکی زبان متفاوتی را برای زنجیرهای مارکوف برگشت‌پذیر ارائه می‌کنند. این دیدگاه به دلیل بینش به دست آمده از قوانین فیزیکی شبکه‌های الکتریکی مفید است. اخیراً، پرسه زدن تصادفی عمومی‌تر شده است، اما گراف‌های متناهی بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند و جنبه‌های کیفی آن مورد مطالعه بیشتری قرار گرفته است. برای مثال، قبل از بازگشت به نقطه شروع چقدر باید پرسه بزنیم؟ متوسط پرسه‌ها قبل از اینکه راس مشخصی یا همه راس‌ها را ببینیم، چقدر است؟ توزیع پرسه زدن تصادفی با چه نرخ به توزیع نهایی آن میل می‌کند؟ همان‌طور که مشخص است، نظریه پرسه زدن تصادفی به دیگر شاخه‌های نظریه گراف نزدیک است. ویژگی‌های اساسی پرسه زدن تصادفی توسط طیف گراف توضیح داده می‌شود، همچنین مقاومت الکتریکی شبکه‌های الکترونیکی با گراف‌ها مرتبط است [۹]. شیوه‌های متفاوتی برای تعریف گراف وجود دارد که اغلب با نام نوعی از انتشار توصیف می‌شود (شلیک تراشه، تعادل بار

در شبکه‌های توزیع شده و ...) که متغیرهای اساسی آن با متغیرهای پرسه زدن تصادفی که در بالا ذکر شد، مشابه است. همه این روابط مفید هستند، هم وسیله‌ای برای مطالعه و هم فرصتی برای کاربرد پرسه زدن تصادفی را فراهم می‌کنند. با این حال در این مقاله، بیشتر توجه خود را به ارتباط مقادیر ویژه و شبکه‌های الکترونیکی معطوف می‌کنیم [۷]، [۸].

در سال‌های اخیر مباحث پرسه زدن تصادفی توسط برنامه‌های الگوریتمی انجام می‌شود. پرسه زدن تصادفی می‌تواند به بخش‌های مبهم مجموعه‌های بزرگ، تولید عناصر تصادفی در مجموعه‌های بزرگ و پیچیده، مثل مجموعه نقاط مشبک در جسم محدب یا مجموعه بهترین جورسازی‌ها در یک گراف (که به نوبه خود می‌تواند در شمارش مجانبی در این اشیا استفاده شوند) کاربرد داشته باشد. در این مقاله برخی از این کاربردها، با نتایج ساختاری بیشتر را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۱۰].

بخش‌بندی مقاله به شرح ذیل است. در بخش دوم مفاهیم مقدماتی تعریف می‌شوند. بخش سوم متغیرهای پرسه زدن تصادفی یعنی زمان دسترسی یا زمان اصابت، زمان پوشش و نرخ آمیختگی را مورد تحلیل قرار می‌دهد. سپس یک کران برای متغیرهای اصلی تعیین می‌شود. در ادامه مباحثی چون تقارن و زمان دسترسی، زمان دسترسی و زمان پوشش و یکنواختی مطرح خواهند شد. در بخش چهارم روابط مقادیر ویژه به خصوص طیف‌ها و زمان دسترسی و همچنین طیف‌ها و تابع مولد مورد تحلیل قرار خواهند گرفت. بخش پنجم به ارتباط الکترونیکی می‌پردازد و روش‌ها و نتایجی از نظریه الکتریک و استاتیک که اغلب با فیزیک ادغام می‌شود برای به دست آوردن نتایجی در پرسه زدن تصادفی به کار برده می‌شود. در بخش ششم یکی از مهم‌ترین متغیرها در پرسه زدن تصادفی، یعنی نرخ آمیختگی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. ساده‌ترین راه محاسبه نرخ آمیختگی در زمان‌های چندجمله‌ای، استفاده از مقادیر ویژه است، اما نظر به اینکه برخی گراف‌ها به صورت نمایی بزرگ می‌شوند و محاسبه مقادیر ویژه به کمک جبر خطی ممکن نیست، بنابراین نیاز به رویکردهای جایگزینی چون جفت‌سازی و میزان رسانایی احساس می‌شود. در این بخش این رویکردها بررسی می‌شوند و

داریم:

$$P(v_{k+1} = j | v_k = i, v_{k-1} = i_{k-1}, \dots, v_0 = i_0) = P(v_{k+1} = j | v_k = i) = p_{ij}. \quad (۱)$$

ممکن است راس  $v_0$  ثابت و یا دارای توزیع آغازین<sup>۱۶</sup>  $\pi_0$  باشد.

حال  $\pi_t$  را توزیع  $v_t$  در نظر می‌گیریم، به طوری که داشته باشیم

$$\pi_t(i) = \text{Prob}(v_t = i)$$

همچنین  $P = (p_{ij})_{i,j \in V}$  را ماتریس احتمال‌های انتقال<sup>۱۷</sup> این

زنجیر مارکوف تعریف می‌کنیم که آن را ماتریس مارکوف<sup>۱۸</sup> یا

ماتریس تصادفی<sup>۱۹</sup> نیز می‌نامند که دارای درایه‌های نامنفی است

و برای هر  $i \in V$  داریم  $\sum_{j \in V} p_{ij} = 1$ . بنابراین

$$p_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j \in V} A_{ij}} = \begin{cases} \frac{1}{\sum_{j \in V} A_{ij}} & ij \in E \\ 0 & o.w. \end{cases} \quad (۲)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{d(i)} & ij \in E \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

که در آن  $A_G = (A_{ij})$  با درایه‌ها

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & ij \in E \\ 0 & o.w. \end{cases} \quad (۳)$$

را ماتریس مجاورت<sup>۲۰</sup>  $G$  گویند. اگر  $D$  را ماتریس قطری<sup>۲۱</sup> با

درایه‌های قطری  $(D)_{ii} = 1/d(i)$  در نظر بگیرید، آنگاه داریم

$P = DA_G$ . اگر  $G$  یک گراف  $d$ -منتظم<sup>۲۲</sup> باشد (یعنی تمام

راس‌های آن درجه یکسانی برابر با  $d$  دارند)، می‌توان این قانون

پرسه زدن را با معادله ساده  $\pi_{t+1} = P^T \pi_t$  شرح داد ( $P^T$

ترانهاده ماتریس<sup>۲۳</sup>  $P$  است) و توزیع نقطه  $t$  ام را با

چندجمله‌ای<sup>۲۴</sup> روی  $\mathbb{R}^V$  نمایش می‌دهیم [۱۲]. بنابراین داریم

$\pi_t = (P^T)^t \pi_0$  که در آن  $(P^T)^t$  توان  $t$  ام ماتریس  $P^T$  است.

احتمال  $p_{ij}^t$  یعنی با شروع از  $i$ ، با  $t$  قدم به نقطه  $j$  می‌رسیم که

سپس کاربردهایی در طراحی الگوریتم معرفی می‌شوند. در پایان

در بخش هفتم بحث نمونه‌گیری با پرسه زدن تصادفی به خصوص

شمارش و حجم محاسبات، صافی متروپلیس و قوانین توقف

مورد تحلیل قرار می‌گیرند.

## ۲. مفاهیم و تعاریف

در این بخش به معرفی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز پرداخته

می‌شود.

گراف همبند<sup>۱</sup>  $G = (V, E)$  را با  $|V| = n$  راس<sup>۲</sup> و  $|E| = m$

یال<sup>۳</sup> در نظر بگیرید که در آن مجموعه راس‌ها (گره‌ها یا نقاط)

$E$  و مجموعه یال‌ها (پیونده یا خطوط) است. واژه همبند به این

معنی است که بین هر دو راس متمایز گراف، یک مسیر<sup>۴</sup> وجود

داشته باشد. وقتی  $ij \in E$ ، گوئیم  $i$  و  $j$  در مجاورت<sup>۵</sup> یا

همسایگی<sup>۶</sup> یکدیگر هستند و آن را به صورت  $i \sim j$  نمایش

می‌دهیم. با طرح این تعریف، درجه<sup>۷</sup> (یا ظرفیت<sup>۸</sup>) یک راس  $i$ ،

یعنی تعداد همسایگی‌های این راس (تعداد یال‌هایی که به این

راس برخورد می‌کنند) را با  $d(i)$  نمایش می‌دهیم.

اکنون پرسه زدن تصادفی<sup>۹</sup> روی گراف  $G$  را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم [۱].

از راس  $v_0$  شروع می‌کنیم، اگر در قدم  $t$  ام در راس  $v_t$  باشیم،

با احتمال<sup>۱۰</sup>  $1/d(v_t)$  به همسایه<sup>۱۱</sup>  $v_t$  می‌رویم. به وضوح

دنباله<sup>۱۲</sup> راس‌های تصادفی<sup>۱۳</sup>  $(v_t: t = 0, 1, \dots)$  یک زنجیر

مارکوف<sup>۱۴</sup> است، یعنی به شرط زمان حال، آینده و گذشته از هم

مستقل<sup>۱۵</sup> هستند. به عبارت دقیق‌تر برای هر  $i, j, i_0, \dots, i_{k-1} \in V$

<sup>1</sup> Connected graph

<sup>2</sup> Node/vertice/knot

<sup>3</sup> Edge

<sup>4</sup> Path

<sup>5</sup> Adjacency

<sup>6</sup> Neighborhood

<sup>7</sup> Degree

<sup>8</sup> Capacity

<sup>9</sup> Random walk

<sup>10</sup> Probability

<sup>11</sup> Neighbor

<sup>12</sup> Sequence

<sup>13</sup> Random vertices

<sup>14</sup> Markov chain

<sup>15</sup> Independent

<sup>16</sup> Initial distribution

<sup>17</sup> Matrix of transition probabilities

<sup>18</sup> Markov matrix

<sup>19</sup> Stochastic matrix

<sup>20</sup> Adjacency matrix

<sup>21</sup> Diagonal matrix

<sup>22</sup> D-regular

<sup>23</sup> Transpose of a matrix

<sup>24</sup> Multinomial

در درایه  $ij$  ام ماتریس  $P^t$  نشان داده می‌شود [۱۱].  
یک زنجیر مارکوف را تحویل ناپذیر یا تحویل ناشدنی<sup>۱</sup> گویند، هرگاه هر دو وضعیت فرآیند در دسترس یکدیگر باشند، به عبارت دیگر برای هر  $i$  و  $j$  عدد صحیح نامنفی  $t$  وجود داشته باشد به طوری که  $p_{ij}^{(t)} > 0$  برقرار باشد [۱۱]. اگر بازگشت زنجیر مارکوف با شروع از وضعیت  $i$  به موقعیت اولیه وجود دارد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک<sup>۲</sup>  $T(i)$  را دوره<sup>۳</sup> زنجیر مارکوف گویند و آن را با  $d_i = \gcd(T(i))$  نشان می‌دهند. زنجیر مارکوفی که دوره آن برابر با  $d_i = 1$  باشد، را نادوره‌ای<sup>۴</sup> نامند [۱۱].

$$P(v_0 = i_0, v_1 = i_1, \dots, v_t = i_t) = P(v_0 = i_t, v_1 = i_{t-1}, \dots, v_t = i_0). \quad (5)$$

در حالت کلی، توزیع‌های  $\pi_0, \pi_1, \dots$  با یکدیگر متفاوتند. در گراف  $G$  گوئیم توزیع  $\pi_0$  ایستا<sup>۱۲</sup> (مانا یا پایا) است، اگر داشته باشیم  $\pi_1 = \pi_0$ ، یعنی توزیع آغازین و توزیع مرحله اول فرآیند، هم‌توزیع هستند. در این صورت برای هر  $t \geq 0$ ،  $\pi_t = \pi_0$  است، یعنی توزیع فرآیند در تمام مراحل با توزیع آغازین، یکسان است. به این پرسه زدن، پرسه زدن تصادفی ایستا (مانا) می‌گویند. شواهد نشان می‌دهد، راس‌هایی که اتصالات بیشتری دارند، با احتمال بالا ملاقات می‌شوند. یعنی، زمان گذرانده شده در راس  $v$  وابسته به درجه  $v$  است. این موضوع، در نظر گرفتن یک توزیع روی راس‌ها را که وابسته به درجه راس‌ها است، پیشنهاد می‌کند. از این رو، اگر فرض کنیم توزیع ایستا متناسب با درجه راس باشد، با یک محاسبه کوتاه می‌توان نشان داد که برای هر گراف  $G$ ، توزیع  $\pi(v) = \frac{d(v)}{2m}$  ایستا است، زیرا

$$\begin{aligned} (\pi P)_v &= \sum_w \pi(w) P_{wv} \\ &= \sum_{w \in V} \left( \frac{d(w)}{2m} \right) \frac{1}{d(w)} \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{w \in V} 1 \\ &= \frac{d(v)}{2m} = \pi_v. \end{aligned} \quad (6)$$

به خصوص اگر گراف منتظم باشد،  $V$  دارای توزیع یکنواخت<sup>۱۳</sup> است که این حقیقت را در انتهای همین بخش نشان خواهیم داد. به سادگی می‌توان نشان داد که توزیع ایستا، یکتا است (در اینجا باید از گراف همبند استفاده کنیم).

زنجیر دو وضعیتی<sup>۱۴</sup> با ماتریس احتمال‌های انتقال

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \quad (7)$$

اگر گراف  $G$  منتظم باشد، زنجیر مارکوف متقارن<sup>۵</sup> است، به این معنی که احتمال انتقال به  $u$  وقتی در راس  $v$  هستیم، با احتمال انتقال به  $v$  وقتی در  $u$  هستیم برابر است. برای گراف نامنتظم<sup>۶</sup>  $G$ ، این ویژگی، با ویژگی برگشت‌پذیری<sup>۷</sup> جایگزین می‌شود. یک پرسه زدن تصادفی پس‌رو<sup>۸</sup>، یعنی دنباله پرسه زدن تصادفی  $(v_0, v_1, \dots, v_t)$  که دارای توزیع آغازین  $\pi_0$  است و هر  $t$  دارای توزیع  $\pi_t$  است، را در نظر بگیرید. حال توزیع احتمال  $Q$  روی دنباله  $(v_0, v_1, \dots, v_t)$  را به دست می‌آوریم. اگر دنباله را معکوس<sup>۹</sup> کنیم،  $Q'$  توزیع احتمال دنباله جدید خواهد بود. برگشت‌پذیری، یعنی توزیع احتمال  $Q'$  با هر توزیعی که از پرسه زدن تصادفی با شروع از  $\pi_t$  به دست می‌آید، برابر است [۱]. به عبارت دیگر پرسه زدن تصادفی  $(v_0, v_1, \dots, v_t)$  برگشت‌پذیر است، هرگاه

$$(v_0, v_1, \dots, v_t) \stackrel{d}{=} (v_t, v_{t-1}, \dots, v_0) \quad (4)$$

که در آن  $\stackrel{d}{=}$  نشان‌دهنده هم‌توزیع<sup>۱۰</sup> بودن دو بردار تصادفی<sup>۱۱</sup>

<sup>1</sup> Irreducible

<sup>2</sup> Greatest common divisor

<sup>3</sup> Period

<sup>4</sup> Aperiodic

<sup>5</sup> Symmetric

<sup>6</sup> Irregular graph

<sup>7</sup> Reversibility

<sup>8</sup> Backward random walk

<sup>9</sup> Reverse

<sup>10</sup> Identically distributed

<sup>11</sup> Random vector

<sup>12</sup> Stationary

<sup>13</sup> Uniform distribution

<sup>14</sup> Two-state chain

زدن تصادفی روی یک گراف وزن دار، با وزن های ۱ برای همه یال ها است. توزیع ایستا برای یک گراف وزن دار، همانند توزیع ایستای یک گراف غیر وزن دار است. اگر  $v$  یک راس باشد، گویند یک راس واقع به  $v$  است، اگر  $v$  نقطه انتهایی یال باشد. گرافی را جهت دار<sup>۷</sup> (سُودار یا دیگرگراف<sup>۸</sup>) گویند، هرگاه یال های آن جهت و سو داشته باشند. پرسه زدن تصادفی روی گراف های جهت دار، برگشت پذیر زمان است. در حقیقت هر زنجیر مارکوف برگشت پذیر، می تواند به عنوان یک پرسه زدن تصادفی روی گراف جهت دار در نظر گرفته شود.

برای زنجیر مارکوف برگشت پذیر با ماتریس احتمال های انتقال  $P$  و توزیع ایستای  $\pi$  با اختصاص دادن وزن های یال  $w(i,j) = \pi(i)p_{ij}$ ، یک گراف جهت دار روی فضای وضعیت<sup>۹</sup> (فضای حالت) می سازیم. با این انتخاب از وزن ها، پرسه زدن تصادفی روی گراف وزن دار از وضعیت  $i$  به  $j$  با احتمال زیر حرکت می کند.

$$\begin{aligned} \frac{w(i,j)}{\sum_v w(i,v)} &= \frac{\pi(i)p_{ij}}{\sum_v \pi(i)p_{iv}} \\ &= \frac{\pi(i)p_{ij}}{\pi(i)\sum_v p_{iv}} = p_{ij}. \end{aligned} \quad (12)$$

برعکس، روی یک گراف وزن دار با تابع وزن  $w(i,j)$ ، ماتریس احتمال های انتقال زنجیر مارکوف مربوط به آن با قرار دادن  $p_{ij} = \frac{w(i,j)}{\sum_v w(i,v)}$  که در آن جمع روی همه همسایه های  $i$  است، به دست می آید. توزیع ایستا برابر است با

$$\pi(i) = \frac{\sum_y w(i,y)}{\sum_x \sum_y w(x,y)}. \quad (13)$$

می توان بررسی کرد که

$$\begin{aligned} \pi(i)p_{ij} &= \left( \frac{\sum_y w(i,y)}{\sum_x \sum_y w(x,y)} \right) \frac{w(i,j)}{\sum_y w(x,y)} \\ &= \frac{w(i,j)}{\sum_x \sum_y w(x,y)} \\ &= \left( \frac{\sum_y w(j,y)}{\sum_x \sum_y w(x,y)} \right) \frac{w(i,j)}{\sum_y w(j,y)} = \pi(j)p_{ji} \end{aligned} \quad (14)$$

را می توان به عنوان پرسه زدن تصادفی روی گراف وزن دار<sup>۱</sup> بیان کرد. به راحتی ثابت می شود توزیع ایستا برابر  $\pi = \left( \frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right)$  است.

به عنوان مثال دیگر، پرسه زدن تصادفی روی گراف  $n$ -دوری<sup>۲</sup> (گراف همبندی که درجه هر راس آن ۲ است)، با ماتریس احتمال های انتقال زیر را در نظر بگیرید:

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i + 1 \mod n, \\ 1 - p, & j = i - 1 \mod n, \\ 0, & \text{o. w.} \end{cases} \quad (8)$$

این مثالی از یک زنجیر مارکوف تحویل ناپذیر است و در حالتی که  $n$  زوج باشد، برای هر  $i$ ,

$$\begin{aligned} d_i &= \gcd(T(i)) \\ &= \gcd \{ t \geq 1 \mid p_{ii}^{(t)} > 0 \} = 2 \end{aligned} \quad (9)$$

و در حالتی که  $n$  فرد باشد، برای هر  $i$ ,

$$d_i = \gcd(T(i)) = 1 \quad (10)$$

که در این حالت زنجیر مارکوف، نادوره ای است. در این مثال، توزیع ایستا، یک توزیع یکنواخت است و پرسه زدن تصادفی برای  $p = \frac{1}{2}$  برگشت پذیر زمان<sup>۳</sup> است. پرسه زدن تصادفی ساده<sup>۴</sup> روی گراف، برگشت پذیر زمان است، اگر  $i$  و  $j$  مجاور (همسایه) باشند. در این صورت

$$\begin{aligned} \pi(i)p_{ij} &= \left( \frac{d(i)}{2m} \right) \left( \frac{1}{d(i)} \right) \\ &= \frac{1}{2m} \\ &= \left( \frac{d(j)}{2m} \right) \left( \frac{1}{d(j)} \right) \\ &= \pi(j)p_{ji}. \end{aligned} \quad (11)$$

اگر  $i$  و  $j$  همسایه نباشند،  $p_{ij} = p_{ji} = 0$ . برای  $\frac{1}{2} \neq p$  پرسه زدن اریب<sup>۵</sup> خواهد شد. برای مثال، اگر  $p > \frac{1}{2}$  باشد، فراوانی<sup>۶</sup> انتقال ها از  $i$  به  $i + 1$  بیشتر از فراوانی انتقال از  $i + 1$  به  $i$  خواهد بود.

پرسه زدن تصادفی ساده روی یک گراف حالت خاص از پرسه

<sup>1</sup> Weighted graph

<sup>2</sup> N-cyclic

<sup>3</sup> Time-reversible

<sup>4</sup> Simple random walk

<sup>5</sup> Biased

<sup>6</sup> Frequency

<sup>7</sup> Directed graph

<sup>8</sup> Digraph

<sup>9</sup> State space

برای هر  $i, j \in V$

$$\pi(i)p_{ij} = \pi(j)p_{ji} \quad (۱۸)$$

که به معادلات تعادل<sup>۳</sup> نیز مشهور هستند. یعنی در پرسه زدن تصادفی ایستا، انتقال از  $i$  به  $j$  با انتقال از  $j$  به  $i$  یکسان است. از رابطه (۲) برای هر  $i, j \in E$  داریم  $\pi(i)p_{ij} = \frac{1}{2m}$  پس می‌توان در هر یال، به هر جهت، با تکرار یکسان حرکت کرد. اگر در یک یال بوده و از آن بگذریم، متوسط تعداد مراحل که در جهت یکسان طی می‌کنیم تا دوباره به آن یال برسیم، برابر با  $2m$  است. این موضوع برای همه راس‌ها یکسان است:

اگر در راس  $i$  باشیم و از آن عبور کنیم، متوسط تعداد قدم‌هایی که باید طی کنیم تا دوباره به آن راس بازگردیم برابر  $\frac{1}{\pi(i)} = \frac{2m}{d(i)}$  است. اگر گراف  $G$  منتظم باشد، زمان برگشت<sup>۴</sup> برابر با  $n$  (تعداد راس‌ها) است. برای اثبات این حقیقت به توجه به معادلات تعادل و رابطه (۲)، برای هر  $i, j \in V$  داریم  $\frac{\pi(i)}{d(i)} = \frac{\pi(j)}{d(j)} = k$  اما نظر به اینکه جمع روی تمام مقادیر تابع احتمال برابر با ۱ است، داریم:

$$1 = \sum_{i \in V} \pi(i) = k \sum_{i \in V} d(i) = 2mk \quad (۱۹)$$

که از حل این معادله مقدار  $k = \frac{1}{2m}$  محاسبه می‌شود. از این رو برای هر  $i \in V$  داریم  $\frac{\pi(i)}{d(i)} = \frac{1}{2m}$  از اینکه برای گراف منتظم  $G$  با  $n$  راس، برای هر  $i \in V$   $d(i) = d$  و تعداد یال‌ها برابر است با  $m = \frac{nx}{2}$  در این صورت برای هر  $i \in V$   $\pi(i) = \frac{d}{2m} = \frac{1}{n}$  از این رو در گراف منتظم  $G$ ، زمان برگشت برابر با  $n = \frac{1}{\pi(i)}$  است. در پایان، اگر معادلات تعادل برقرار باشند، یعنی برای هر  $i, j \in V$  داریم  $\pi(i)p_{ij} = \pi(j)p_{ji}$  در این صورت برای هر  $i \in V$  داریم:

$$\begin{aligned} \pi(i) &= \pi(i) \sum_{j \in V} p_{ij} \\ &= \sum_{j \in V} \pi(i)p_{ij} \\ &= \sum_{j \in V} \pi(j)p_{ji} \end{aligned} \quad (۲۰)$$

که نشان‌دهنده ایستایی زنجیر مارکوف است.

بنابراین زنجیر، برگشت‌پذیر زمان است. به عنوان مثال، اگر زنجیر مارکوف، برگشت‌پذیر زمان دارای ماتریس احتمال‌های انتقال زیر باشد:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 4/6 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (۱۵)$$

گراف وزن‌دار مربوطه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

توزیع ایستا برای این زنجیر عبارت است از:

$$\pi = (5/18, 6/18, 4/18, 3/18). \quad (۱۶)$$

کمیت‌های  $\pi(i)p_{ij}$  را در یک ماتریس (غیرتصادفی) قرار می‌دهیم:

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 4/18 & 1/18 & 0 \\ 4/18 & 1/18 & 1/18 & 0 \\ 1/18 & 1/18 & 0 & 2/18 \\ 0 & 0 & 2/18 & 1/18 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (۱۷)$$

که در آن  $r_{ij} = w(i, j) = \pi(i)p_{ij}$  این ماتریس متقارن است. با ضرب کردن درایه‌ها در ۱۸ به طوری که همه وزن‌ها صحیح شوند، گراف وزن‌دار محاسبه می‌شود [۱۳].

گرافی را دوبخشی<sup>۱</sup> گویند که راس‌های آن به دو مجموعه مجزا به نحوی تقسیم شود که هر یال از آن گراف، یک راس از مجموعه اول را به یک راس از مجموعه دوم متصل کند. به طور معادل، گراف  $G = (V, E)$  دوبخشی است، هرگاه بتوانیم  $V$  را به دو مجموعه مجزا  $U$  و  $W$  به گونه‌ای تقسیم کنیم که هیچ یالی در  $E$  دو راس از  $U$  یا دو راس از  $W$  را به هم وصل نکند [۱۴]. در بیان مهم‌ترین ویژگی‌های توزیع ایستا، می‌توان به این موضوع اشاره کرد که اگر گراف  $G$  دوبخشی نباشد، وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، آنگاه توزیع  $v_t$  به توزیع ایستا میل خواهد کرد (برهان آن را با استفاده از مقادیر ویژه<sup>۲</sup> (ویژه مقدار) در آخر بخش چهارم بیان می‌کنیم). در حالتی که  $n > 1$  باشد، این حقیقت برای گراف‌های دوبخشی برقرار نیست.

فرمول‌نویسی برگشت‌پذیری در توزیع ایستا بسیار ساده است.

<sup>3</sup> Balance equations

<sup>4</sup> Return time

<sup>1</sup> Bipartite graph/bigraph

<sup>2</sup> Eigenvalue

### ۳. متغیرهای اصلی پرسه زدن تصادفی

اکنون به معرفی متغیرهای پرسه زدن تصادفی می‌پردازیم که مهم‌ترین نقش را در شناخت این مدل‌ها ایفا می‌کنند.

الف) زنجیر مارکوف پرسه زدن تصادفی روی راس‌های گراف  $G = (V, E)$ ، یعنی  $\{v_t\}_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  را در نظر بگیرید. برای این فرآیند تصادفی گسسته-زمان<sup>۱</sup>، اولین زمان اصابت<sup>۲</sup> به وضعیت  $i$  را به صورت زیر تعریف می‌کنند [۱۵].

$$T_i = \min\{t \geq 0 | v_t = i\} \quad (21)$$

در حالت کلی‌تر، اگر  $A$  زیرمجموعه‌ای از فضای وضعیت باشد، اولین زمان اصابت به مجموعه  $A$  و آخرین زمان خروج<sup>۳</sup> از مجموعه  $A$  را به ترتیب با

$$T_A = \min\{t \geq 0 | v_t \in A\} \quad (22)$$

و

$$L_A = \max\{t \geq 0 | v_t \in A\} \quad (23)$$

نشان می‌دهند. در برخی تحقیقات نظیر مرجع [۱۶] از معیار میانگین زمان اصابت پیشینه<sup>۴</sup> یعنی  $\max_{i,j} E_i(T_j)$  نیز استفاده می‌شود. زمان دسترسی<sup>۵</sup> یا زمان اصابت<sup>۶</sup>  $H(i, j)$ ، متوسط تعداد قدم‌هایی است که با شروع از  $i$  طی می‌کنیم تا به  $j$  برسیم. به طور دقیق‌تر برای هر  $i, j \in V$  داریم:

$$H(i, j) = E_i(T_j) = E[T_j | v_0 = i]. \quad (24)$$

در حالت خاص، برای هر  $i \in V$  داریم  $H_i(i) = 0$ . زمان رفت و آمد<sup>۷</sup>، به صورت مجموع زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \kappa(i, j) &= H(i, j) + H(j, i) \\ &= E_i(T_j) + E_j(T_i) \\ &= E[T_j | v_0 = i] + E[T_i | v_0 = j] \end{aligned} \quad (25)$$

یعنی تعداد قدم‌های طی شده که با شروع از  $i$ ، قبل از رسیدن به  $j$  دوباره به  $i$  برسیم. روش‌هایی برای توضیح زمان دسترسی

در زمان رفت و آمد وجود دارد که برای دیدن جزئیات می‌توانید به مراجع [۹] و [۱۷] مراجعه کنید. حال داریم:

$$H(i, j) = \frac{1}{2}(\kappa(i, j) + \sum_u \pi(u)[\kappa(u, j) - \kappa(u, i)]) \quad (26)$$

در بخش چهارم و پنجم، رابطه (۲۶) با مقادیر ویژه یا فرمول‌های مقاومت الکتریکی<sup>۸</sup> ثابت می‌شود.

ب) زمان پوشش<sup>۹</sup> (که از توزیع داده شده آغاز می‌شود) را متوسط تعداد قدم‌ها، برای رسیدن به هر راس تعریف می‌کنیم. بدترین حالت زمانی است که هیچ راسی برای شروع مشخص نشده باشد که در این حالت توزیع آغازین تعریف نشده است. در این حالت باید از راسی شروع کنیم که زمان پوشش را بیشینه کند. زمان پوشش را به طور دقیق‌تر می‌توان به صورت زمان تصادفی بازدید همه فضای وضعیت یک زنجیر مارکوف تعریف کرد، یعنی  $C = \max_j T_j$ . در بخش ۳.۳ و ۵.۳ در مورد این متغیرها بحث خواهیم کرد. زمان پوشش و بازگشت<sup>۱۰</sup> نیز به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۸].

$$C^+ = \min\{t \geq C | v_t = v_0\} \quad (27)$$

ج) نرخ آمیختگی<sup>۱۱</sup>، سرعت همگرایی<sup>۱۲</sup> یک پرسه زدن تصادفی به توزیع حدی<sup>۱۳</sup> آن را اندازه‌گیری می‌کند. وقتی توزیع ایستا موجود باشد، یک سوال اساسی این است که تعیین کنیم پرسه زدن تصادفی با چه سرعتی به توزیع ایستا نزدیک می‌شود. برای گرافی که دوبخشی نباشد، وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، آنگاه داریم  $p_{ij}^{(t)} \rightarrow d_j/2m$  در این حالت نرخ آمیختگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{i,j} \left| p_{ij}^{(t)} - \frac{d_j}{2m} \right|^{1/t} \quad (28)$$

که با توجه به شرط ایستایی، این حد همواره موجود است [۱۹]. برای گراف دوبخشی با بخش‌های  $\{V_1, V_2\}$ ، توزیع  $v_t$  بین

<sup>8</sup> Electrical resistance formulas

<sup>9</sup> Cover time

<sup>10</sup> Cover and return time

<sup>11</sup> Mixing rate

<sup>12</sup> Convergence

<sup>13</sup> Limiting distribution

<sup>1</sup> Discrete-time stochastic process

<sup>2</sup> First hitting time

<sup>3</sup> Last exit time

<sup>4</sup> Maximal mean hitting time

<sup>5</sup> Access time

<sup>6</sup> Hitting time

<sup>7</sup> Commute time

$$\begin{aligned} H(i, j) &= 1 + \sum_v p_{iv} H(v, j) \\ &= 1 + \frac{1}{d(i)} \sum_{v \in \Gamma(i)} H(v, j). \end{aligned} \quad (29)$$

با قرار دادن  $i = k - 1$  و  $j = k$  در تساوی بالا، به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} H(k-1, k) &= 1 + \frac{1}{d(k-1)} \sum_{j \in \Gamma(k-1)} H(j, k) \\ &= 1 + \frac{1}{2} [H(k, k) + H(k-2, k)] \\ &= 1 + \frac{1}{2} [H(k-2, k-1) + H(k-1, k)] \end{aligned} \quad (30)$$

برای حل این رابطه بازگشتی<sup>۵</sup>، قرار دهید  $a_k = H(k-1, k)$  که منجر به معادله بازگشتی  $a_k - a_{k-1} - 2 = 0$  خواهد شد. به راحتی می‌توان این معادله را حل کرد که جواب آن برابر است با:

$$a_k = H(k-1, k) = 2k - 1. \quad (31)$$

حال زمان دسترسی  $H(i, k)$  با  $0 \leq i < k \leq n$  را در نظر بگیرید. برای اینکه به  $k$  برسیم، ابتدا باید از راس  $k-1$  بگذریم که به طور متوسط تعداد قدم‌ها  $H(i, k-1)$  خواهد بود. از اینجا باید به  $k$  برویم که به طور متوسط تعداد قدم‌ها  $2k-1$  خواهد بود (راس‌های بعد از  $k$  امین راس نقشی در مساله ندارند). نتیجه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$H(i, k) = H(i, k-1) + 2k - 1 \quad (32)$$

و از آنجا با استفاده از اینکه  $H(k-1, k) = 2k-1$  داریم:

$$\begin{aligned} H(i, k) &= H(i, k-1) + 2k - 1 \\ &= H(i, k-2) + (2k-3) + (2k-1) \\ &= \dots \\ &= H(i, i+1) + (2i+3) + \dots + (2k-1) \\ &= (2i+1) + (2i+3) + \dots + (2k-1) \\ &= k^2 - i^2. \end{aligned} \quad (33)$$

لازم به ذکر است که این فرمول بسیار شبیه به فرمول حرکت براونی<sup>۶</sup> در زمان  $t$  و در فاصله  $\sqrt{t}$  است [۱۱]. به روشی دیگر نیز می‌توان حقیقت بالا را ثابت کرد. برای این منظور با استفاده

تقریباً متناسب با درجه  $V_1$  و تقریباً متناسب با درجه  $V_2$  نوسان می‌کند. گراف‌های دوبخشی نتایج مشابهی دارند، اما گراف‌ها در حالت‌های پیچیده‌تر، کمی با هم متفاوت هستند که این موارد را نادیده می‌گیریم.

زمان آمیختگی را می‌توان تعداد قدم‌ها، قبل از اینکه توزیع  $v_t$  به توزیع یکنواخت میل کند، دانست. به عنوان مثال اینکه چه مدت باید دسته کارت را بُر<sup>۱</sup> بزیم یک زمان آمیختگی است؟ این عدد تقریباً برابر با  $(\log n)/(1-\mu)$  است. البته مقدار دقیق آن وابسته به میزان نزدیکی توزیع، به توزیع یکنواخت است. در این بخش تعاریف ابتدایی زمان آمیختگی را بیان کردیم، در بخش ششم به تعاریف پیشرفته آن می‌پردازیم.

ذکر این نکته لازم است که زمان آمیختگی ممکن است کمتر از تعداد راس‌ها باشد. برای مثال در یک گراف گسترده<sup>۲</sup> تعداد قدم‌ها برابر با  $O(\log n)$  خواهد بود [۲۰]. نماد  $O(\cdot)$  یک روش کارآمد برای ارزیابی عملکرد الگوریتم<sup>۳</sup> است. در حقیقت در اینجا  $O(\log n)$  نشان‌دهنده پیچیدگی<sup>۴</sup> زمانی لگاریتمی الگوریتم است و زمان اجرا به صورت لگاریتمی رشد می‌کند. به صورت دقیق و ریاضی، می‌توان گفت تابع  $f$  از مرتبه  $O(\log n)$  است، هرگاه اعداد حقیقی مانند  $M$  و  $x_0$  وجود داشته باشد که برای هر  $x_0 \leq f(x) \leq M \log n$

**مثال ۱:** برای شروع، زمان دسترسی را برای دو نقطه از مسیر راس‌های  $0, 1, \dots, n-1$  به دست می‌آوریم. ابتدا مشاهده می‌کنیم که زمان دسترسی  $H(k-1, k)$  یک واحد از متوسط زمان بازگشت پرسه زدن تصادفی، با  $k+1$  راس و با شروع از آخرین راس، کمتر است. همان‌طور که اشاره شد، این زمان برگشت برابر با  $2k$  است، پس  $H(k-1, k) = 2k-1$

برای اثبات این حقیقت به صورت ریاضی، مجموعه  $\Gamma(i)$  را مجموعه همسایه‌های راس  $i$  تعریف کنید. اگر  $i \neq j$  باشد، از اینکه در قدم اول، از راس  $i$  به سمت همسایه  $v$  می‌رویم و پس از آن به  $j$  می‌رسیم، داریم:

<sup>1</sup> Shuffle

<sup>2</sup> Expander graph

<sup>3</sup> Algorithm

<sup>4</sup> Complexity

<sup>5</sup> Recurrence relation

<sup>6</sup> Brownian motion

از اینکه  $H(k-1, k) = 2k - 1$  داریم:

$$\begin{aligned} H(i, k) &= \sum_{j=i+1}^k H(j-1, j) \\ &= \sum_{j=1}^{k-i} H(j+i-1, j+i) \\ &= \sum_{j=1}^{k-i} (2(j+i) - 1) \\ &= 2 \frac{(k-i)(k-i+1)}{2} + (k-i)(2i-1) \\ &= (k-i)(k+i) = k^2 - i^2. \end{aligned} \quad (34)$$

توجه کنید که در حالت خاص  $H(0, k) = k^2$  است. از این رو، در گرافی با  $n$  راس، با این فرض که از راس صفر شروع به حرکت کنیم، زمان پوشش برای هر مسیر همواره برابر  $(n-1)^2$  خواهد بود که این مقدار برای رسیدن به راس انتهایی کافی است.

مثال ۱، زمان دسترسی میان دو راس با فاصله  $k$ ، در مداری<sup>۱</sup> به طول  $n$ ، برابر با  $k(n-k)$  است. برای تعیین زمان پوشش در یک مدار، باید توجه کنید که این زمان، همان زمان مورد نیاز برای یک مسیر طولانی، با شروع از نقاط میانی، برای رسیدن به  $n$  است. برای این کار ابتدا باید به  $n-1$  نقطه دیگر برسیم که به طور میانگین  $f(n-1)$  قدم خواهد بود. در این نقطه، یک مسیر با  $n-1$  راس را پوشش داده‌ایم و بعد به یکی از نقاط نهایی می‌رویم. رسیدن به نقطه جدید، به معنی رسیدن به یکی از نقاط نهایی، در همسایگی دیگر نقاط انتهایی، در یک مسیر با  $n+1$  راس است. به وضوح این عمل شبیه به زمان دسترسی بین دو راس متوالی در یک مدار به طول  $n$  است، که منجر به تشکیل رابطه بازگشتی زیر می‌شود:

$$f(n) = f(n-1) + (n-1) \quad (35)$$

و در نهایت داریم  $f(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ .

مثال ۲: در مثالی دیگر می‌خواهیم زمان دسترسی و زمان پوشش را برای گراف کامل<sup>۲</sup> با راس‌های  $\{0, \dots, n-1\}$  محاسبه کنیم (یک گراف را کامل گویند، هرگاه هر راس آن به تمامی راس‌های دیگر به وسیله یک یال متصل باشد). برای یافتن زمان دسترسی و با فرض شروع از راس صفر، باید  $H(0,1)$  را به

دست آوریم. به وضوح احتمال اینکه در گام  $t$  ام به راس ۱ برسیم برابر با  $\frac{1}{n-1} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{t-1}$  و زمان مورد انتظار برای این رویداد برابر با:

$$H(0,1) = \sum_{t=1}^{\infty} t \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{t-1} \frac{1}{n-1} = n-1 \quad (36)$$

است. زمان پوشش برای گراف‌های کامل، کمی متفاوت و شبیه به مساله جمع‌آوری کوپن<sup>۳</sup> است. این مساله بیان می‌کند اگر شما بخواهید  $n$  کوپن مختلف جمع‌آوری کنید و هر روز به صورت تصادفی یک کوپن برای شما فرستاده شود، چه مدت باید منتظر بمانید؟ (برای دیدن جزئیات بیشتر به مرجع [۲۱] مراجعه کنید). در ابتدا  $\tau_i$  را اولین زمانی قرار دهید که راس  $i$  را ملاقات می‌کنیم، پس داریم  $0 = \tau_1 < \tau_2 = 1 < \tau_3 < \dots < \tau_n$ . فاصله  $\tau_{i+1} - \tau_i$  تعداد قدم‌هایی است که برای رسیدن به راس جدید باید طی کنیم که احتمال آن برابر  $(n-i)/(n-1)$  و از قدم‌های قبل مستقل است. از این رو  $E(\tau_{i+1} - \tau_i) = \frac{n-1}{n-i}$ . بنابراین زمان پوشش برابر است با:

$$\begin{aligned} E(\tau_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} E(\tau_{i+1} - \tau_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-1}{n-i} \approx n \log n. \end{aligned} \quad (37)$$

یک پرسه زدن تصادفی با ویژگی‌های نامناسب را می‌توان به صورت زیر شرح داد: در یک دسته با اندازه  $n/2$ ، طول مسیر برای رسیدن به نقطه انتهایی  $n/2$  باشد. حال  $i$  هر نقطه‌ای در این دسته و  $j$  را نقطه نهایی در مسیر قرار دهید. از این رو  $H(i, j) = \Omega(n^3)$ . مشابه با نماد  $O(\cdot)$  که نشان‌دهنده کران بالای مجانبی است، نماد  $\Omega(\cdot)$  یک کران پایین مجانبی را ارائه می‌دهد. به صورت دقیق و ریاضی می‌توان گفت، در اینجا تابع  $H(i, j)$  از مرتبه  $\Omega(n^3)$  است، یعنی اعداد حقیقی مانند  $M$  و  $x_0$  وجود داشته باشد که برای هر  $H(i, j) \geq Mn^3$  و  $x_0 \geq x_0$  حقیقت برای حرکت از  $i$  و رسیدن به  $u$  به طور میانگین  $n/2 - 1$  قدم نیاز است، پس با احتمال  $1 - 2/n$  به سمت راس دیگری از دسته می‌رویم و انتظار داریم در  $n/2$  زمان به همان نقطه بازگردیم، اما می‌توان این گونه استدلال کرد که در

<sup>1</sup> Circuit

<sup>2</sup> Complete graph

<sup>3</sup> Coupon collector problem

اخیر منجر به نامساوی:

$$H(i, j) + H(j, i) = 2H(i, j) \leq 2m \quad (39)$$

و در پی آن  $H(i, j) \leq m$  خواهد شد.

در این مقاله، یک کران مشابه برای زمان پوشش توسط تشکیل یک درخت فراگیر<sup>۴</sup>، به دست می‌آوریم. درخت فراگیر برای یک گراف همبند وزن‌دار، درختی است که شامل همه راس‌های گراف باشد، ولی فقط برخی یال‌های آن را شامل شود و بین تمام درخت‌ها با این ویژگی، مجموع وزن یال‌های آن، کمترین مقدار ممکن باشد. در مورد کاربرد درخت‌ها در شبکه حسگر بی‌سیم، مطالعه مرجع [۲۲] مفید است.

یکی از نتایج مهم کران‌دار بودن برخی متغیرهای پرسه زدن تصادفی به یک چندجمله‌ای است. ذکر این نکته ضروری است که ممکن است این موضوع برای گراف‌های جهت‌دار صحیح نباشد.

حدس می‌زنیم گراف با کمترین زمان پوشش، گراف کامل باشد (همان‌طور که در مثال ۲ دیدیم زمان پوشش آن تقریباً برابر با  $n \log n$  بود که از توزیع آغازین مستقل بود).

قضیه زیر برخی نتایج زمان پوشش و زمان رفت و آمد را به صورت خلاصه توضیح می‌دهد. کران بالای زمان پوشش و زمان دسترسی  $O(n^3)$  است.

**قضیه ۱:** الف) زمان دسترسی بین دو راس از یک گراف با  $n$  راس حداکثر برابر است با [۲۳]:

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{27}\right)n^3 - \left(\frac{1}{9}\right)n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)n - 1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ \left(\frac{4}{27}\right)n^3 - \left(\frac{1}{9}\right)n^2 + \left(\frac{2}{3}\right)n - \left(\frac{29}{27}\right), & n \equiv 1 \pmod{3} \\ \left(\frac{4}{27}\right)n^3 - \left(\frac{1}{9}\right)n^2 + \left(\frac{4}{9}\right)n - \left(\frac{13}{27}\right), & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (40)$$

و مقدار بیشینه برای  $m = \left\lceil \frac{2(n-1)}{3} \right\rceil$  اتفاق می‌افتد [۱۶].

ب) در یک گراف  $n$  راسی، با شروع از هر راس، زمان پوشش حداقل برابر با  $(1 - O(1))n \log n$  و حداکثر برابر با  $n^3(4/27 + o(1))$  است [۱۸، ۲۴].

ج) زمان پوشش برای یک گراف منتظم با  $n$  راس، حداکثر برابر با  $2n^2$  است [۲۵].

مسیر با طول  $n/2$ ، اگر پرسه زدن تصادفی را از یکی از نقاط پایانی شروع کنیم، انتظار داریم در  $n/2$  زمان به نقطه آغازین برگردیم. در هر بار  $\Omega(n^2)$  قدم برای برگشت در مسیر نیاز است.

### ۱.۳. تعیین کران متغیرهای اصلی

این مبحث را با استدلال‌های ابتدایی آغاز می‌کنیم، ولی در بخش پنجم با استفاده از مقادیر ویژه فرمول‌های قوی‌تری ارائه می‌دهیم. همان‌طور که اشاره شد، انتظار داشتیم با گذشتن از یک یال، تعداد قدم برای اینکه دوباره به آن یال برسیم برابر با  $2m$  باشد. به عبارت دیگر اگر از راس  $i$  شروع به حرکت کنیم و راس مجاور آن  $j$  باشد ( $i$  و  $j$  را همسایه نیز نامند)، زمان مورد انتظار برای اینکه دوباره در این جهت به یال  $ji$  برسیم برابر با  $2m$  است. از این رو زمان رفت و آمد برای دو راس  $i, j$   $2m$  خواهد بود. بنابراین زمان رفت و آمد بین دو راس با فاصله  $r$  از یکدیگر، تقریباً برابر با  $n^3 < 2mr$  است. اکنون به اثبات این حقیقت می‌پردازیم. برای هر دو راس مجاور  $i$  و  $j$ ، یعنی  $ij \in E$  ثابت می‌کنیم:

$$\kappa(i, j) = H(i, j) + H(j, i) \leq 2m \quad (38)$$

می‌دانیم احتمال پیمایش همه یال‌ها، هم‌شانس<sup>۱</sup> با احتمال  $\frac{1}{2m}$  است. از این رو، فراوانی مشاهده یک یال در پرسه زدن تصادفی برابر با  $2m$  است. بر مبنای این شرط که پرسه زدن، یال  $ij$  را طی نموده، زمان مورد انتظار پیمایش بعدی این یال برابر با  $2m$  است. اما نظر به خاصیت بی‌حافظگی<sup>۲</sup> [۱۱] پرسه زدن تصادفی، می‌توان از این شرط صرف نظر کرد. مسیر طی شده توسط پرسه زدن تصادفی، می‌تواند قبل عبور از یال  $ij$ ، چندین بار از  $i$  گذر کند و به  $j$  برگردد. لذا از اینکه مقدار مورد انتظار<sup>۳</sup> طول تمام مسیر  $2m$  است، ممکن است مسیر طی کمتر از  $2m$  مرحله از  $i$  گذر کند و به  $j$  برگردد، لذا  $\kappa(i, j) = H(i, j) + H(j, i) \leq 2m$  به عنوان مثال در یک گراف دوری، با توجه به تقارن، نامساوی

<sup>1</sup> Equally likely

<sup>2</sup> Memoryless property

<sup>3</sup> Expected value

<sup>4</sup> Spanning tree

بدیهی است که زمان رفت و آمد بین دو راس برای هر گراف به  $n^3$  کران دار است و زمان دسترسی برای گراف منتظم حداکثر  $2n^2$  و زمان رفت و آمد بین دو راس برای آن گراف به  $4n^2$  کران دار است.

هیچ کران پایین نابدیهی روی زمان رفت و آمد در یک گراف بر حسب تعداد راس ها نمی توان یافت: زمان رفت و آمد بین دو راس در رده رنگی کوچکتر از یک گراف کامل دوبخشی  $K_{2,n}$  برابر با ۸ است. با این حال برای تمام مقادیر  $u$  و  $v$  داریم  $\kappa(u, v) \geq \frac{2m}{d(u)}$  (در گزاره ۲ و همچنین نتیجه ۲ توضیح داده شده است). در هر حالت زمان رفت و آمد بین دو راس در یک گراف منتظم حداقل  $n$  است. وضعیت بدتر برای زمان دسترسی می تواند به صورت زیر باشد:

این محدودیت حتی در گراف منتظم هم وجود دارد. گراف منتظمی (با هر درجه  $d \geq 3$ ) را در نظر بگیرید که دارای راس برشی<sup>۱</sup>  $u$  باشد. حال قرار دهید  $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u\}$  که  $G = G_1 \cup G_2$  و  $v$  را راسی از  $G_1$  و متفاوت از  $u$  در نظر بگیرید. زمان دسترسی از  $v$  به  $u$  برابر با زمان دسترسی از  $v$  به  $u$  در  $G_1$  است، که مستقل از اندازه گراف است.

## ۲.۳. تقارن و زمان دسترسی

در هر گراف، حتی گراف منتظم، ممکن است زمان دسترسی رفتن از  $i$  به  $j$ ، با زمان دسترسی رفتن از  $j$  به  $i$  متفاوت باشد. در حقیقت هیچ راهی برای ایجاد کران در یکی از این موارد توسط دیگری وجود ندارد. برای مثال در آخر بند اخیر (انتهای بخش ۱.۳)، در پرسه زدن از  $u$  به  $v$ ، ممکن است با احتمال حداقل  $1/d$  به یک راس  $G_2$  وارد شویم، پس باید آنقدر گام برداریم تا به  $u$  بازگردیم و زمان مورد انتظار برای این رخداد بیشتر از  $|V(G_2)|$  است. بنابراین  $\alpha(u, v) > |V(G_2)|$  می تواند یک مقدار به دلخواه بزرگ باشد که مستقل از  $\alpha(u, v)$  است.

هنوز انتظار می رود که زمان برگشت پذیری به نوعی باید عکس این کمیت ها را نتیجه بدهد. در ادامه دو موضوع را فرمول بندی کرده ایم که موضوع نخست را می توان به راحتی با «پرسه زدن

پسرو» در پرسه زدن تصادفی بررسی کرد.

**گزاره ۱:** در پرسه زدن تصادفی در یک گراف، اگر  $u$  و  $v$  دارای درجه یکسانی باشند، احتمال اینکه با شروع از  $u$  قبل از بازگشت به  $u$  را ملاقات کنیم، با احتمال اینکه با شروع از  $v$  قبل از بازگشت به  $v$  را ملاقات کنیم، مساوی است (اگر درجه  $u$  و  $v$  متفاوت باشد، نسبت احتمال ها به صورت  $\pi(v)/\pi(u) = d(v)/d(u)$  خواهد بود).

در ادامه می بینیم احتمال های داده شده در گزاره ۱ وابسته به زمان رفت و آمد  $\kappa(u, v)$  است. توجه کنید که برهان گزاره ۱ به کمک گزاره ۲ بدیهی است، زیرا طبق آن احتمال این که با شروع از  $u$  قبل از بازگشت به  $u$  را ملاقات کنیم برابر با  $1/(\kappa(u, v)\pi(u))$  است. اما از اینکه  $\kappa(u, v) = \kappa(v, u)$  و همچنین به واسطه یکسان بودن درجه های  $u$  و  $v$  داریم  $\pi(v) = \frac{d(v)}{2m} = \frac{d(u)}{2m} = \pi(u)$  بنابراین دو احتمال مذکور در گزاره، با هم برابر هستند و گزاره ۱ ثابت می شود.

**گزاره ۲:** در پرسه زدن تصادفی احتمال اینکه با شروع از  $u$  قبل از بازگشت دوباره به  $u$  را ملاقات کنیم برابر با  $1/(\kappa(u, v)\pi(u))$  است.

**اثبات:**  $q$  را اندازه احتمال در این مساله،  $\tau_u$  را اولین دفعه که با شروع از  $u$  به  $u$  باز می گردیم و  $\tau_{uv}$  را اولین دفعه که بعد از ملاقات  $u$  به  $v$  باز می گردیم، در نظر بگیرید. می دانیم:

$$E(\tau_u) = \frac{1}{\pi(u)} = \frac{2m}{d(u)} \quad (41)$$

و طبق تعریف داریم  $E(\tau_{uv}) = \kappa(u, v)$ . به وضوح  $\tau_u \leq \tau_{uv}$  و احتمال اینکه پرسه زدن تصادفی با شروع از  $u$  وضعیت  $v$  را قبل از بازگشت به  $u$  ملاقات کند، برابر با  $q = P(\tau_i = \tau_{ij})$  است. از اینکه  $\tau_u \leq \tau_{uv}$  داریم:

$$\begin{aligned} 1 - q &= P(\tau_u \neq \tau_{uv}) \\ &= P(\tau_u < \tau_{uv}) + P(\tau_u > \tau_{uv}) \\ &= P(\tau_u < \tau_{uv}). \end{aligned} \quad (42)$$

علاوه بر آن اگر  $\tau_u \leq \tau_{uv}$ ، بعد از اینکه  $\tau_u$  قدم اول را طی کردیم، باید از  $u$  به  $v$  برسیم و سپس به  $u$  بازگردیم. از این رو طبق خاصیت خطی بودن<sup>۲</sup> امید ریاضی و همچنین استفاده از

<sup>2</sup> Linearity property

<sup>1</sup> Cutnode

قانون امیدهای مکرر<sup>۱</sup> [۱۱]، داریم:

$$\begin{aligned} E(\tau_{uv}) - E(\tau_u) &= E(\tau_{uv} - \tau_u) \\ &= qE(\tau_{uv} - \tau_u | \tau_u = \tau_{uv}) \\ &\quad + (1-q)E(\tau_{uv} - \tau_u | \tau_u < \tau_{uv}) \quad (43) \\ &= 0 + (1-q)E(\tau_{uv}) \\ &= E(\tau_{uv}) - qE(\tau_{uv}). \end{aligned}$$

بنابراین

$$q = \frac{E(\tau_u)}{E(\tau_{uv})} = \frac{2m}{d(u)\kappa(u, v)} = \frac{1}{\kappa(u, v)\pi(u)} \quad (44)$$

خاصیت تقارن عمیق‌تر برای زمان دسترسی در مرجع [۲۶] شرح داده شده است. همچنین با مفاهیم ابتدایی، پرسه زدن و ملاقات در سه نقطه  $u$  و  $v$  و  $w$  را توضیح می‌دهد و برگشت‌پذیری آنها را مورد بررسی قرار می‌دهد، اما جزئیات آن ساده نیستند.

**قضیه ۲:** برای هر سه راس  $u$  و  $v$  و  $w$  [۲۶]:

$$H(u, v) + H(v, w) + H(w, u) = H(u, w) + H(w, v) + H(v, u). \quad (45)$$

یکی از نتایج مهم در رابطه با این ویژگی متقارن، به شرح زیر است:

**نتیجه ۱:** راس‌های هر گراف می‌تواند دارای رتبه<sup>۲</sup> باشد، به طوری که اگر  $u$  مقدم بر  $v$  باشد، آنگاه  $H(u, v) \leq H(v, u)$ . چنین رتبه‌گذاری را می‌توان با ثابت نگهداشتن هر راس  $t$  به دست آورد و راس‌ها را طبق مقدار  $H(u, t) - H(t, u)$  رتبه‌گذاری کرد.

**اثبات:** اگر در یک گراف رتبه‌بندی شده  $u$  مقدم بر  $v$  باشد،

$$H(u, t) - H(t, u) \leq H(v, t) - H(t, v) \quad (46)$$

و از این رو

$$H(u, t) + H(t, v) \leq H(v, t) + H(t, u). \quad (47)$$

اکنون با توجه به قضیه ۲، می‌توان این تساوی را به صورت  $H(u, v) \leq H(v, u)$  بازنویسی کرد.

رتبه‌گذاری یک گراف به واسطه راس‌ها یکتا نیست. اما اگر راس‌ها را افزاز کنیم و  $u$  و  $v$  را در یک رده قرار دهیم، اگر  $H(u, v) = H(v, u)$  (طبق قضیه ۲)، آنگاه یک رتبه‌بندی

خوش‌تعریف<sup>۳</sup> برای رده این تساوی، مستقل از راس مرجع  $t$  به دست می‌آید. راس‌های در پایین‌ترین رده «رسیدن به آنها سخت و خروج از آنها آسان است» و راس‌های در بالاترین رده «رسیدن به آنها آسان اما خروج از آنها سخت است». بهترین فرمول‌بندی از این موضوع در نتیجه ۲ بیان شده است.

خودریختی<sup>۴</sup> یک گراف، حالتی تقارن است که در آن گراف به خود نگاشته می‌شود، به طوری که اتصال بین راس-یال حفظ می‌شود. بنابراین خودریختی گراف  $G = (V, E)$ ، یک جایگشت<sup>۵</sup> مانند تابع یک‌به‌یک<sup>۶</sup>  $\sigma$  از راس‌های  $V$  است به طوری که برای هر  $(u, v) \in V \times V$ ،  $uv \in E$  اگر و تنها اگر  $\sigma(u)\sigma(v) \in E$  و این جایگشت، نوعی یک‌ریختی<sup>۷</sup> گراف  $G = (V, E)$  به خودش است. با تعریف تمام خودریختی‌های یک گراف  $G$ ، که آن را با  $Aut(G)$  نشان می‌دهیم، دو خانواده مهم به نام‌های، گراف راس-انتقالی<sup>۸</sup> و گراف یال-انتقالی<sup>۹</sup> تعریف می‌شوند. گراف راس-انتقالی (یال-انتقالی)، یک گراف بدون جهت است که در آن هر راس (یال) توسط یک خودریختی به هر راس (یال) دیگر نگاشته می‌شود. به عبارت دیگر گراف  $G$  راس-انتقالی (یال-انتقالی) است، هرگاه گروه خودریختی‌های آن، یعنی  $Aut(G)$  به ترتیب روی  $V$  (به صورت انتقالی عمل می‌کند، یعنی برای هر  $i, j \in V$ ،  $i, j \in E$ ) خودریختی  $\sigma \in Aut(G)$  وجود داشته باشد به طوری که  $\sigma(i) = j$  [۱۵].

**نتیجه ۲:** اگر یک گراف، دارای گروه خودریختی راس-انتقالی

باشد، به ازای هر  $i$  و  $j$  داریم  $H(i, j) = H(j, i)$

**اثبات:** با توجه به اینکه گراف، دارای گروه خودریختی راس-انتقالی است، هر راس توسط یک خودریختی به هر راس دیگر نگاشته می‌شود و برای هر  $i, j \in V$ ، یک خودریختی مانند  $\sigma \in Aut(G)$  وجود دارد که  $\sigma(i) = j$  و  $\sigma^{-1}(j) = i$ . از این رو طبق نتیجه ۱، به ازای هر  $i$  و  $j$  داریم  $H(i, j) \leq H(j, i)$  و

<sup>3</sup> Well-defined

<sup>4</sup> Automorphism

<sup>5</sup> Permutation

<sup>6</sup> One to one function/injective function

<sup>7</sup> Isomorphism

<sup>8</sup> Node-transitive/vertice-transitive

<sup>9</sup> Edge-transitive

<sup>1</sup> Law of iterated expectations

<sup>2</sup> Rank

$H(j, i) \leq H(i, j)$  که منجر به  $H(i, j) = H(j, i)$  می‌شود.

### ۳.۳. زمان دسترسی و زمان پوشش

زمان دسترسی و زمان رفت و آمد در پرسه زدن تصادفی دارای ویژگی‌های خوب و روابط قابل محاسبه هستند، در صورتی که زمان پوشش به راحتی قابل محاسبه نیست. اما ارتباط تنگاتنگی بین زمان دسترسی و زمان پوشش وجود دارد که در مراجع [۲۷] و [۲۸] مطرح شده است.

**قضیه ۳:** زمان پوشش از هر راس، در گرافی با  $n$  راس حداکثر  $\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)\right)$  ضرب در بیشینه زمان دسترسی بین دو راس و حداقل  $\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)\right)$  ضرب در کمینه زمان دسترسی بین دو راس است [۲۱].

توسط ارائه لم زیر، برهانی ساده برای کران بالای ضعیف‌تر  $2\log_2 n$  ضرب در بیشینه زمان دسترسی طرح می‌کنیم.

**لم ۱:**  $b$  را متوسط تعداد گام‌ها که در یک پرسه زدن تصادفی بیش از نیمی از راس‌ها را ملاقات کنیم و  $h$  را بیشینه زمان دسترسی میان دو راس در نظر بگیرید. در این صورت  $b \leq 2h$ .  
اثبات: برای سادگی فرض کنید  $n = 2k + 1$  عددی فرد است. قرار دهید  $\alpha_v$  زمانی که برای اولین بار  $v$  را ملاقات می‌کنیم و زمان  $\beta$  هنگامی که به بیش از نیمی از راس‌ها رسیده باشیم، برابر با  $k + 1$  امین از بین بزرگترین مقادیر  $\alpha_v$  است. از این رو  $\sum_v \alpha_v \geq (k + 1)\beta$  و در پی آن

$$b = E(\beta) \leq \frac{1}{k+1} \sum_v E(\alpha_v) \leq \frac{n}{k+1} h < 2h. \quad (48)$$

با استفاده از لم ۱، اثبات قضیه ۳ آسان می‌شود (رجوع کنید به مرجع [۲۱]). در حقیقت، لم ۱ بیان می‌کند، اگر با عوامل یکسان با  $2h$  قدم بیش از نیمی از راس‌ها را ملاقات کنیم، در  $2h$  قدم بعدی نیم دیگر راس‌ها را ملاقات خواهیم کرد و الی آخر.

### ۴.۳. یکنواختی

گراف  $G'$  را در نظر بگیرید که از اضافه کردن یک یال جدید  $ab$  به گراف  $G$  تشکیل شده است. از آنجایی که این گراف متراکم‌تر است، انتظار داریم که پرسه زدن تصادفی در آن، مدت کمتری

طول بکشد و بنابراین زمان دسترسی، زمان رفت و آمد و زمان پوشش کاهش یابد، اما در واقعیت این گونه نیست.

در ابتدا به سادگی می‌توان دید که با اضافه شدن یک یال، زمان دسترسی به طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. مسیری در  $G$  را با  $n$  راس و با نقاط انتهایی در نظر بگیرید. فرض کنید  $s = a$  و  $t$  همسایه یکتای  $s$  باشد. پس زمان دسترسی از  $s$  تا  $t$  برابر با یک است، از طرف دیگر اگر یال  $ab$  را اضافه کنیم، با احتمال  $1/2$ ، باید گام‌های بیشتری برداریم، بنابراین زمان دسترسی از  $s$  تا  $t$  بیشتر از یک می‌شود. در حقیقت همان‌طور که خواهیم دید تا  $n - 1$  بالا می‌رود.

ویژگی زمان یکنواختی این گونه است که اگر یک یال به  $t$  اضافه شود، زمان دسترسی از  $s$  به  $t$  در  $G'$ ، از  $G$  بزرگتر نمی‌شود. زمان رفت و آمد که به طور کلی بهترین رفتار را دارد، یکنواخت نیست. برای مثال، زمان گردش بین دو راس مخالف در یک ۴-دور برابر با ۸ است، اگر یک اتصال قطری بین دو راس ایجاد کنیم، زمان رفت و آمد به ۱۰ افزایش پیدا می‌کند. اما در ادامه خواهیم دید که تقریباً یکنواخت است (در بخش پنجم به اثبات آن می‌پردازیم).

**قضیه ۴:** اگر گراف  $G'$  از اضافه کردن یک یال به گراف  $G$  ایجاد شود و دارای  $m$  یال باشد، زمان رفت و آمد بین دو راس در  $G'$  حداکثر  $1 + 1/m$  ضرب در زمان رفت و آمد در گراف  $G$  است. به عبارت دیگر کمیت  $\kappa(s, t)/m$  کاهش پیدا نمی‌کند [۱۷].

به طور خلاصه در مورد یکی از روابطی که هر شخص به طور شهودی انتظار رخداد آن را دارد، بحث می‌کنیم:

«زمان دسترسی با افزایش فاصله افزایش پیدا می‌کند»، در حالی که چنین شهودی اغلب گمراه کننده است. نتایج زیر نشان می‌دهد که این مطلب در چه مواقعی صحیح است [۲۹].

**قضیه ۵:** گراف  $G$  و  $t \in V(G)$  در نظر بگیرید.

الف) اگر  $s$  را به طور یکنواخت از مجموعه همسایه‌های  $t$  انتخاب کنیم، مقدار مورد انتظار  $H(s, t)$  دقیقاً برابر با  $1 - (2m/d(t))$  خواهد بود.

ب) اگر  $s$  را با یک توزیع ایستا روی  $V$  انتخاب کنیم، مقدار

نقطه شروع مشخص و برچسب‌گذاری شده،  $H$  را پرسه زدن تصادفی تعریف می‌کنیم؛ بنابراین با احتمال  $p$ ،  $H$  یک دنباله مسیر نخواهد بود، که با احتمال اینکه در قدم  $t$  به طول  $t$  همه راس‌ها را ملاقات نکنیم، یکسان است. بر اساس قضیه ۱ مدت زمانی که در گراف منتظم، نیاز داریم تا همه راس‌ها را ملاقات کنیم حداکثر  $2n^2$  است. از این رو طبق نامساوی مارکوف<sup>۳</sup> [۱۱]، احتمال اینکه بعد از  $4n^2$  قدم هنوز تمام راس‌ها را ملاقات نکرده باشیم کمتر از  $1/2$  است. از آنجا که ممکن است  $4n^2$  قدم بعدی را پرسه زدن تصادفی دیگری در نظر بگیریم، احتمال اینکه بعد از  $t$  قدم همه راس‌ها را ملاقات نکرده باشیم، کمتر از  $n^{-2nd} = 2^{-t/(4n^2)}$  است.

حال تعداد کل گراف‌های  $d$ -منتظم  $G$  با  $n$  راس و با یال‌های برچسب‌گذاری شده کمتر از  $n^{dn}$  است (کمتر از  $n^d$  انتخاب در هر راس) و احتمال اینکه  $H$  در این گراف‌ها، با چند نقطه شروع یک گراف مسیر نباشد، کمتر از  $1 < nn^{dn}n^{-2nd}$  است. بنابراین حداقل یک دنباله به طول  $t$  دنباله مسیر کلی است.

نتایج موجود در مرجع [۲۶] در مورد حل چگونگی مساله‌ای که در ادامه بیان می‌شود، بحث می‌کند:

همزمان دو پرسه زدن تصادفی بر یک گراف را شروع می‌کنیم؛ چه مدت طول می‌کشد تا به یکدیگر برخورد کنند؟ بین دو پرسه زدن تصادفی اختلافاتی وجود دارد که ناشی از چگونگی پرسه زدن است. در اینجا بدترین حالت را در نظر می‌گیریم، که پرسه زدن تصادفی در هر زمان چگونه حرکت می‌کند، هدف این کار جلوگیری از تصادف تا حد ممکن است.

انگیزه این مساله خود پایداری کردن طرح مدیریت رمزگذاری برای شبکه محاسبات توزیع شده است. طرح رمزگذاری مجوزی برای حمل پردازنده آن، برای انجام برخی از امور است و در هر زمان فقط یک پردازشگر آن را حمل می‌کند. فرض کنید دو پردازشگر با چند اختلاف، رمزگذاری را بر عهده دارند. آنها به طور تصادفی از آن می‌گذرند تا به دو رمز برخورد کنند، پس از آن سامانه به حالت نرمال باز می‌گردد. این مدت زمان چقدر است؟

مورد انتظار  $H(s, t)$  حداقل  $\frac{2m}{d(t)} \left(1 - \frac{d(t)}{2m}\right)^2$  است. بنابراین اگر روی  $s \neq t$  شرطی کنیم، مقدار مورد انتظار  $H(s, t)$  حداقل  $1 - (2m/d(t))$  است.

(ج) اگر  $t$  را با یک توزیع ایستا روی  $V$  انتخاب کنیم، مقدار مورد انتظار  $H(s, t)$  حداقل  $1/n + 2 - n$  خواهد بود [۲۹].

قسمت (الف) یک بیان مجدد برای فرمول بازگشت است. برهان قسمت‌های (ب) و (ج) با استفاده از رویکردهای مقدار ویژه انجام می‌شود. به راحتی می‌توان از قسمت (ب) و (ج) نتیجه گرفت که  $\max_{s,t} H(s, t) \geq n - 1$  است.

نشان خواهیم داد که مقدار امید ریاضی در قسمت (ج) مستقل از  $s$  است (رابطه (۶۵) را نگاه کنید).

### ۵.۳. کاربردهای کران زمان پوشش و زمان رفت و آمد

شاید اولین رویکردهای پرسه زدن تصادفی در علوم کامپیوتر<sup>۱</sup> به صورت زیر باشد [۳۰]:

گراف همبند  $d$ -منتظم  $G = (V, E)$  را در نظر بگیرید به طوری که  $v_0 \in V(G)$  و فرض کنید در هر راس در پایان یال، به راسی برخورد می‌کنید که با شماره‌های  $1, 2, \dots, d$  برچسب‌گذاری شده است. یک دنباله مسیر (در این گراف، نقطه شروع و نقاط برچسب‌گذاری شده) به شکل  $\{h_1, h_2, \dots, h_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, d\}^t$  است، به گونه‌ای که اگر قدم  $t$  را از  $v_0$  شروع کرده و در قدم  $i$  ام راسی را ترک کنیم که در یال  $h_i$  باشد؛ آنگاه تمام راس‌ها را ملاقات کرده‌ایم. یک دنباله مسیر کلی (با متغیرهای  $d$  و  $n$ ) دنباله‌ای است که برای هر گراف  $d$ -منتظم با  $n$  راس و با هر گونه برچسب‌گذاری و هر نقطه شروع از تمام نقاط عبور می‌کند. جالب است که چنین دنباله‌هایی وجود دارد و لازم نیست خیلی طولانی باشد که در قضیه زیر به این مهم می‌پردازیم.

**قضیه ۶:** برای هر  $d \geq 2$  و  $n \geq 3$  یک گراف منتظم، مسیر کلی وجود دارد که طول آن  $O(d^2 n^3 \log n)$  است.

**اثبات:** قرار دهید  $t = 8dn^3 \log n$  و  $H = (h_1, \dots, h_t)$  که به طور تصادفی از  $\{1, \dots, d\}^t$  انتخاب شده است. در گراف  $G$  با

<sup>۱</sup> Computer science

<sup>۲</sup> Labelled

<sup>۳</sup> Markov inequality

$v_{1i} = \sqrt{d(i)/2m} = \sqrt{\pi(i)}$  یعنی  $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2m})\mathbf{w}$  و است. همچنین از این الگو پیروی می‌کند که اگر گراف  $G$  نادوبخشی<sup>۴</sup> باشد، آنگاه  $\lambda_n > -1$  است. حال داریم:

$$\begin{aligned} P^t &= D^{\frac{1}{2}} N^t D^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^t D^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T D^{-\frac{1}{2}} \\ &= Q + \sum_{k=2}^n \lambda_k^t D^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T D^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (50)$$

به طوری که  $Q_{ij} = \pi(j)$  به عبارت دیگر

$$p_{ij}^t = \pi(j) + \sum_{k=2}^n \lambda_k^t v_{ki} v_{kj} \sqrt{\frac{d(j)}{d(i)}}. \quad (51)$$

اگر  $G$  دوبخشی نباشد، برای  $k = 2, \dots, n$  داریم  $|\lambda_k| < 1$  و از این رو  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_k^t = 0$  و در پی آن با استفاده از رابطه (۵۱)، برای هر  $i, j \in V$  داریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(v_t = j | v_0 = i) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}^t = \pi(j) \quad (52)$$

که نشان می‌دهد همگرایی به مقدار  $\pi(j)$  به راس آغازین  $i$  بستگی ندارد و در پی آن با کمک این تساوی داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t(j) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(v_t = j) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i \in V} P(v_t = j | v_0 = i) \times P(v_0 = i) \\ &= \sum_{i \in V} \lim_{t \rightarrow \infty} P(v_t = j | v_0 = i) \times P(v_0 = i) \\ &= \pi(j) \sum_{i \in V} \pi_0(i) = \pi(j) \end{aligned} \quad (53)$$

در این حالت، با تعریف بردار توزیع  $\mathbf{v}_t$  به صورت:

$$\boldsymbol{\pi}_t = (\pi_t(j))_{j \in \mathbf{N} \cup \{0\}} \quad (54)$$

که در آن  $\pi_t(j) = \text{Prob}(v_t = j)$  و بردار توزیع ایستای  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)_{j \in \mathbf{N} \cup \{0\}}$  داریم  $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\pi}_t = \boldsymbol{\pi}$  که نشان می‌دهد توزیع حدی زنجیر به مقدار آغازین وابسته نیست. این حقیقت معادل با این است که  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = \Pi$  که در آن  $\Pi$  ماتریس تصادفی با سطرها یکسان و برابر با  $\boldsymbol{\pi}$  هست.

کمیت  $M(u, v)$ ، متوسط تعداد قدم‌ها قبل از اینکه دو پر سه زدن تصادفی با شروع از نقاط  $u$  و  $v$  به یکدیگر برخورد کنند را مشخص می‌کند. واضح است که  $M(u, v) \geq H(u, v)$  ممکن است هیچ وقت حرکت نکند. در مرجع [۲۶] این نامساوی ثابت شده است. برای راس  $w$  داریم:

$$M(u, v) \leq H(u, v) + H(v, w) - H(w, u). \quad (49)$$

بنابراین طبق گفته‌های اخیر، زمان برخورد  $O(n^3)$  است.

#### ۴. روابط مقادیر ویژه

به یاد دارید که احتمال  $p_{ij}^t$  رخدادی بود که با احتمال  $P$ ، با شروع از  $i$ ، بعد از  $t$  قدم تصادفی به  $j$  می‌رسیدیم، که یکی از درایه‌های ماتریس  $P^t$  بود. به نظر می‌رسد نظریه قوی طیفی<sup>۱</sup> ماتریس‌ها می‌تواند بکار برده شود.

ماتریس  $P$  دارای بزرگترین مقدار ویژه ۱، با مقدار ویژه متناظر چپ  $\pi$  و مقدار ویژه متناظر راست  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  و یک بردار بر  $V$  است. در حقیقت  $P^T \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$  این موضوع را بیان می‌کند که  $\boldsymbol{\pi}$  یک توزیع ایستا است. در حالی که  $P \mathbf{1} = \mathbf{1}$  بیان می‌کند، دقیقاً از هر راس یک قدم برداشته شده است.

متاسفانه ماتریس  $P$ ، متقارن نیست، مگر اینکه  $G$  منتظم باشد، اما به راحتی می‌توان آن را به حالت متقارن تبدیل کرد. می‌دانیم  $P = DA$  به طوری که  $A = A_G$  ماتریس مجاورت  $G$  و  $D$  ماتریس متقارن است، به گونه‌ای که درایه قطری  $i$  ام،  $1/d(i)$  است. ماتریس  $N = D^{\frac{1}{2}} A D^{\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}} P D^{\frac{1}{2}}$  را در نظر بگیرید.

این ماتریس متقارن است و می‌توان آن را به صورت طیفی  $N = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T$  نوشت که  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  و ویژه  $N$  و بردارهای ویژه<sup>۲</sup> متناظر، با طول واحد هستند. با یک جایگذاری می‌توان نشان داد که بردار  $\mathbf{w}$  با درایه‌های  $w_i = \sqrt{d(i)}$  یک بردار ویژه با مقادیر ویژه ۱ است. از آنجا که این بردار ویژه مثبت است، از قضیه فروبینیوس-پیرون<sup>۳</sup> [۳۱] پیروی می‌کند که  $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq -1$

<sup>1</sup> Spectral

<sup>2</sup> Eigenvectors

<sup>3</sup> Frobenius-Perron Theorem

<sup>4</sup> Non-bipartite

#### ۱.۴. طیف‌ها و زمان دسترسی

مطالعه عمیق‌تری در روابط میان پرسه زدن تصادفی و طیف‌ها را با استخراج فرمول‌های طیفی برای زمان دسترسی، شروع می‌کنیم.

**قضیه ۷:** زمان دسترسی از  $s$  به  $t$  برابر است با:

$$H(s, t) = 2m \sum_{k=2}^n \frac{1}{1 - \lambda_k} \left( \frac{v_{kt}^2}{d(t)} - \frac{v_{ks} v_{kt}}{\sqrt{d(s)d(t)}} \right). \quad (55)$$

**اثبات:** قرار دهید  $H \in \mathbb{R}^{V \times V}$  به نحوی که درایه‌های ماتریس مربع<sup>۱</sup>  $H = (H_{ij}) = (H(i, j))$  زمان دسترسی از  $i$  به  $j$  را مشخص می‌کند. در مثال ۱ مشاهده کردیم که:

$$H(i, j) = 1 + \sum_v p_{iv} H(v, j) \\ = 1 + \frac{1}{d(i)} \sum_{v \in \Gamma(i)} H(v, j). \quad (56)$$

با در نظر گرفتن ماتریس قطری  $F = J + PH - H$  داریم:

$$F^T \pi = J \pi + H^T (P - I)^T \pi = J \pi = \mathbf{1} \quad (57)$$

که از آنجا  $\frac{1}{\pi(i)} = \frac{2m}{d(i)}$ . بنابراین  $F = 2mD$  و در پی آن با جایگذاری در  $F = J + PH - H$  داریم:

$$(I - P)H = J - 2mD. \quad (58)$$

اکنون می‌خواهیم این معادله ماتریسی را برای  $H$  حل کنیم. البته از آنجا که  $I - P$  یک ماتریس تکین<sup>۲</sup> منحصربه‌فرد است، این کار ممکن نیست. در حقیقت با هر  $X$  مناسب (به جای  $H$ ) هر ماتریس  $X + \mathbf{1} a^T$ ، برای هر بردار  $a$  صدق می‌کند. اما همه این‌ها، شاخه‌ای از مبانی جبر خطی<sup>۳</sup> است، بنابراین  $a$  با کمک رابطه  $H(i, i) = 0$  قابل تعیین است. در این صورت، اگر حل رابطه (۵۸) را داشته باشیم، می‌توانیم  $H$  را با تفریق درایه‌های قطری از هر ستون به دست آوریم.

در این مرحله، ماتریس  $\mathbf{1} \pi^T$  را با  $P^*$  نشان می‌دهیم، یعنی  $P_{ij}^* = \pi(j)$  حد  $P^t$  است، وقتی  $t \rightarrow \infty$ . با جایگذاری، می‌توان نشان داد که ماتریس  $X = (I - P + P^*)^{-1}(J - 2md)$

در رابطه (۵۸) صدق می‌کند. با قطری کردن ماتریس  $P$  حکم ثابت می‌شود. برای دیدن جزئیات، قرار دهید:

$$Z = (I - P + \Pi)^{-1}. \quad (59)$$

از این رو

$$H = J - 2mZD + \Pi H \quad (60)$$

و در پی آن نظر به اینکه  $H(i, i) = 0$  داریم:

$$H(i, j) = \begin{cases} 1 - \frac{2m}{d(j)} Z_{ij} + (\pi H)_j & i \neq j \\ 1 - \frac{2m}{d(j)} Z_{jj} + (\pi H)_j = 0 & o.w. \end{cases} \quad (61)$$

از ضابطه دوم که همواره برابر صفر است بهره جسته و نتیجه می‌گیریم  $\frac{2m}{d(j)} Z_{jj} = 1 + (\pi H)_j$ . به کمک این تساوی، زمان دسترسی بر حسب ماتریس  $Z$  به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$H(i, j) = 2m \frac{Z_{jj} - Z_{ij}}{d(j)} \quad (62)$$

با استفاده از روش قطری کردن در جبر خطی داریم:

$$N = D^{-1/2} P D^{1/2} = D^{-1/2} D A_G D^{1/2} \\ = D^{1/2} A_G D^{1/2} \quad (63)$$

که مقادیر ویژه یکسان با ماتریس  $P$  دارد کـــه آنها را با  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  نمایش می‌دهیم. سپس ماتریس  $N$  را به صورت طیفی، یعنی  $N = \sum_{r=1}^n \lambda_r \mathbf{v}_r^T \mathbf{v}_r$  می‌نویسیم که در آن بردارهای ویژه سطری  $\mathbf{v}_r$ ، یکانی<sup>۴</sup> و متعامد<sup>۵</sup> هستند. بنابراین  $\mathbf{w} = (\sqrt{d(1)}, \dots, \sqrt{d(n)})$  یک بردار ویژه مثبت برای ماتریس  $N$  با مقدار ویژه ۱ است و از این رو حکم ثابت می‌شود.

برای آشنایی با کاربردهای قضیه ۷، خواننده تشویق می‌شود برهان ویژگی تقارن زمان دسترسی در قضیه ۲ را انجام دهد و ساختاری برای زمان دسترسی بر حسب زمان رفت و آمد رابطه (۲۶) نیز بیان کند. اگر بخواهیم متوسط زمان دسترسی را برای هر  $t$  به دست آوریم، با استفاده از قضیه ۷، برای توزیع ایستای  $\pi(v) = \frac{d(v)}{2m}$  داریم:

<sup>1</sup> Square matrix

<sup>2</sup> Singular matrix

<sup>3</sup> Linear algebra

<sup>4</sup> Unitary

<sup>5</sup> Orthogonal

$$m\left(\frac{1}{d(s)} + \frac{1}{d(t)}\right) \leq \kappa(s, t) \leq \frac{2m}{1-\lambda_2}\left(\frac{1}{d(s)} + \frac{1}{d(t)}\right). \quad (68)$$

اگر گراف منتظم باشد، کران پایین برابر  $n$  خواهد بود. اگر گراف گسترده باشد، به گونه‌ای که بتوانیم آن را به صورت یک گراف منتظم نشان دهیم که  $1/(1-\lambda_2) = O(1)$ ، در این صورت زمان رفت و آمد بین هر جفت راس  $\Theta(n)$  است. نماد  $\Theta(\cdot)$ ، تلفیق دو نماد  $O(\cdot)$  و  $\Omega(\cdot)$  است، یعنی وجود یک کران بالا و پایین مجانبی را تضمین می‌کند. به صورت دقیق و ریاضی می‌توان گفت، در اینجا زمان رفت و آمد  $\kappa(s, t)$  از مرتبه  $\Theta(n)$  است، یعنی اعداد حقیقی مانند  $M_1$ ،  $M_2$  و  $x_0$  وجود داشته باشد

که برای هر  $x \geq x_0$   $M_1 n \leq \kappa(s, t) \leq M_2 n$  است. در این فرمول‌ها، ظاهر شدن  $1-\lambda_k$  در مخرج نشان می‌دهد که برای یافتن کران‌های خوب در رخنه‌های طیفی<sup>۲</sup> لازم است اختلاف  $1-\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2$  برقرار باشد. این یکی از عوامل مهم در مطالعه گراف‌ها است که در بخش ششم به بررسی آن می‌پردازیم.

به عنوان کاربردی دیگر، می‌توان زمان دسترسی بین دو راس مخالف  $k$  وجهی  $Q_k$  را یافت. حال،  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  و  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  را نشان‌دهنده دو راس مخالف دارای  $k$  وجه در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانید بردار صحیح  $\mathbf{v}_b$  از  $P$  (یا  $A$ ) برای هر بردار  $0-1$  که  $b \in \{0,1\}^k$  باشد، به صورت  $(v_b)_x = (-1)^{b \cdot x}$  تعریف می‌شود. بردار ویژه متناظر  $P$  برابر با  $\mathbf{1} - (2/k)b$  است. با نرمال‌سازی<sup>۳</sup>  $\mathbf{v}_b$  و جایگذاری در قضیه ۷ داریم:

$$H(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = k \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \frac{1}{2^j} (1 - (-1)^j). \quad (69)$$

برای یافتن مقدار مجانبی این عبارت، با جایگذاری

$$\binom{k}{j} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{p}{j-1} \quad (70)$$

رابطه (۷۱) را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \sum_{t \in V} \pi(t) H(s, t) &= \sum_{t \in V} \frac{d(t)}{2m} \times 2m \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \left( \frac{v_{kt}^2}{d(t)} - \frac{v_{ks} v_{kt}}{\sqrt{d(s)d(t)}} \right) = \\ &= \sum_{t \in V} \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \left( v_{kt}^2 - \frac{v_{ks} v_{kt} \sqrt{d(t)}}{\sqrt{d(s)}} \right) = \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \left( \sum_{t \in V} v_{kt}^2 - v_{ks} \frac{1}{\sqrt{d(s)}} \cdot \sum_{t \in V} v_{kt} \sqrt{d(t)} \right) = \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \left( 1 - v_{ks} \frac{1}{\sqrt{d(s)}} \times 0 \right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \end{aligned} \quad (64)$$

که در تساوی ماقبل آخر از این حقیقت که  $\mathbf{v}_k$  دارای طول واحد و برای  $k \geq 2$  متعامد است، استفاده شد. لذا فرمول زیر را به دست می‌آوریم:

$$\sum_t \pi(t) H(s, t) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \quad (65)$$

که این مقدار مستقل از راس آغازین  $s$  است. به عنوان یک نتیجه بدیهی از قضیه ۷، فرمول زیر را مشابه فرمول قبل برای زمان رفت و آمد بیان می‌کنیم. **نتیجه ۳:** زمان رفت و آمد از  $s$  به  $t$  برابر است با:

$$\kappa(s, t) = 2m \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \left( \frac{v_{kt}}{\sqrt{d(t)}} - \frac{v_{ks}}{\sqrt{d(s)}} \right)^2. \quad (66)$$

**اثبات:** طبق فرمول  $\kappa(i, j) = H(i, j) + H(j, i)$  و جایگذاری زمان‌های دسترسی متناظر از قضیه ۷، داریم:

$$\begin{aligned} \kappa(i, j) &= 2m \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \left( \frac{v_{kt}^2}{d(t)} - \frac{v_{ks} v_{kt}}{\sqrt{d(s)d(t)}} \right) \\ &\quad + 2m \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \left( \frac{v_{ks}^2}{d(s)} - \frac{v_{ks} v_{kt}}{\sqrt{d(s)d(t)}} \right) \quad (67) \\ &= 2m \sum_{k=2}^n \frac{1}{1-\lambda_k} \left( \frac{v_{kt}}{\sqrt{d(t)}} - \frac{v_{ks}}{\sqrt{d(s)}} \right)^2. \end{aligned}$$

با استفاده از نتیجه ۳ و این حقیقت که  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1-\lambda_k} \leq \frac{1}{1-\lambda_2}$  و تعامد ماتریس  $(v_{ks})$ ، نتیجه ۴ به دست می‌آید.

**نتیجه ۴:** زمان رفت و آمد از  $s$  به  $t$  از بالا و پایین کران‌دار<sup>۱</sup> است (رابطه (۶۸)).

<sup>2</sup> Spectral gap

<sup>3</sup> Normalizing

<sup>1</sup> Bounded (from) above and below

شاید مهم‌ترین کاربرد رویکرد مقادیر ویژه در نرخ آمیختگی باشد که در بخش ششم در مورد آن بحث خواهیم کرد.

## ۲.۴. طیف‌ها و تابع مولد

ابتدا با معرفی تابع مولد احتمال<sup>۳</sup> در ارتباط با فرمول‌های طیفی اطلاعات بیشتری کسب می‌کنیم. برای این منظور تعریف می‌کنیم  $F(x) = \sum_{t=0}^{\infty} x^t P^t = (I - xP)^{-1}$  که در این حالت  $F_{ij}(x)$  درایه  $(i, j)$  ام این ماتریس، تابع مولد برای احتمال‌های  $p_{ij}^t$  است.

با استفاده از این تابع می‌توان از طریق رویکردهای استاندارد تابع مولد، احتمال‌های دیگر را شرح داد. به عنوان مثال، قرار دهید  $q_{ij}^t$  احتمال اینکه در پرسه زدن تصادفی با شروع از  $i$  در  $t$  قدم، برای اولین بار به راس  $j$  اصابت کنیم. واضح است که  $p_{ij}^t = \sum_{s=0}^t q_{ij}^s p_{jj}^{t-s}$  می‌توان این رابطه را با استفاده از تابع مولد نیز نوشت. قرار دهید  $G_{ij}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} q_{ij}^t x^t$ ، پس داریم:

$$F_{ij}(x) = G_{ij}(x)F_{jj}(x). \quad (۷۷)$$

بنابراین ماتریس  $G(x) = (G_{ij}(x))$  از  $F(x)$  به دست می‌آید به گونه‌ای که درایه‌های روی قطر ۱ هستند. می‌توانیم از تجزیه طیفی<sup>۴</sup>  $P$  برای دستیابی به فرمولی صریح‌تر استفاده کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned} F_{ij}(x) &= \sqrt{\frac{d(j)}{d(i)}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n (x\lambda_k)^t v_{ki} v_{kj} \\ &= \sqrt{\frac{d(j)}{d(i)}} \sum_{k=1}^n v_{ki} v_{kj} \frac{1}{1 - x\lambda_k} \end{aligned} \quad (۷۸)$$

با تابع مولد داریم:

$$G_{ij}(x) = \sqrt{\frac{d(j)}{d(i)}} \frac{\sum_{k=1}^n v_{ki} v_{kj} \frac{1}{1 - x\lambda_k}}{\sum_{k=1}^n v_{kj}^2 \frac{1}{1 - x\lambda_k}}. \quad (۷۹)$$

اکنون برهان دیگری از قضیه ۷ به کمک تابع مولد احتمال ارائه می‌دهیم. از اینکه  $H(s, t) = G'_{st}(1)$  با محاسبه مشتقات بالاتر

$$\begin{aligned} H(0, 1) &= k \sum_{j=1}^k \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \binom{p}{j-1} (1 - (-1)^j) \\ &= k \sum_{p=0}^{k-1} \frac{1}{2(p+1)} \sum_{j=1}^k \binom{p}{j-1} (1 - (-1)^j) \\ &= k \sum_{p=0}^{k-1} \frac{2^p}{p+1} \\ &= 2^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j} \frac{k}{k-j} \sim 2^k. \end{aligned} \quad (۷۱)$$

به راحتی می‌توان دید که مقدار دقیق این عبارت همیشه بین  $2^k$  و  $2^{k+1}$  است.

به عنوان کاربردی دیگر ثابت می‌کنیم که «دسترسی به هدف‌های دورتر سخت‌تر است» (قضیه ۵ قسمت (ب)). استدلال شبیه به رابطه (۶۵) است. لذا داریم:

$$\begin{aligned} \sum_s \pi(s) H(s, t) &= \sum_s \sum_{k=2}^n \frac{1}{1 - \lambda_k} \left( v_{kt}^2 \frac{d(s)}{d(t)} - v_{kt} v_{ks} \sqrt{\frac{d(s)}{d(t)}} \right) \end{aligned} \quad (۷۲)$$

با استفاده دوباره از این موضوع که  $v_k \geq 2$  به  $v_1$  عمود است، داریم:

$$\sum_s \pi(s) H(s, t) = \frac{2m}{d(t)} \sum_{k=2}^n \frac{1}{1 - \lambda_k} v_{kt}^2. \quad (۷۳)$$

با یک نامعادله بین میانگین حسابی<sup>۱</sup> و هارمونیک (همساز)<sup>۲</sup> (با وزن  $v_{kt}^2$ ) داریم:

$$\frac{\sum_{k=2}^n \frac{1}{1 - \lambda_k} v_{kt}^2}{\sum_{k=2}^n v_{kt}^2} \geq \frac{\sum_{k=2}^n v_{kt}^2}{\sum_{k=2}^n (1 - \lambda_k) v_{kt}^2}. \quad (۷۴)$$

حال در اینجا

$$\sum_{k=2}^n v_{kt}^2 = \sum_{k=1}^n v_{kt}^2 - \pi(t) = 1 - \pi(t) \quad (۷۵)$$

و

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (1 - \lambda_k) v_{kt}^2 &= \sum_{k=1}^n (1 - \lambda_k) v_{kt}^2 \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_k v_{kt}^2 \\ &= 1 - (N)_{t,t} = 1. \end{aligned} \quad (۷۶)$$

بنابراین  $\sum_s \pi(s) H(s, t) \geq \frac{1}{\pi(t)} (1 - \pi(t))^2$  که این ادعا را ثابت می‌کند.

<sup>3</sup> Probability generating function

<sup>4</sup> Spectral decomposition

<sup>1</sup> Arithmetic mean/arithmetic average

<sup>2</sup> Harmonic mean

می‌توانیم فرمول‌های مشابهی (با پیچیدگی بیشتر) برای زمان‌های بالاتر در ملاقات راس  $t$  برای اولین بار به دست آوریم.

## ۵. ارتباط الکتریکی

گراف همبند  $G = (V, E)$  و زیرمجموعه  $S \subseteq V$  را در نظر بگیرید. تابع  $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}$  «تابع هارمونیک»<sup>۱</sup> با مجموعه قطب‌های<sup>۲</sup>  $S$  نام‌گذاری می‌شود، اگر

$$\frac{1}{d(v)} \sum_{u \in \Gamma(v)} \phi(u) = \phi(v) \quad (۸۰)$$

برای هر  $v \notin S$  برقرار باشد (همچنین مجموعه  $S$  کران تابع هارمونیک نامیده می‌شود) [۲۱]. تعجب‌آور نیست که تابع هارمونیک نقش مهمی در مطالعه پرسه زدن تصادفی بازی می‌کند. میانگین را در تعریف می‌توان مقدار امید بعد از یک حرکت تفسیر کرد که در نظریه شبکه‌های الکتریکی<sup>۳</sup> و همچنین در استاتیک<sup>۴</sup> نیز آورده شده است. ارتباط میان این شاخه‌ها بسیار مورد استفاده واقع می‌شود. به خصوص روش‌ها و نتایجی از نظریه الکتریک و استاتیک که اغلب با فیزیک<sup>۵</sup> ادغام می‌شود را می‌توان برای به دست آوردن نتایجی در پرسه زدن تصادفی بکار برد. قبل از انجام این مهم، توجه کنید که یک شبکه یک گراف همبند بدون جهت متناهی  $G$  است که علاوه بر آن به اعداد نامنفی به اسم رسانایی<sup>۶</sup> مرتبط با یال‌های گراف نیز مجهز شده است. در مورد رسانایی در بخش‌های ۶.۳ و ۶.۴ صحبت خواهیم کرد. وارون رسانایی را مقاومت یال نامند که در بخش ۵ مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

فرض کنید در زمان  $k$ ، پرسه زدن تصادفی، راس  $i$  را ملاقات می‌کند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} E(\phi(v_{k+1}) | v_k = i) &= \sum_{j \in V} \phi(j) p_{ij} \\ &= \frac{1}{d(i)} \sum_{j \in \Gamma(i)} \phi(j) = \phi(i). \end{aligned} \quad (۸۱)$$

از این رو فرآیند تصادفی  $\{\phi(v_t)\}_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$  یک مارتینگل<sup>۷</sup> نسبت به  $X$  است و لذا با یک بازی منصفانه<sup>۸</sup> سروکار داریم. با شرح سه ساختار از تابع هارمونیک در شاخه‌های ذکر شده، مطلب را آغاز می‌کنیم:

الف)  $\phi(v)$  را احتمال اینکه در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از راس  $v$ ، قبل از اصابت به  $t$ ، به  $S$  برسیم در نظر بگیرید. به وضوح  $\phi$  تابع هارمونیک با قطب‌های  $S$  و  $t$  است، به طوری که  $\phi(t) = 0$  و  $\phi(s) = 1$  است.

به طور کلی‌تر اگر مجموعه  $S \subseteq V$  و تابع  $\phi_0: S \rightarrow \mathbb{R}$  داشته باشیم،  $\phi(v)$  را برای  $v \in V \setminus S$ ، امید  $\phi_0(s)$  تعریف می‌کنیم که  $S$  (به صورت تصادفی) راسی است که پرسه زدن تصادفی با شروع از  $v$  ابتدا به  $S$  اصابت می‌کند. پس  $\phi(v)$  یک تابع هارمونیک با مجموعه قطب  $S$  است. علاوه بر آن برای هر  $s \in S$  داریم  $\phi(s) = \phi_0(s)$ .

ب) گراف  $G$  را به عنوان یک شبکه الکتریکی در نظر بگیرید، به طوری که هر راس، یک واحد مقاومت را نشان می‌دهد. فرض کنید الکتریسیته<sup>۹</sup> در گراف  $G$  جاری است، به گونه‌ای که از راس  $s$  وارد و از  $t$  خارج می‌شود.  $\phi(v)$  ولتاژ<sup>۱۰</sup> راس  $v$  است. پس  $\phi$  یک تابع هارمونیک با قطب‌های  $S$  و  $t$  است.

ج) یال‌های گراف  $G$  را به صورت فنرهای متناسب با ثابت هوک<sup>۱۱</sup> واحد در نظر بگیرید (یعنی  $h$  واحد نیرو برای کشش فنرها به طول  $h$ ، لازم است). راس‌های  $s$  و  $t$  را با شماره‌های ۱ و ۰ در خط اعداد حقیقی، میخ می‌زنیم و تعادل گراف را می‌یابیم. انرژی<sup>۱۲</sup> در مکان هر راس، دارای یک صورت درجه دوم معین مثبت<sup>۱۳</sup> است و بنابراین کمینه آن یکتا است، که همان نقطه تعادل است. به وضوح تمام راس‌ها بین ۰ و ۱ قرار دارند و مکان راس‌ها را به صورت یک تابع هارمونیک با قطب‌های  $S$  و  $t$  تعریف می‌کنیم.

<sup>7</sup> Martingale

<sup>8</sup> Fair game

<sup>9</sup> Electricity

<sup>10</sup> Voltage

<sup>11</sup> Hooke constant

<sup>12</sup> Energy

<sup>13</sup> Positive definite quadratic form

<sup>1</sup> Harmonic function

<sup>2</sup> Poles

<sup>3</sup> Electrical networks

<sup>4</sup> Statics

<sup>5</sup> Physics

<sup>6</sup> Conductance

پرسه زدن تصادفی با شروع از  $t$ ، قبل از بازگشت به  $t$ ، برای اولین بار به  $s$  اصابت کنیم، برابر با  $\frac{1}{d(t)} \sum_{u \in \Gamma(t)} \phi_{st}(u)$  است. با توجه به گزاره ۲، این احتمال برابر  $2m/d(t) \kappa(s, t)$  است که برهان را کامل می‌کند.

با استفاده از فرمول‌های توپولوژیک<sup>۲</sup> از نظریه شبکه‌های الکتریکی برای مقاومت [۲۱]، مشخصه‌های زیر را برای زمان رفت و آمد نتیجه می‌گیریم.

**نتیجه ۵:** برای گراف  $G$  و  $s, t \in V$  و گراف  $G'$  که از گراف  $G$  با شناسه‌های  $s$  و  $t$  حاصل شده است و  $T(G)$  که تعداد درخت‌های فراگیر  $G$  است، داریم  $\kappa(s, t) = 2m \frac{T(G)}{T(G)}$ ، [۳۳].

**نتیجه ۵:** در نظریه شبکه‌های الکتریکی، اصل رالی<sup>۳</sup> نامیده می‌شود که نتیجه‌ای از قضیه ۸ است.

**نتیجه ۶:** افزودن هر یالی به گراف، میزان مقاومت  $R_{st}$  را افزایش نمی‌دهد. در نتیجه زمان رفت و آمد  $\kappa(s, t)$  از عامل  $(m+1)/m$  بیشتر نمی‌شود [۳۴].

در حقیقت، به سادگی می‌توان ثابت کرد که حذف یک یال از گراف  $G$  نمی‌تواند انرژی تعادل پیکربندی در ساختار فنی را افزایش دهد. اگر در یک گراف جدید، تعادل را پیدا کنیم، انرژی می‌تواند به میزان بیشتری کاهش یابد.

به وضوح هنگامی که مکان راس‌ها ثابت است، حذف یک یال نمی‌تواند انرژی را افزایش دهد. اگر اجازه دهیم گراف جدید تعادل خود را پیدا کند، انرژی به مقدار بیشتری کاهش می‌یابد.

## ۶. نرخ آمیختگی

یکی از مهم‌ترین متغیرها در کاربرد پرسه زدن تصادفی، نرخ آمیختگی است. ساده‌ترین راه محاسبه نرخ آمیختگی در زمان‌های چندجمله‌ای، استفاده از مقادیر ویژه است، اما این نتیجه شامل کل موضوع نیست. همان‌طور که خواهیم دید، گراف‌های پایه‌ای در موارد مورد نظر به صورت نمایی<sup>۴</sup> بزرگ می‌شوند و محاسبه

به طور کلی اگر قرار دهیم  $S \subseteq V$  و مکان راس‌ها را در  $S$  ثابت نگه داریم (در هر بُعد) و اجازه دهیم بقیه راس‌ها نقطه تعادل خود را پیدا کنند، آنگاه هر مختصاتی از راس‌ها تابع هارمونیک با مجموعه قطب  $S$  است.

حال ویژگی‌های بدیهی تابع هارمونیک را به صورت خلاصه بیان می‌کنیم. به وضوح  $\phi(v)$  بین کمینه و بیشینه  $\phi$  روی مجموعه  $S$  قرار می‌گیرد. علاوه بر آن در  $S \subseteq V$  و  $\phi_0: S \rightarrow \mathbb{R}$ ، یک تابع هارمونیک روی  $G$  با مجموعه قطب  $S$  که روی  $\phi_0$  گسترش می‌یابد، وجود دارد (این وجود توسط هر یک از ساختارهای (الف) یا (ج) نتیجه می‌شود و یکتایی منجر به ایجاد بیشینه اختلاف بین چنین توابعی می‌شود).

به خصوص نتیجه می‌شود که هر تابع هارمونیک با حداکثر یک قطب، مقدار ثابت است. نشان می‌دهیم  $\phi_{st}$ ، تابع هارمونیک (یکتا) با قطب‌های  $s$  و  $t$  است که  $\phi_{st}(s) = 1$  و  $\phi_{st}(t) = 0$ . نتیجه دیگر از ویژگی یکتایی این است که توابع هارمونیک که دارای ساختاری به صورت (الف) و (ج) هستند (برای  $|S| = 2$ ) در (ب) یکسان‌اند. به عنوان کاربردی از این ایده، مطالب مفیدی را از زمان رفت و آمد، بیان خواهیم کرد.

**قضیه ۸:** گراف  $G$  را به عنوان یک شبکه الکتریکی با ساختار (ب) و  $R_{st}$  را مقاومت میان دو راس  $s$  و  $t$  در نظر بگیرید. زمان رفت و آمد بین راس‌های  $s$  و  $t$  دقیقاً برابر با  $2mR_{st}$  است.

توجه داشته باشید که رابطه (۲۶) می‌تواند در شرح زمان‌های دسترسی در مقاومت‌ها و نیروهای کشسانی، مفید باشد [۱۷]، [۳۲].

**اثبات:** با توجه به قسمت (ب)، در گراف  $G$ ، اگر جریان<sup>۱</sup> از  $s$  به  $t$  برود،  $\phi_{st}(v)$  ولتاژ  $v$  خواهد بود، به طوری که ولتاژ  $t$ ، ۱ است. کل جریان در یک شبکه برابر با  $\sum_{u \in \Gamma(t)} \phi_{st}(u)$  و بنابراین مقاومت برابر با:

$$R_{st} = \left( \sum_{u \in \Gamma(t)} \phi_{st}(u) \right)^{-1} \quad (۸۲)$$

است. از سوی دیگر، قسمت (الف) بیان می‌کند احتمال اینکه در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از  $u$ ، قبل از رسیدن به  $t$ ،  $s$  را ملاقات کنیم، برابر با  $\phi_{st}(u)$  است و لذا احتمال اینکه در یک

<sup>۲</sup> Topological formulas

<sup>۳</sup> Raleigh's Principle

<sup>۴</sup> Exponentially

<sup>۱</sup> Current

مقادیر ویژه به کمک جبر خطی ممکن نیست. بنابراین رویکردهای ترکیبی منجر به ایجاد تقریب‌هایی می‌شود که هر کدام بیشتر قابل کنترل باشد، ارجح است. جفت‌سازی<sup>۱</sup> و میزان رسانایی دو رویکرد اصلی و مورد استفاده هستند. در این بخش به بررسی این رویکردها می‌پردازیم و سپس کاربردهایی در طراحی الگوریتم<sup>۲</sup> معرفی می‌کنیم.

## ۱.۶. نرخ آمیختگی و جفت‌سازی

روش‌هایی را برای محدودسازی نرخ آمیختگی در یک رده خاص از گراف‌ها ارائه می‌دهیم (جهت مقایسه، روش‌های مختلفی برای گراف‌های یکسان بکار می‌بریم). این گراف‌ها جمع دکارتی<sup>۳</sup>  $C_n^k$  از  $k$  مدار به طول  $n$  است، به طوری که  $n$  فرد است. مجموعه راس‌های این گراف به صورت  $\{0, \dots, n-1\}^k$  و دو راس  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  و  $(y_1, y_2, \dots, y_k)$  مجاور هستند، اگر و فقط اگر یک  $i$  که  $1 \leq i \leq k$  وجود داشته باشد که  $x_i = y_i$  و برای هر  $i \neq j$  داشته باشیم  $x_i = y_i \pm 1 \pmod{n}$ . پرسه زدن تصادفی  $(v_0, v_1, \dots)$  را روی  $C_n^k$  با توزیع آغازین دلخواه، شروع می‌کنیم. به منظور برآورد<sup>۴</sup> تعداد قدم‌ها برای رسیدن به توزیع ایستا (در این مورد توزیع یکنواخت)، پرسه زدن تصادفی با راس‌های  $(w_0, w_1, \dots)$  را شروع می‌کنیم که  $w_0$  از توزیع یکنواخت استخراج شده است. پس  $w_t$  به ازای هر  $t$  دارای توزیع یکنواخت است.

دو پرسه زدن تصادفی اخیر، از هم مستقل نیستند، همان‌طور که گفته شد آنها با هم جفت هستند. راس‌های  $C_n^k$  برداری به طول  $k$  و یک پرسه زدن تصادفی، انتخاب تصادفی تغییر وضعیت به مختصات یک، است. اولین قدم، در اولین پرسه زدن را با انتخاب تصادفی مختصات  $j$  که  $1 \leq j \leq k$  و مقدار تصادفی  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ، تولید می‌کنیم. نقطه  $v_{t+1}$ ، با اضافه کردن  $\varepsilon$  به مختصات  $j$ ام  $v_t$  به دست می‌آید. حال اگر هر دو  $w_t$  و  $v_t$  در مختصات  $j$ ام بودند،  $w_{t+1}$  را با اضافه کردن  $\varepsilon$  به مختصات  $j$ ام

$w_t$  تولید می‌کنیم، در غیر این صورت  $\varepsilon$  را از مختصات  $j$ ام  $w_t$ ، کم می‌کنیم (تمام عمل‌ها<sup>۵</sup> به پیمانه  $n$  هستند). یک موضوع مهم مشاهده  $(w_0, w_1, \dots)$  در پرسه زدن است که یک پرسه زدن تصادفی کاملاً صحیح است. از طرف دیگر قاعده جفت‌سازی، نتیجه می‌دهد که اگر برای یک‌بار مختصات  $v_t$  با مختصات  $w_t$  مساوی شود، این برابری برای همیشه باقی می‌ماند. دیر یا زود، همه مختصات‌ها با هم برابر خواهند شد. پس  $v_t$  با  $w_t$  که دارای توزیع یکنواخت است، هم‌توزیع خواهد شد.

برای استدلال دقیق این موضوع، قدم‌ها را وقتی مختصات  $j$ ام انتخاب می‌شود، نگاه کنید. متوسط تعداد قدم‌ها قبل از اینکه دو پرسه زدن در مختصات  $j$ ام با هم مساوی شوند، برابر با میانگین زمان دستیابی بین دو راس در یک مدار به طول  $n$ ، یعنی  $(n^2 - 1)/6$  است. بنابراین متوسط تعداد قدم‌ها قبل از اینکه همه مختصات‌ها مساوی شوند، برابر با  $(n^2 - 1)/6$  است. طبق نامساوی مارکوف [۱۱]، احتمال اینکه بعد از  $kn^2$  قدم، هنوز  $v_t$  و  $w_t$  با هم مساوی نباشند، کمتر از  $1/6$  است و بنابراین احتمال اینکه بعد از  $ckn^2$  قدم هنوز این نقاط با هم مساوی نباشند، کمتر از  $6^{-c}$  است. از این رو برای هر  $T$  به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\left| P(v_t \in S) - \frac{|S|}{n^k} \right| = |P(v_t \in S) - P(w_t \in S)| \quad (۸۳)$$

$$\leq P(w_t \neq v_t) < \frac{1}{6kn^2}.$$

نرخ آمیختگی حداکثر برابر با رابطه (۸۴) است.

$$6^{-\frac{1}{kn^2}} < 1 - \frac{1}{kn^2} \quad (۸۴)$$

این برهان بسیار دقیق است، اما به نظر می‌رسد برای کاربردهای بیشتر، تنها راه، قاعده جفت‌سازی نیست و فقط در بعضی شرایط دارای نتیجه خواهد بود.

## ۲.۶. نرخ آمیختگی و رخنه مقادیر ویژه

فرمول جبری نرخ آمیختگی به راحتی به دست می‌آید. قرار دهید

<sup>۱</sup> Coupling

<sup>۲</sup> Algorithm design

<sup>۳</sup> Cartesian sum

<sup>۴</sup> Estimate

<sup>۵</sup> Operation

<sup>۶</sup> Modulo

حلقه اضافه می‌کنیم. مقادیر ویژه گراف حاصل  $0, 2, 4, \dots, 2n$  هستند، از این رو مقادیر ویژه این ماتریس احتمال‌های انتقال  $0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1$  است. پس نرخ آمیختگی برابر با  $(n-1)/n$  است.

در ادامه گراف  $C_n^k$  را برای  $n$  فرد، می‌سازیم. مقادیر ویژه  $C_n$  برای  $0 \leq r < n$  برابر با  $2\cos(2r\pi/n)$  است، پس مقادیر ویژه ماتریس مجاورت  $C_n^k$  همه مقادیر

$$2\cos(2r_1\pi/n) + 2\cos(2r_2\pi/n) + \dots + 2\cos(2r_k\pi/n) \quad (۸۹)$$

است [۳۶]. به خصوص بزرگترین مقدار ویژه  $2k$  است، بعد از آن  $2(k-1) + 2\cos(2\pi/n)$  و کوچکترین مقدار ویژه  $2k\cos((n-1)\pi/n)$  است. از این رو نرخ آمیختگی برابر با  $1 - \frac{1}{k} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right) \approx 1 - \frac{2\pi^2}{kn^2}$  است.

### ۳.۶. رخنه مقدار ویژه و رسانایی

گراف  $G$  و  $S \subset V$  را در نظر بگیرید. مجموعه یال‌های متصل از  $S$  به  $V \setminus S$  را با  $\nabla(S)$  نشان می‌دهیم. رسانایی مجموعه  $S \subset V$  و  $S \neq \emptyset$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(S) = \frac{|\nabla(S)|}{2m\pi(S)\pi(V \setminus S)} \quad (۹۰)$$

رسانایی گراف را با  $\Phi = \min_S \Phi(S)$  نشان می‌دهیم به طوری که کمینه، از بین همه زیرمجموعه‌های ناتهی سره  $S \subset V$  استخراج شده است. اگر گراف،  $d$ -منتظم باشد، رسانایی  $S$  برابر با  $\Phi(S) = \frac{n|\nabla(S)|}{d|S| \cdot |V \setminus S|}$  است.

برای درک بیشتر این کمیت، توجه کنید که  $|\nabla(S)|/2m$  بسامد یک پرسه زدن تصادفی ایستا است که از  $S$  به  $V \setminus S$  تغییر وضعیت می‌دهد، در حالی که  $\pi(S)\pi(V \setminus S)$  بسامد یک دنباله از اعضای تصادفی مستقل  $V$  است که از توزیع  $\pi$  استخراج شده و  $\Phi$  می‌تواند به منظور معیار قطعی مشخص شود که میزان استقلال راس‌های متوالی در پرسه زدن تصادفی را نشان می‌دهد. بنابراین  $\Phi$  نشان‌دهنده اندازه دقیق استقلال راس‌های متوالی در یک پرسه زدن تصادفی است.

$\lambda = \min\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$  پس از رابطه (۵۱) به سادگی قضیه ۹ را به دست می‌آوریم:

**قضیه ۹:** در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از راس  $i$  داریم:

$$|P_t(j) - \pi(j)| \leq \sqrt{\frac{d(j)}{d(i)}} \lambda^t. \quad (۸۵)$$

به طور کلی تر

$$|P_t(S) - \pi(S)| \leq \sqrt{\frac{\pi(S)}{\pi(i)}} \lambda^t. \quad (۸۶)$$

بنابراین نرخ آمیختگی حداکثر  $\lambda$  است. به راحتی می‌توان این تساوی را ثابت کرد [۱۰]، [۱۹].

**نتیجه ۷:** نرخ آمیختگی پرسه زدن تصادفی روی گراف نادوبخشی  $G$  برابر  $\lambda = \max\{|\lambda_2|, |\lambda_n|\}$  است [۱۰]، [۳۵]. به منظور کاربرد، نباید نگران  $\lambda_n$  باشیم. برای مثال، در هر نقطه  $d(i)$ ، حلقه<sup>۱</sup> اضافه می‌کنیم به طوری که با عامل ۲، پرسه زدن را کندتر کند. اما این نتایج برای یک گراف با ماتریس مجاورت نیمه معین مثبت است. مهم‌ترین متغیر،  $\lambda_2$  یا ترجیحا رخنه طیفی  $1 - \lambda_2$  است. دقت کنید که:

$$\log(1/\lambda) \approx (1 - \lambda)^{-1}. \quad (۸۷)$$

همگرایی توزیع‌ها موضوعی است که قضیه ۹ روی آن متمرکز است و در کاربرد بسیار مهم است. برحسب فاصله تغییرات کلی (که به نظر می‌رسد در کاربردها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است)، معیارهای تکنیکی دیگر از مزایای متفاوتی برخوردار هستند. برای مثال به کارگیری معیار  $\chi^2$  دارای این مزیت است که فاصله بعد از هر قدم توسعه می‌یابد:

$$\sum_j \frac{(P_{t+1}(j) - \pi(j))^2}{\pi(j)} \leq \lambda \sum_j \frac{(P_t(j) - \pi(j))^2}{\pi(j)}. \quad (۸۸)$$

به عنوان کاربردی از قضیه ۹، نرخ آمیختگی پرسه زدن تصادفی را در یک مکعب<sup>۲</sup>  $n$ -بعدی، محاسبه می‌کنیم. از آنجا که گراف دوبخشی است، باید به آن حلقه بیافزاییم، پس به هر راس،  $n$

<sup>۱</sup> Loop

<sup>۲</sup> Cube

<sup>۳</sup> Proper

لم ۲: ثابت می شود:

داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E} |y_i - y_j| &= \sum_{i=1}^{n-1} |\nabla(S_i)| (y_{i+1} - y_i) \\ &\geq 2m\Phi \sum_{i=1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) \times \pi(S_i) \pi(V \setminus S_i) \end{aligned} \quad (97)$$

با استفاده از اینکه  $\pi(S_i) \geq 1/2$  و  $i \leq t$  و  $\pi(S_i) \leq 1/2$  و  $i \geq s+1$  و  $y_{i+1} - y_i = 0$  داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E} |y_i - y_j| &\geq m\Phi \sum_{i=1}^t (y_{i+1} - y_i) \pi(S_i) + \\ &\quad m\Phi \sum_{i=t+1}^{n-1} (y_{i+1} - y_i) \pi(V \setminus S_i) \\ &= m\Phi \sum_i \pi(i) |y_i| = m\Phi. \end{aligned} \quad (98)$$

**قضیه ۱۰:** ثابت می شود  $\frac{\Phi^2}{8} \leq 1 - \lambda_2 \leq \Phi^2$  برقرار است.

**اثبات:** ابتدا کران بالا را ثابت می کنیم. طبق لم ۲، کافی است برای یک بردار  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^V$  نشان دهیم:

$$\begin{aligned} \sum_i \pi(i) x_i &= 0, \\ \sum_i \pi(i) x_i^2 &= \frac{1}{2m} \end{aligned} \quad (99)$$

و

$$\sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2 = \Phi. \quad (100)$$

مجموعه  $S$  را مجموعه ای با کمینه رسانایی و بردار  $\mathbf{x}$  با مولفه های زیر در نظر بگیرید.

$$x_i = \begin{cases} a & i \in S \\ b & i \in V \setminus S \end{cases} \quad (101)$$

این بردار در رابطه (۹۹) صدق می کند، اگر  $a = \sqrt{\frac{\pi(V \setminus S)}{2m\pi(S)}}$  و  $b = -\sqrt{\frac{\pi(S)}{2m\pi(V \setminus S)}}$  باشد. با یک جایگذاری ساده می توان نشان داد در رابطه (۱۰۰) نیز صدق می کند.

برای اثبات کران پایین، دوباره از لم ۲ استفاده می کنیم. ثابت می کنیم برای هر بردار  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^V$  که در رابطه (۹۹) صدق می کند، داریم:

$$\frac{1}{m} \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 \geq \frac{\Phi^2}{8}. \quad (102)$$

$$1 - \lambda_2 = \min \left\{ \sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2 : \sum_i \pi(i) x_i = 0, \sum_i \pi(i) x_i^2 = \frac{1}{2m} \right\} \quad (91)$$

که هر یال  $ij$  فقط یک بار جمع می شود.

**اثبات:** فرض کنید  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^V$  بردار ویژه واحد ماتریس احتمال های انتقال متقارن شده  $\hat{P}$  و متناظر با مقدار ویژه  $\lambda_2$  باشد. قرار دهید  $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\pi(i)}}$ . بردار  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^V$  بر بردارهای ویژه  $(\sqrt{\pi(i)})_{i \in V}$  متعامد هستند و از این رو داریم:

$$\begin{aligned} \sum_i \pi(i) x_i &= \sum_i \sqrt{\pi(i)} y_i = 0, \\ \sum_i \pi(i) x_i^2 &= \sum_i y_i^2 = 1 \end{aligned} \quad (92)$$

علاوه بر آن انتخاب زیر، سمت راست را به کمترین مقدار ممکن می رساند:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2 &= \frac{1}{2m} \sum_{i \in V} d(i) x_i^2 - \\ &\quad \frac{1}{m} \sum_{ij \in E(G)} x_i x_j \\ &= \sum_{i \in V} \pi(i) x_i^2 - \mathbf{y}^T \hat{P} \mathbf{y} \\ &= 1 - \lambda_2. \end{aligned} \quad (93)$$

**لم ۳:** گراف  $G$  با رسانایی  $\Phi$  را در نظر بگیرید. حال قرار دهید  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^V$  و فرض کنید روابط  $\pi(\{i: y_i > 0\}) \leq \frac{1}{2}$  و  $\pi(\{i: y_i < 0\}) \leq \frac{1}{2}$  برقرار هستند. در این صورت داریم:

$$\sum_{(i,j) \in E} |y_i - y_j| \geq m\Phi. \quad (94)$$

**اثبات:** برای برهان، نقاط را با  $1, \dots, n$  برچسب گذاری می کنیم به طوری که:

$$\begin{aligned} y_1 \leq y_2 \leq y_t < 0 = y_{t+1} \\ = \dots \\ = y_s < y_{s+1} \leq \dots \leq y_n. \end{aligned} \quad (95)$$

قرار دهید  $S = \{1, \dots, t\}$  با جایگذاری

$$y_j - y_i = (y_{i+1} - y_i) + \dots + (y_j - y_{j-1}) \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2 &\geq \sum_{ij \in E} (z_i - z_j)^2 \\ &\geq \frac{(\sum_{ij \in E} |z_i^2 - z_j^2|)^2}{\sum_{ij \in E} (z_i + z_j)^2} \\ &\geq \frac{\Phi^2 m^2 (\sum_i \pi(i) z_i^2)^2}{4m \sum_i \pi(i) z_i^2} \\ &= \frac{\Phi^2 m}{4} \sum_i \pi(i) z_i^2 \geq \frac{\Phi^2 m}{8} \end{aligned} \quad (109)$$

با تقسیم دو طرف نامساوی بالا به  $m$  نامساوی رابطه (۱۰۲) و در پی آن برهان کامل می‌شود.

رسانایی به صورت عکس در نامعادله اخیر وارد می‌شود که به معنی نسخه  $\ell_1$  از رابطه (۱۰۲) است.

هر برداری را که در رابطه (۹۹) صدق کند،  $\mathbf{x}$  می‌نامیم و فرض می‌کنیم  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  باشد. همچنین  $1 \leq k \leq n$  یک شاخص باشد که برای آن  $\pi(\{1, \dots, k-1\}) \leq 1/2$  و  $\pi(\{k+1, \dots, n\}) < 1/2$

با قرار دادن  $z_i = \max\{0, x_i - x_k\}$  و انتخاب علامت  $\mathbf{x}$  مناسب، می‌توانیم فرض کنیم:

$$\begin{aligned} \sum_i \pi(i) z_i^2 &\geq \frac{1}{2} \sum_i \pi(i) (x_i - x_k)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \pi(i) x_i^2 - x_k \sum_i \pi(i) x_i + \frac{1}{2} x_k^2 \quad (110) \\ &= \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} x_k^2 \geq \frac{1}{2m}. \end{aligned}$$

حال لم ۳ را برای مقادیر  $y_i = z_i^2 / \sum_i \pi(i) z_i^2$  بکار برده و به دست می‌آوریم که:

$$\sum_{(i,j) \in E} |z_i^2 - z_j^2| \geq m\Phi \sum_i \pi(i) z_i^2. \quad (111)$$

از طرف دیگر با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز [۱۱]:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E} |z_i^2 - z_j^2| &\leq \left( \sum_{(i,j) \in E} (z_i - z_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \left( \sum_{(i,j) \in E} (z_i + z_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (112)$$

عامل دوم را می‌توان به صورت رابطه (۱۱۳) برآورد کرد.

اکنون به اثبات رابطه (۱۰۲) می‌پردازیم. فرض کنید  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^v$  یک بردار باشد که در رابطه (۹۹) صدق کند به نحوی که  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  مقدار  $1 \leq k \leq n$  را به گونه‌ای اختیار کنید که:

$$\pi(\{1, \dots, k-1\}) \leq \frac{1}{2} \quad (103)$$

و

$$\pi(\{k+1, \dots, n\}) < \frac{1}{2}. \quad (104)$$

با اختیار کردن  $z_i = \max\{0, x_i - x_k\}$  داریم:

$$\begin{aligned} \sum_i \pi(i) z_i^2 &\geq \frac{1}{2} \sum_i \pi(i) (x_i - x_k)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \pi(i) x_i^2 - \\ &\quad x_k \sum_i \pi(i) x_i + \frac{m}{2} x_k^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{m}{2} x_k^2 \geq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (105)$$

اکنون با اختیار کردن  $y_i = z_i^2 / \sum_i \pi(i) z_i^2$  در لم ۳، داریم:

$$\sum_{ij \in E} |z_i^2 - z_j^2| \geq m\Phi \sum_i \pi(i) z_i^2. \quad (106)$$

از طرف دیگر طبق نامساوی کوشی-شوارتز<sup>۱</sup> [۱۱] داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E} |z_i^2 - z_j^2| &\leq \left( \sum_{ij \in E} (z_i - z_j)^2 \right)^{1/2} \times \\ &\quad \left( \sum_{ij \in E} (z_i + z_j)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (107)$$

همچنین  $\sum_{ij \in E} (z_i - z_j)^2 \leq \sum_{ij \in E} (x_i - x_j)^2$  و

$$\begin{aligned} \sum_{ij \in E} (z_i + z_j)^2 &\leq 2 \sum_{ij \in E} (z_i^2 + z_j^2) \\ &= 2 \sum_{i \in V} d(i) z_i^2 \\ &= 4m \sum_i \pi(i) z_i^2. \end{aligned} \quad (108)$$

با ترکیب این دو نامساوی با نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

<sup>1</sup> Cauchy-Schwarz inequality

**قضیه ۱۱:** گراف همبند  $G$  را با یک گروه خودریختی راس-انتقالی با قطر  $D$  در نظر بگیرید. پس رسانایی  $G$  حداقل  $1/(dD)$  است. اگر گراف یال-انتقالی باشد، این مقدار حداقل  $1/D$  است.

**اثبات:** برای هر زوج نقطه  $i$  و  $j$ ، کوتاه‌ترین مسیر  $P_{ij}$  بین این دو نقطه را انتخاب می‌کنیم (که آن را فاصله  $i$  و  $j$  نیز نامند [۳۹]). خانواده این مسیرها و تصویر آنها تحت خودریختی  $G$  را با  $\rho$  نشان می‌دهیم. تعداد کل مسیرها در  $\rho$  (شمارش تعداد) برابر با  $g \binom{n}{2}$  است، به طوری که  $g$  تعداد خودریختی‌های  $G$  است. علاوه بر آن  $g$  شامل همه مسیرهایی است که هر دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌کند. ادعا می‌کنیم که در هر مسیر  $\rho$  حداکثر  $Dg(n-1)$  یال وجود دارد. در حقیقت اگر یال  $e$  در  $P$  مسیر وجود داشته باشد پس در هر تصویر از  $e$  تحت خودریختی‌ها و حداقل در  $n/2$  تصاویر متمایز توسط راس-انتقالی وجود دارد. این عمل منجر به  $pn/2$  یال می‌شود. تعداد یال‌های مسیرها در  $\rho$ ، حداکثر  $Dg \binom{n}{2}$  است که این ادعا را ثابت می‌کند.

حال قرار دهید  $S \subseteq V(G)$  و  $|S| = s \leq |V(G)|/2$ . تعداد مسیرها در  $\rho$  که  $S$  را به  $V(G) \setminus S$  متصل می‌کند دقیقاً برابر با  $gs(n-s)$  است. از طرف دیگر این تعداد حداکثر برابر با  $Dg(n-1)|\nabla(S)|$  است، از این رو داریم:

$$|\nabla(S)| \geq \frac{gs(n-s)}{Dg(n-1)} = \frac{s}{D} \cdot \frac{n-s}{n-1}. \quad (116)$$

بنابراین رسانایی  $S$  برابر با:

$$\frac{n|\nabla(S)|}{ds(n-s)} \geq \frac{n}{n-1} \frac{1}{dD} > \frac{1}{dD} \quad (117)$$

است. ابتدا این ادعا را ثابت می‌کنیم. برهان بعدی مشابه است. از قضیه ۱۱ به منظور برآورد نرخ آمیختگی  $C_n^k$  (که  $n$  فرد است) استفاده می‌کنیم. این گراف یک گروه خودریختی یال-انتقالی دارد و قطر آن  $k(n-1)/2$  است. پس رسانایی آن از  $2/(kn)$  بیشتر است و بنابراین نرخ آمیختگی آن حداکثر برابر با  $1 - \frac{1}{2k^2n^2}$  است.

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E} (z_i + z_j)^2 &\leq 2 \sum_{(i,j) \in E} (z_i^2 + z_j^2) \\ &= 4m \sum_i \pi(i) z_i^2 \end{aligned} \quad (113)$$

با ترکیب این نامساوی‌ها داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in E} (z_i - z_j)^2 &\geq \frac{(\sum_{(i,j) \in E} |z_i^2 - z_j^2|)^2}{\sum_{(i,j) \in E} (z_i + z_j)^2} \\ &\geq \frac{\Phi^2 m^2 (\sum_i \pi(i) z_i^2)^2}{4m \sum_i \pi(i) z_i^2} \\ &= \frac{\Phi^2 m}{4} \sum_i \pi(i) z_i^2 \geq \frac{\Phi^2}{8}. \end{aligned} \quad (114)$$

بدیهی است که:

$$\sum_{(i,j) \in E} (x_i - x_j)^2 \geq \sum_{(i,j) \in E} (z_i - z_j)^2 \quad (115)$$

و در پی آن حکم ثابت می‌شود.

**نتیجه ۸:** برای هر راس آغازین  $i$  و هر راس  $j$  و  $t \geq 0$ ، داریم

$$|p^t(j) - \pi(j)| \leq \sqrt{\frac{d(j)}{d(i)}} \left(1 - \frac{\Phi^2}{8}\right)^t.$$

در مرجع [۳۷] نامعادله مشابهی برای اثبات کران‌های زمان آمیختگی بکار برده شده است، به خصوص بخش اول آن که توزیع دارای بالاترین میزان رسانایی است. قضیه ۱۰ حالت گسسته نامعادله چيگر<sup>۱</sup> از هندسه دیفرانسیل<sup>۲</sup> است که به معادله حرارت<sup>۳</sup> معروف است و در واقع چنین نتایجی نشانگر اولین قدم‌ها برای مطالعه وسیع معادلات تفاضلی<sup>۴</sup> در گراف به عنوان معادلات گسسته ابتدایی از معادلات تفاضلی است.

#### ۴.۶. رسانایی و جریان‌های چندمنظوره

رسانایی متغیری نیست که بتوان آن را به تنهایی و به راحتی بکار برد. محاسبه آن برای هر گراف مشخص، دشوار است. اما روش‌هایی برای یافتن برآوردهای خوب وجود دارد. یکی از مهم‌ترین روش‌ها ساختار جریان‌های چندمنظوره<sup>۵</sup> است. به کمک نتایجی از مرجع [۳۸] به شرح موضوع می‌پردازیم.

<sup>۱</sup> Cheeger's inequality

<sup>۲</sup> Differential geometry

<sup>۳</sup> Heat equation

<sup>۴</sup> Difference equations

<sup>۵</sup> Multicommodity flows

<sup>۶</sup> Distance

یکی از کاربردهایی که به طور ضمنی در این مقاله وجود دارد را فرمول‌نویسی می‌کنیم:

**قضیه ۱۴:** قرار دهید  $t \in \mathbb{Z}_+$  و فرض کنید برای هر  $0 \leq s \leq t$  و  $0 \leq x \leq 1$  هر سطح مجموعه  $A = \{v \in V: P^s(v) \geq x\}$  حداقل رسانایی  $\psi$  را دارا است. پس برای هر  $S \subseteq V$  داریم [۱۹]:

$$|P^t(S) - \pi(S)| \leq \sqrt{|V|} \left(1 - \frac{\psi^2}{4}\right)^t. \quad (۱۱۸)$$

به عبارت دیگر اگر همگرایی  $P^t \rightarrow \pi$  کند باشد، در میان سطح‌های مجموعه  $P^t$  رسانایی کوچکی وجود دارد. کاربرد دیگر این روش شامل نتایجی است که مجموعه‌های  $S$  با اندازه کوچک  $\pi(S)$ ، مجازند که رسانایی کوچکی داشته باشند.

#### ۷. نمونه‌گیری<sup>۳</sup> با پرسه زدن تصادفی

شاید مهم‌ترین کاربرد پرسه زدن تصادفی در طراحی الگوریتم، استفاده از این حقیقت باشد که (برای گراف‌های همبند و نادوبخشی) وقتی  $t \rightarrow \infty$ ، توزیع  $v_t$  به توزیع ایستای  $\pi$  میل می‌کند. در اغلب موارد (نه همیشه) که  $G$  گرافی منتظم با درجه‌ای مانند  $d$  است، توزیع  $\pi$  یکنواخت است. هر راس در پرسه زدن تصادفی، بعد از تعدادی گام، سرانجام توزیع یکنواخت خواهد داشت.

راه‌های نابدی‌هی برای تولید عناصر، از توزیعی ساده مثل توزیع یکنواخت وجود دارد، اما به اولین کاربرد رویکردهای پرسه زدن تصادفی در دنیای واقعی بیندیشید. برای مثال برهم‌زدن نظم کارت‌ها، مانند تولید ۵۲ عنصر از توزیع یکنواخت، در میان همه جایگشت‌ها است. مساله این است که به مجموعه‌ای نیاز داریم که عناصر تصادفی آن به صورت نمایی بزرگ شوند (با توجه به اندازه طبیعی مساله). این مجموعه در بسیاری از کاربردها ساختار پیچیده‌ای دارد، برای مثال مجموعه‌ای از نقاط مشبک<sup>۴</sup> در یک جسم محدب<sup>۵</sup> یا مجموعه‌ای از گستره خطی<sup>۶</sup> یک ترتیب جزئی<sup>۱</sup>.

مشاهده می‌کنیم که این کران از کران‌های مقادیر ویژه و جفت‌سازی بدتر هستند؛ در واقع بسته به مقدار نسبی  $k$  و  $n$ ، نرخ آمیختگی به کران بالا یا کران پایین در قضیه ۱۰ نزدیک می‌شود.

اگر در برهان قضیه ۱۱ همه مسیرهای متصل‌کننده جفت راس  $\{u, v\}$  را در نظر بگیریم به گونه‌ای که وزن هر مسیر  $1/n^2 g$  است، یک جریان از  $u$  به  $v$  با مقدار  $1/n^2$  به دست می‌آوریم. استدلالی کوتاه نشان می‌دهد این  $\binom{n}{2}$  جریان، هر یال را با حداکثر  $D(n-1)/n^2$  بارگیری می‌کند. ادامه استدلال را برای هر گرافی می‌توان به کار برد و گزاره زیر نتیجه گرفته می‌شود.

**گزاره ۳:** اگر بتوانیم در  $G$  جریان  $f_{uv}$  مقادیر  $\pi(u)\pi(v)$  از  $u$  به  $v$  را برای هر  $u \neq v$  بسازیم و بیشینه کل بار این  $\binom{n}{2}$  جریان در هر یال حداکثر  $\gamma$  باشد، رسانایی  $G$  حداقل  $1/(2m\gamma)$  است [۳۸].

اکنون این سوال مطرح می‌شود که محدودیت‌های آن چیست، یعنی تا چه اندازه می‌توان به رسانایی صحیح نزدیک شد؟ **قضیه ۱۲:** گراف  $G$  با رسانایی  $\Phi$  را در نظر بگیرید. سامانه‌ای از جریان‌های  $f_{uv}$  با مقدار  $\pi(u)\pi(v)$  از  $u$  به  $v$  برای هر  $u \neq v$  هر یال را حداکثر  $O(\log n)/m\Phi$  بارگیری<sup>۱</sup> می‌کند [۳۸].

#### ۵.۶. میانبرها

در این بخش قصد داریم راه‌هایی برای نرخ آمیختگی طرح کنیم: نرخ آمیختگی  $\leftarrow$  رخنه مقادیر ویژه  $\leftarrow$  رسانایی  $\leftarrow$  جریان‌های چندمنظوره.

حال می‌توان برای کران‌هایی که واضح‌تر و دارای انعطاف‌پذیری بیشتری هستند، میانبر<sup>۲</sup> ساخت. مقدار جریان  $f$  را به صورت  $\sum_e f(e)$  تعریف می‌کنیم.

**قضیه ۱۳:** فرض کنید جریان  $f_{uv}$  با مقدار  $\pi(u)\pi(v)$  از  $u$  به  $v$  برای هر  $u \neq v$  وجود دارد، به طوری که بیشینه همه بارگیری‌ها این  $\binom{n}{2}$  جریان بر هر یال، حداکثر  $\gamma$  است و مقدار هر جریان  $f_{uv}$  حداکثر  $\beta\pi(u)\pi(v)$  است. پس  $\lambda_2 \leq 1 - \frac{1}{2m\beta\gamma}$  [۲۱].

<sup>3</sup> Sampling

<sup>4</sup> Lattice points

<sup>5</sup> Convex body

<sup>6</sup> Linear extensions

<sup>1</sup> Loading

<sup>2</sup> Shortcut

## ۱.۷. شمارش و حجم محاسبات

طرح کلی زیر برای حل تقریبی مسائل شمارشی که حاصل ضرب برآوردگر نامیده می‌شود در مواردی که نیاز به یافتن اندازه گروه‌ها است، در مرجع [۴۰] مطرح شده است.

قصده داریم عناصر مجموعه  $V$  را بشماریم. اندازه  $V$  برحسب اندازه واقعی مساله که  $k$  است، به صورت نمایی بزرگ می‌شود. فرض کنید زنجیری از زیرمجموعه‌های  $V_1, \dots, V_m$  به صورت  $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_m = V$  را می‌یابیم به طوری که برای هر  $i$ :  
(الف)  $|V_0|$  معلوم باشد (به طور معمول  $|V_0| = 1$  است).

(ب) کران‌های  $\frac{|V_{i+1}|}{|V_i|}$  چندجمله‌ای در  $k$  باشد.

(ج)  $m$  دارای کران چندجمله‌ای باشد.

(د) یک زیربرنامه<sup>۲</sup> برای تولید عناصر تصادفی با توزیع یکنواخت از مجموعه  $V_i$  برای هر  $1 \leq i \leq m$  داشته باشیم.

برآورد نسبت  $\frac{|V_{i+1}|}{|V_i|}$  را می‌توان با تولید تعدادی عناصر چندجمله‌ای از  $V_{i+1}$  و محاسبه تعداد اصابت‌ها به  $V_i$ ، به دست آورد. حاصل ضرب این برآوردها و  $|V_0|$ ، برآورد  $|V|$  را به دست می‌دهد. این طرح منجر به الگوریتم تقریبی زمان چندجمله‌ای تصادفی می‌شود (مشروط بر اینکه در (الف)، (ب)، (ج) و (د) صدق کند و زیربرنامه در (د)، چندجمله‌ای باشد).

مساله اصلی چگونگی تولید این عناصر تصادفی از  $V_i$  در زمان چندجمله‌ای است. این مساله را برای  $V_m = V$  بررسی می‌کنیم. تقریباً در تمام کاربردهای این روش هر  $V_i$  مانند  $V$  خواهد بود و لذا استدلال یکسانی بکار برده می‌شود که این پدیده خودتغییرپذیری<sup>۳</sup> نامیده می‌شود.

همان‌طور که در بالا ذکر شد، پرسه زدن تصادفی در این امر یک طرح کلی را ارائه می‌دهد. فرض کنید پرسه زدن تصادفی روی گراف همبند  $G = (V, E)$  انجام می‌شود، یعنی می‌توان برای هر راس مشخص یک همسایگی تصادفی یافت (در اغلب موارد راس‌ها دارای بیشینه درجه (چندجمله‌ای) کوچک هستند). با افزودن حلقه می‌توان گرافی منتظم و نادوبخشی ساخت. پس

می‌دانیم اگر بعد از تعداد زیادی قدم توقف کنیم، توزیع آخرین راس بسیار به توزیع یکنواخت نزدیک است. نتایج به دست آمده از نرخ آمیختگی مشخص می‌کند که چه مدت باید پرسه زدن را ادامه دهیم؛ اما به طور معمول یافتن یک برآوردگر خوب برای نرخ آمیختگی (روی رخنه‌های طیفی یا رسانایی) سخت‌ترین بخش کار است.

گراف  $G$  که دارای  $n$  راس با حداقل درجه  $n/2$  است را در نظر بگیرید. قصد داریم یک جورسازی کامل تصادفی روی گراف  $G$  با  $n$  راس ( $n$  فرد) به طور تقریباً یکنواخت تولید کنیم. بنابراین می‌خواهیم گرافی تعریف کنیم که راس‌های آن به طور کامل جورسازی شده‌اند و سپس روی این گراف به صورت تصادفی پرسه بزنیم. از آنجا که هیچ روش ساده‌ای برای گام برداشتن از یک جورسازی کامل به سمت دیگری، وجود ندارد؛ پس مجموعه مورد نظر را به مجموعه تمام جورسازی‌های کامل نزدیک، گسترش می‌دهیم (یعنی جورسازی‌ها با  $n/2 - 1$  یال). اگر جورسازی‌های کامل نزدیک دارای  $n/2 - 2$  یال مشترک باشند، آنها را با یک یال به هم وصل می‌کنیم و یک جورسازی کامل را به همه جورسازی‌های کامل نزدیک وصل می‌کنیم تا گراف  $H$  به دست آید. درجه‌های  $H$  دارای کران  $3n$  هستند. جهت منتظم‌سازی گراف  $H$  با درجه  $3n$ ، حلقه‌هایی به راس‌ها اضافه می‌کنیم.

حال می‌توانیم یک جریان چند منظوره بسازیم (بر اساس تبدیل اخیر، یک جورسازی دیگر مسیرهای متناوب) تا نشان دهیم  $1/\Phi(H)$  دارای کران چندجمله‌ای  $n$  است. از این رو با تعداد چندجمله‌ای گام، می‌توانیم راس تصادفی از  $H$  با توزیع یکنواخت را ایجاد کنیم. اگر این راس، متناظر با جورسازی کامل باشد، توقف می‌کنیم، در غیر این صورت دوباره شروع می‌کنیم. با استفاده از فرضیه راجع به راس‌ها، می‌توان نشان داد تعداد جورسازی‌های کامل حداقل یک چندجمله‌ای کسری از تعداد جورسازی‌های کامل نزدیک است و بنابراین متوسط تعداد تکرارها، قبل از یک جورسازی کامل به دست آمده دارای کران چندجمله‌ای است.

از کاربردهای دیگر این روش می‌توان به شمارش تعداد گستره‌های

<sup>1</sup> Partial order

<sup>2</sup> Subroutine

<sup>3</sup> Self-reducibility

تطبیق داد، مشروط بر آن که چگونگی تولید نقطه تصادفی با توزیع یکنواخت در یک جسم محدب را بدانیم [۴۸]. به این منظور، از رویکردهای پرسه زدن تصادفی استفاده می‌کنیم. در اینجا برخی اشکال‌های تکنیکی وجود دارد، زیرا مجموعه نقاط در جسم محدب، بی‌نهایت است. یا می‌توان یک فضای به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته و یک نقطه تصادفی از آن فضا در  $K$  تولید کرد، یا مفاهیم و روش‌های بحث شده در بالا را برای مواردی که مجموعه‌های زیربنایی آنها بی‌نهایت هستند، گسترش داد. هر دو پیشنهاد معقول هستند، پیشنهاد دوم پیچیده‌تر است اما منجر به استدلال‌های واضح در رابطه با نرخ آمیختگی می‌شود.

پرسه زدن تصادفی را به این صورت تعریف می‌کنیم: اولین نقطه به صورت یکنواخت از گوی واحد  $B$  انتخاب می‌شود. برای  $v_t$  معلوم، نقطه تصادفی  $u$  به‌طور یکنواخت از گوی  $v_t + B'$  به مرکز  $v_t$  و شعاع  $\delta$  انتخاب می‌شود (در اینجا متغیر  $\delta$  وابسته به سطح الگوریتم است، اما به طور معمول برابر با مقدار تقریبی  $\varepsilon/\sqrt{n}$  است که  $\varepsilon$  مقدار ثابت مثبت کوچک است  $B' = \varepsilon B$ ). اگر  $u \in K$  باشد، آنگاه قرار می‌دهیم  $u = v_{t+1}$ ، در غیر این صورت نقطه جدید  $u$  را تولید و دوباره امتحان می‌کنیم. این روش متناظر با پرسه زدن تصادفی روی گرافی است که مجموعه راس‌های آن  $K$  است، با دو نقطه  $x, y \in K$  که با یک یال به یکدیگر متصل هستند، اگر و تنها اگر عبارت  $|x - y| \leq \delta$  برقرار باشد.

توزیع ایستای این پرسه زدن تصادفی، یکنواخت نیست اما دارای توزیعی است که تابع چگالی<sup>۱۱</sup> آن متناسب با درجه‌های  $\ell(x)$  است. کمیت  $\ell(x) = \text{vol}(K \cap (x + B'))/\text{vol}(B')$  که اغلب رسانایی موضعی<sup>۱۲</sup> در  $x$  نامیده می‌شود، احتمال حرکت، بعد از یک تک آزمایش است. اگر گام‌ها به اندازه کافی کوچک باشد، این کمیت در اغلب موارد  $K$ ، ثابت خواهد بود و خطای باقیمانده ناچیز است. دقت داشته باشید که در بعضی از سطوح الگوریتم به منظور منظم‌سازی، گراف با حلقه پر شده

خطی در یک ترتیب جزئی [۴۱] و جنگل‌ها<sup>۱</sup> در گراف‌های متراکم<sup>۲</sup> [۴۲]، اشاره کرد. برای جزییات بیشتر، طرح‌های تصادفی چندجمله‌ای کامل تقریبی برای مسائل عددی، مرجع [۴۳] را مشاهده کنید.

به عنوان مثالی دیگر مساله اساسی یافتن حجم یک جسم محدب را در نظر بگیرید. این حجم را می‌توان به صورت شهودی یا در بعضی موارد، با برهان ریاضی به دست آورد، با این حال یافتن آن مشکل است. در مراجع [۴۴] و [۴۵] ثابت شده که محاسبه یک چندبر  $n^3$ -بعدی بسیار پیچیده است. نتایج دیگر موجود در مرجع [۴۶] نشان می‌دهد برای جسم‌های محدب کلی (اوراکل تفکیک شده<sup>۴</sup>) حتی در محاسبه یک برآورد با کران خطای نسبی<sup>۵</sup>، زمان آن نمایی است و خطای نسبی هر برآورد قابل محاسبه زمان چندجمله‌ای با هر بُعد، به صورت نمایی رشد می‌کند [۴۷].

در ادامه تعمیم‌هایی از الگوریتم اصلی را بیان می‌کنیم؛ در اینجا برخی سهام‌ها و زمان اجرای آنها را برآورد می‌کنیم (تعداد نام‌های اوراکل‌های مختلف را شمارش کرده‌ایم؛ نماد  $O^*$  عامل‌های  $\log n$  را فرونشانده‌ایم که عامل‌ها وابسته به کران‌های خطا هستند).

در این قسمت ایده اصلی را شرح می‌دهیم. جسم محدب  $K$  در  $\mathbb{R}^n$  را در نظر بگیرید. با بهره‌گیری از رویکردهای معروف بهینه‌سازی<sup>۶</sup>، می‌توانیم فرض کنیم  $K$  شامل یک گوی واحد<sup>۷</sup> و یک گوی با شعاع<sup>۸</sup>  $R \leq n^{3/2}$  در درون آن است.  $K_i$  اشتراک<sup>۹</sup>  $K$  و یک گوی تقریباً ۰، با درجه  $2^{i/n}$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) وقتی  $m = \lceil 2n \log n \rceil$  در نظر بگیرید. پس  $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m$  و  $\text{vol}(K_0) \leq \text{vol}(K_{i+1})/\text{vol}(K_i) \leq 2$  بنابراین طرح کلی شمارش که در بالا شرح داده شده را می‌توان در اینجا

<sup>1</sup> Forests

<sup>2</sup> Dense graphs

<sup>3</sup> Polytope

<sup>4</sup> Separation oracle

<sup>5</sup> Relative error

<sup>6</sup> Optimization

<sup>7</sup> Unit ball

<sup>8</sup> Radius

<sup>9</sup> Intersection

<sup>10</sup> Center

<sup>11</sup> Density function

<sup>12</sup> Local conductance

در این مقال نمی‌گنجد. با ترفندهایی می‌توان  $R = O(\sqrt{n})$  را به دست آورد و بنابراین تعداد نقاط تصادفی تولید شده در  $K$  برابر با  $O^*(n^3)$  است. می‌توان  $O^*(n)$  نقطه را به منظور برآورد نسبت  $vol(K_i)/vol(K_{i+1})$  با دقت کافی تولید کرد.  $O^*(n)$  نقطه برای هر نسبت وجود دارد. در مجموع  $O^*(n^5)$  گام به دست می‌دهد (که آن را اوراکل می‌نامند).

تقریباً در تمام کاربردهای این روش، کلید حل مساله برآورد رسانایی گراف مناسب است. به طور معمول مساله سختی است و مساله‌های حل نشده بسیاری در این زمینه وجود دارد. برای مثال طبق آنچه که در ادامه بیان شده، آیا رسانایی گراف پایه‌ای ماتروید<sup>۳</sup> دارای کران چندجمله‌ای است؟ (یک گراف پایه‌ای ماتروید همه پایه‌های یک ماتروید  $(E, M)$  را به عنوان راس دارا است که دو به دو متصل هستند اگر و تنها اگر تفاوت تقارن آنها دارای ۲ عضو باشد).

## ۲.۷. صافی متروپلیس

در بسیاری از کاربردهای پرسه زدن تصادفی، نیاز به توزیعی داریم که عناصر تصادفی غیریکنواخت تولید کند. برای مثال ممکن است الگوریتم بهینه‌سازی تصادفی شده، روش تولید راه‌حل عملی تصادفی از توزیع احتمال  $Q$  را طرح کند که بسیار روی مساله بهینه یا نزدیک-بهینه<sup>۴</sup>، متمرکز است. به طور خاص تابع معین  $f: V \rightarrow \mathbb{R}_+$  را در نظر بگیرید، وقتی می‌خواهیم عناصر تصادفی را از توزیع متمرکز بر مسائل بهینه تولید کنیم، نیازی به بیشینه‌سازی  $f$  روی  $V$  نیست. اگر به جای آن نقطه تصادفی  $w$  را از توزیع  $Q$  که  $Q(v)$  متناسب با  $\exp(f(v)/T)$  و  $T$  عدد مثبت بسیار کوچک است، تولید کنیم؛ آنگاه با احتمال زیاد،  $w$ ،  $f$  را بیشینه می‌کند.

روش زیبای پرسه زدن تصادفی با صافی متروپلیس<sup>۵</sup> [۴۹]، راهی ساده برای اصلاح پرسه زدن تصادفی ارائه می‌دهد، به طوری که به هر توزیع احتمال معین همگرا است.

گراف  $G = (V, E)$  را در نظر بگیرید. برای سادگی فرض کنید

است. این دقیقاً به این معنی است که اگر  $u$  به صورت یکنواخت از  $v_t + B'$  انتخاب شود و  $u \notin K$ ، قرار می‌دهیم  $v_{t+1} = v_t$ ، بنابراین دو پرسه زدن تصادفی، مجموعه نقاط یکسانی را تولید می‌کنند، اما در یک مورد، در شمارش، تکرار خواهند شد. مشخص است برای توضیحی که در بالا آورده شده است، رسانایی می‌تواند با روشی زیبا به گونه‌ای که در قضیه ۱۵ در زیر بیان شده است برآورد شود، در حالی که در نمونه‌های دیگر، نقاط با رسانایی موضعی کوچک پیچیدگی بیشتری دارند. با کنار هم قرار دادن تمام این مباحث، یک طرح کلی از الگوریتم حجم<sup>۱</sup> خواهیم داشت که به تجزیه و تحلیل آن می‌پردازیم. مهم‌ترین بخش تحلیل، برآورد رسانایی پرسه زدن تصادفی در  $K$  است. اثبات قضیه زیر شامل استدلال‌های هندسی قابل ملاحظه، به خصوص نامساوی‌های هم‌محیطی<sup>۲</sup> است.

**قضیه ۱۵:** رسانایی پرسه زدن تصادفی در یک جسم محدب  $K$  با قطر  $D$ ، حداقل مقدار ثابت  $\delta/(\sqrt{n}D)$  است [۴۸]. این موضوع نتیجه می‌دهد که فقط  $O^*(nR^2/\delta^2)$  گام، برای تولید یک نقطه تصادفی در  $K$  لازم است.

قضیه ۱۵ پیشنهاد می‌دهد که باید اندازه گام را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم. در واقع با انتخاب  $\delta = R$  با یک قدم، یک نقطه تصادفی در  $K$  به دست می‌آید. مساله این است که اگر  $\delta$  بزرگ باشد، قبل از اینکه به نقطه بعدی برویم باید آزمایش‌های بسیار زیادی انجام دهیم. به راحتی می‌توانیم زمان انتظار را در یک پرسه زدن ایستا، محاسبه کنیم. یعنی متوسط تعداد نقاط  $u$  قبل از اینکه نقطه‌ای در  $K$  بیابیم برابر  $vol(K)/\int_K \ell(x)dx$  است. می‌توان ثابت کرد که این کمیت دارای کران بالای  $1/(1 - \delta\sqrt{n})$  است و از این رو اگر  $\delta$  کمتر از  $1/(2\sqrt{n})$  انتخاب شود، این مقدار برابر با  $O(1)$  است. به این معنی که تعداد آزمایش‌های ناموفق به اندازه یک عامل ثابت، از تعداد قدم‌ها در پرسه زدن تصادفی بیشتر است که این مقدار بسته به اندازه هر قدم،  $O^*(R^2n^2)$  است.

دستیابی به یک  $R$  به اندازه کافی کوچک، مساله‌ای مهم است اما

<sup>3</sup> Matroid basis graph

<sup>4</sup> Near-optimal

<sup>5</sup> Metropolis filter

<sup>1</sup> Volume algorithm

<sup>2</sup> Isoperimetric inequalities

**قضیه ۱۷:** در گراف همبند  $G$ ، اگر  $u$  و  $v$  دو نقطه غیرمجاور باشند و  $\{u, v\}$  مجموعه برشی نباشد، آنگاه یک همسایگی  $w$  برای  $u$  وجود دارد، به گونه‌ای که  $p(w, v) < p(u, v)$  [۲۱]. لذا اگر  $G$ ، ۳-همبند باشد، برای هر  $v$  که  $p(u, v)$  کمینه<sup>۳</sup> باشد، راس‌های  $u$  در همسایگی  $v$  هستند.

اکنون روش به دست آمده بر مبنای تولید درخت تصادفی فراگیر در یک گراف را شرح می‌دهیم، به طوری که هر درخت فراگیر دقیقاً با احتمال یکسان برگردانده شده است.

**قضیه ۱۸:** پرسه زدن تصادفی روی گراف  $G$  با نقطه آغازین  $u$  را در نظر بگیرید. برای هر راس متفاوت از  $u$ ، یالی را که برای اولین بار از آن وارد راس شده‌ایم، علامت بزنید. مجموعه یال‌های علامت‌گذاری شده<sup>۴</sup> را  $T$  می‌نامیم. با احتمال ۱،  $T$  یک درخت فراگیر است و هر درخت فراگیر با احتمال یکسان ایجاد می‌شود [۱۲].

البته فقط ادعای دوم نیاز به اثبات دارد، اما اهمیت زیادی ندارد. در ادامه برهانی بر حسب ایده اصلی جفت‌سازی آورده شده است، برای بررسی بیشتر مرجع [۳۶] را ببینید.

درخت فراگیر  $T$  با ریشه  $u$  را در نظر بگیرید. اگر  $uv \in E(G)$  باشد، یک یال (جهت‌دار) به هر درخت فراگیر  $T'$  با ریشه  $v$  رسم می‌کنیم که  $T'$  از  $T$  با حذف اولین یال روی مسیر  $v$  به  $u$  و افزودن یک یال  $uv$  به دست آمده است. گراف جهت‌دار حاصل را  $H$  می‌نامیم. به وضوح هر درخت با ریشه  $v$  دارای درجه ورودی و خروجی  $d(v)$  در  $H$  است و از این رو در توزیع ایستای پرسه زدن تصادفی روی  $H$ ، احتمال وجود درخت فراگیر با ریشه معین، متناسب با درجه ریشه است (در  $G$ ). اگر یک درخت فراگیر از این توزیع رسم کنیم و ریشه آن را ندانیم، می‌توانیم آن ریشه را از هر درخت فراگیر با احتمال یکسان، به دست آوریم.

مشاهداتی که پرسه زدن تصادفی روی  $G$  را به پرسه زدن تصادفی روی  $H$  القا می‌کند، به صورت زیر است: فرض کنید در راس  $v$  از گراف  $G$  و در راس  $(T, v)$  در  $H$  (که

گراف  $G$ ،  $d$ -منتظم است. همچنین  $F: V \rightarrow \mathbb{R}_+$  و  $v_0$  هر نقطه آغازین برای پرسه زدن تصادفی است.  $v_t$  راسی است که بعد از  $t$  قدم به آن می‌رسیم. یک همسایگی تصادفی  $u$  برای  $v_t$  انتخاب می‌کنیم. اگر  $F(u) \geq F(v_t)$  باشد به  $u$  می‌رویم، در غیر این صورت یک سکه اریب<sup>۱</sup> پرتاب کرده، با احتمال  $F(u)/F(v_t)$  به  $u$  رفته و با احتمال  $1 - F(u)/F(v_t)$  در  $v$  می‌مانیم.

واضح است که این شکل پرسه زدن تصادفی باز یک زنجیر مارکوف است، در واقع به راحتی می‌توان بررسی کرد که این زنجیر، زمان-برگشت‌پذیر نیز هست (و بنابراین می‌توان آن را یک پرسه زدن تصادفی روی گراف با یال وزن‌دار دانست). ویژگی جالبی را در ادامه شرح می‌دهیم.

**قضیه ۱۶:** توزیع ایستای  $Q_F$  از پرسه زدن تصادفی روی گراف  $G$ ، با فرمول  $Q_F(v) = \frac{F(v)}{\sum_{w \in V} F(w)}$ ، توسط تابع  $F$  صافی می‌شود [۴۹].

یکی از ویژگی‌های مهم دیگر این الگوریتم این است که برای انجام آن حتی نیاز به محاسبه احتمال‌های  $Q_F(v)$  نداریم، کافی است نسبت  $F(u)/F(v_t) = Q_F(u)/Q_F(v_t)$  را محاسبه کنیم. این ویژگی صافی متروپلیس در کاربردها نقش اساسی دارد.

### ۳.۷. قوانین توقف دقیق<sup>۲</sup>

این بحث را با یک موضوع جالب شروع می‌کنیم. **قاعده ۱:** مدار  $G$  به طول  $n$  با نقطه آغازین  $u$  را در نظر بگیرید. در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از  $u$ ، احتمال ملاقات همه راس‌ها قبل از اصابت به  $v$ ، برای هر  $u \neq v$  یکسان است. به وضوح اگر مدار را با یک گراف کامل جایگزین کنیم، نتیجه مشابهی به دست می‌آوریم و هیچ گراف دیگری این ویژگی را ندارد [۵۰]. این موضوع، از این نتیجه پیروی می‌کند که به صورت شهودی، آخرین راس ملاقات شده، با احتمال زیاد دورتر است تا اینکه نزدیک باشد. در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از  $u$ ، احتمال ملاقات تمام راس‌ها، قبل از ملاقات راس  $v$  را با  $p(u, v)$  نشان می‌دهیم.

<sup>3</sup> Minimal

<sup>4</sup> Marked edges

<sup>1</sup> Biased coin

<sup>2</sup> Exact stopping

$T$  یک درخت است) قرار داریم. اگر روی گراف  $G$  در طول یال  $vw$  حرکت کنیم، می‌توانیم با حذف اولین یال مسیر از  $w$  به  $v$  و افزودن یال  $vw$  به درخت فراگیر اخیر، به راس  $(T', w)$  در  $H$  منتقل شویم.

همچنین مشاهده می‌کنیم در مدت زمانی که در پرسه زدن تصادفی روی  $G$ ، همه راس‌ها را ملاقات کردیم (یا هر مدت زمان بعد از آن) درخت فراگیر حاضر روی  $H$  درختی به صورت آخرین راسی که در آن بوده‌ایم خواهد بود و ریشه آن نیز برابر با آخرین راس ملاقات شده خواهد بود. برای مرتبط‌سازی این شیوه با قضیه ۱۸، پرسه زدن تصادفی روی گراف  $G$  با  $N$  قدم را در نظر بگیرید (به طوری که  $N$  خیلی بزرگتر از زمان پوشش  $G$  است). تا زمانی که  $G$  گراف بدون جهت باشد، برگشت به عقب در پرسه زدن تصادفی مورد قبول است. اگر پرسه زدن تصادفی متناظری روی  $H$  انجام دهیم، با درخت ریشه‌دار<sup>۱</sup>  $(T, v_N)$  به پایان می‌رسد که این درخت، همان درختی است که برای اولین بار با پرسه زدن معکوس وارد آن شده‌ایم، مگر اینکه بدون ملاقات همه راس‌های  $G$  در  $N$  قدم، به  $v_0$  برگردیم. قرار دهید  $N \rightarrow \infty$ ، آنگاه متوسط احتمال به صفر میل کرده و توزیع  $(T, v_N)$  به توزیع ایستا روی  $H$ ، که برای  $v_N$  ثابت روی هر درخت فراگیر یکنواخت است، میل می‌کند. این موضوع، قضیه ۱۸ را ثابت می‌کند.

با مشاهده این قضیه، بدیهی است که بپرسیم آیا می‌توان خطای ناشی از عدم امکان ملاقات همه راس‌ها در  $N$  قدم را نادیده گرفت؟ این موضوع به راحتی قابل تشخیص است. از این رو شاید در بعضی موارد لازم است که پرسه زدن کمی طولانی‌تر باشد. به طور کلی، می‌توان در یک پرسه زدن تصادفی روی گراف مشخص (یا زنجیر مارکوف)، قاعده توقف را تعریف کرد. در هر پرسه زدن تصادفی روی یک گراف (با راس آغازین معلوم  $u$ )، قاعده توقف، «ایستادن» یا «حرکت» را تعیین می‌کند. بنابراین (الف) در نهایت با احتمال ۱ هر پرسه زدن تصادفی می‌ایستد و (ب) توزیع راسی که پرسه زدن تصادفی در آن توقف کرده، ایستا است. همچنین قاعده‌های توقف تصادفی که پرتاب سکه

چگونگی توقف را تعیین می‌کند را نیز شرح خواهیم داد. اولین مثال بالا نشان می‌دهد که در مدارها و گراف‌های کامل قاعده «آخرین راس ملاقات شده»<sup>۲</sup> پاسخی برای حل مساله ارائه می‌دهد (اگر بخواهیم شامل راس آغازین نیز باشد، باید در آن تغییراتی ایجاد کنیم). در مواردی شبیه مثال دوم قصد داریم زمان توقف<sup>۳</sup>  $N$  را از موارد قبلی مستقل سازیم: صرفاً قصد داریم بعد از ملاقات تمام راس‌های گراف  $G$  توقف کنیم، اما می‌خواهیم برگشت به عقب از آخرین راس را نیز به عنوان یک پرسه زدن تصادفی حفظ کنیم. در ادامه یک طرح کلی در رابطه با این مساله ارائه خواهیم داد.

البته باید مراقب باشیم و از قواعد بی‌اهمیت مثل تولید راس  $v$  از توزیع ایستا و یا توقف بعد از مشاهده راس  $v$  در بار اول پرهیز کنیم. هیچ شهودی برای رد این راه‌حل‌های بدیهی وجود ندارد اما باید قواعدی را که مورد استفاده کلی نیستند هدف گرفت، به خصوص از دانش پیشین<sup>۴</sup> در مورد توزیع ایستا استفاده نشود.

قواعد توقف تقریباً برای همه زنجیرهای مارکوف کلی وجود دارند. در مرجع [۵۱] یک الگوریتم تصادفی طرح می‌شود که یک عنصر از توزیع ایستا از زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر متناهی تولید می‌کند که فقط به یک وضعیت نیاز دارد و یک «جعبه سیاه»<sup>۵</sup> که وضعیت را به عنوان ورودی پذیرفته و یک گام از این وضعیت شبیه‌سازی<sup>۶</sup> کند. در مرجع [۵۲] یک قاعده توقف تصادفی ارائه می‌شود که تنها با دانستن تعداد وضعیت‌ها، یک عنصر از توزیع ایستا در هر زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر را تولید می‌کند. تحت فرض نادره‌ای بودن زنجیر، این قاعده قطعی است. برای آشنایی بیشتر با این نتیجه به بررسی مواردی که زنجیر مارکوف دو وضعیت دارد، می‌پردازیم. حالت‌های کلی (نه همه حالت‌ها) که ساختار بازگشتی دارد (شبیه به مرجع [۵۱]) در ادامه شرح داده شده است.

<sup>2</sup> Last node visited

<sup>3</sup> Stopping time

<sup>4</sup> Priori knowledge

<sup>5</sup> Black box

<sup>6</sup> Simulate

<sup>1</sup> Rooted tree

قدم‌ها دو برابر زمان آمیختگی  $\tau$  باشد. قصد داریم یک پرسه زدن تصادفی با  $\tau$  گام شروع کنیم، به این منظور یک سکه اریب پرتاب می‌کنیم، با احتمال  $\pi(v_\tau)/2P_\tau(v_\tau)$  توقف کرده و با احتمال  $1 - \pi(v_\tau)/2P_\tau(v_\tau)$  وضعیت‌های قبل را فراموش کرده و از  $v_\tau$  یک پرسه زدن تصادفی به طول  $\tau$  شروع می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید احتمال اینکه بعد از  $k$  دوره در  $v$  توقف کنیم برابر  $2^{-k}\pi(v)$  است که به  $\pi(v)$  اضافه می‌شود. همچنین متوسط تعداد قدم‌ها  $2\tau$  است.

قاعده آستانه<sup>۱</sup> یک نوع (به نسبت) ساده از قاعده توقف است. این قاعده با تابع  $t: V \rightarrow \mathbb{R}_+$  مشخص می‌شود که وابسته به نقطه آغازین  $v_0$  است و به صورت زیر عمل می‌کند:

- اگر  $t(v_k) \leq k$  توقف می‌کنیم؛
- اگر  $t(v_k) \geq k + 1$  حرکت می‌کنیم؛
- اگر  $k < t(v_k) < k + 1$  باشد یک سکه اریب پرتاب کرده و با احتمال  $t(v_k) - k$  حرکت می‌کنیم اما با احتمال  $k + 1 - t(v_k)$  می‌ایستیم.

متوسط تعداد قدم‌ها برای قاعده آستانه بهینه با نقطه آغازین  $v$  برابر با:

$$\tau^* = \max_u H(u, v) - \sum_u \pi(u) H(u, v) \quad (121)$$

است. طبق شرح قاعده توقف با استفاده از زمان آمیختگی نتیجه می‌شود که  $\tau^* \leq 2\tau$ ، زیرا در تعریف زمان آمیختگی  $\tau$ ، مقدار ثابت انتخابی دلخواه  $1/2$  وجود دارد در حالی که تعریف  $\tau^*$  «متعارف» است، بهتر است که کمیت  $\tau^*$  را زمان آمیختگی بنامیم. از آنجا که قاعده توقف بهینه دارای خواص خوبی است، انتظار می‌رود که اجرایی کارآمد داشته باشد. تابع آستانه به صورت چندجمله‌ای محاسبه می‌شود، اما به اندازه کافی خوب نیست، زیرا قصد داریم این قوانین را روی گراف‌هایی که به صورت نمایی بزرگ می‌شوند، اعمال کنیم. با این وجود شرح قوانین توقف ساده و قابل اجرا با متوسط زمان قابل قیاس که آمیختگی تقریبی روی گراف‌هایی که به صورت نمایی بزرگ می‌شوند را به دست می‌دهد، مورد توجه است.

دنباله  $v_0, v_1, v_2, \dots$  را یک زنجیر مارکوف نادره‌ای برگشت‌پذیر با وضعیت‌های  $\{u, v\}$  در نظر می‌گیریم. برگشت‌پذیری یعنی احتمال‌های انتقال  $p_{vu}$  و  $p_{uv}$  مثبت هستند. نادره‌ای بودن یعنی حداقل یکی از احتمال‌های  $p_{vv}$  و  $p_{uu}$  همیشه مثبت است. به راحتی می‌توان ایستایی توزیع‌های داده شده را بررسی کرد:

$$\pi(u) = \frac{p_{vu}}{p_{uv} + p_{vu}}, \pi(v) = \frac{p_{uv}}{p_{uv} + p_{vu}}. \quad (119)$$

قاعده توقف تصادفی که در ادامه بیان می‌کنیم می‌تواند بدون دانستن مقدار  $p_{ij}$  یا  $\pi(i)$  و فقط با مشاهده دنباله  $v_0, v_1, v_2, \dots$  یک عنصر تصادفی از  $\pi$  تولید می‌کند:

قاعده اول: پرتاب سکه اگر شیر آمد قرار می‌دهیم  $i = 0$ ؛ در غیر این صورت  $i$  را اولین اندیس برای هر  $v_i \neq v_0$  قرار می‌دهیم. اگر  $v_{i+1} \neq v_i$  بود خروجی  $v_{i+1}$  است؛ وگرنه  $i + 1$  عنصر اول را نادیده گرفته و دوباره تکرار می‌کنیم.

اگر پرتاب سکه را دوست ندارید، می‌توانید برای شبیه‌سازی از خود زنجیر مارکوف استفاده کنید، این قاعده کاملاً قطعی است. قاعده دوم: اولین جفت  $i < j$  با ویژگی‌های زیر را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} v_j &= v_i, \\ v_{j+1} &\neq v_{i+1}, \\ v_{j+2} &\neq v_{j+1}. \end{aligned} \quad (120)$$

وضعیت  $v_i$  از تعداد دفعات فرد قبل از  $v_i$  رخ دهد.

بین  $v_i$  و  $v_j$  هیچ عنصری نباشد.

خروجی  $v_{j+2}$  است.

اگر این روش مبهم به نظر می‌رسد، به بخش‌های اول و دوم و ... توجه داشته باشید؛ با وقوع یک جفت با شاخص‌های اول تا چهارم،  $v_{j+1}$  با احتمال  $1/2$  می‌تواند هر یک از وضعیت‌ها باشد. طراحی قاعده توقف بالا زمان زیادی می‌برد. حتی نمی‌دانیم متوسط تعداد قدم‌ها در پرسه زدن تصادفی چندجمله‌ای در حداکثر زمان دسترسی چقدر است، چه رسد به زمان آمیختگی (که می‌دانیم ممکن است در  $n$  به صورت لگاریتمی باشد). از طرف دیگر اگر اجازه داشته باشیم از محاسبات کلی استفاده کنیم، می‌توان به قاعده توقفی دست یافت که به طور متوسط تعداد

<sup>1</sup> Threshold rule

## ۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله، متغیرهای پرسه زدن تصادفی از قبیل اولین زمان اصابت به یک راس در گراف، اولین (آخرین) زمان اصابت به (از) زیرمجموعه‌ای از مجموعه راس‌های گراف، میانگین زمان اصابت بیشینه، زمان دسترسی (زمان اصابت)، زمان رفت و آمد، زمان پوشش، زمان پوشش و بازگشت، نرخ آمیختگی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت و به کمک شاخه‌های نظریه گراف و فرایندهای تصادفی و همچنین ابزاری نظیر درخت فراگیر، مقادیر ویژه و کران‌های مناسب برای این متغیرها معرفی شد. مشاهده شد، در برخی متغیرهای پرسه زدن تصادفی و حتی محاسبه احتمال‌های متناظر، استفاده از تقارن می‌تواند کارساز باشد. اضافه کردن یک پال به گراف و تغییر در برخی متغیرهای پرسه زدن تصادفی از مطالب دیگری بود که مورد بررسی قرار گرفت. یکی از کاربردهای کران زمان پوشش و زمان رفت و آمد در شاخه علوم کامپیوتر به ویژه مدیریت رمزگذاری برای شبکه محاسبات است. در این حالت، پس از شروع همزمان دو پرسه زدن تصادفی روی یک گراف، مدت زمانی که طول می‌کشد تا آن دو پرسه زدن به یکدیگر برخورد کنند و همچنین ارائه روشی برای جلوگیری از تصادف تا حد ممکن، دو مقوله پژوهشی قابل توجه برای محققان هستند. طرح رمزگذاری مجوزی برای حمل پردازنده آن، برای انجام برخی از امور است و در هر زمان فقط یک پردازشگر آن را حمل می‌کند. در اینجا، هدف یافتن متوسط زمان در حالتی است که دو پردازشگر با چند اختلاف، رمزگذاری را برعهده داشته و به طور تصادفی از آن عبور کرده تا به دو رمز برخورد کنند و پس از آن سامانه به حالت نرمال باز خواهد گشت. نظر به اینکه ماتریس احتمال‌های انتقال به جز حالتی که گراف منتظم است، یک ماتریس متقارن نیست، می‌توان آن را با روش‌های موجود در شاخه جبر خطی، به یک ماتریس متقارن تبدیل کرد و با استفاده از نظریه طیفی ماتریس‌ها و قضیه فروبینیوس-پیرون نشان داد که توزیع حدی زنجیر مارکوف به مقدار آغازین وابسته نیست و همچنین حد ماتریس احتمال‌های انتقال چندمرحله‌ای برای تعداد مراحل زیاد به یک ماتریس

تصادفی میل می‌کند که سطرهای آن توزیع ایستای زنجیر هستند. در ادامه، مطالعه عمیق‌تری در روابط بین پرسه زدن تصادفی و طیف‌ها با استخراج از رویکرد مقادیر ویژه و فرمول‌های طیفی برای محاسبه زمان دسترسی و زمان رفت و آمد و همچنین یافتن کران برای این متغیرها، آغاز گردیده و ثابت شد دسترسی به هدف‌های دورتر، سخت‌تر است. رویکرد مقادیر ویژه در نرخ آمیختگی نیز کاربرد دارد که در این مقاله به این مهم پرداخته شد. در ادامه، گراف به عنوان یک شبکه الکتریکی در نظر گرفته شد، به طوری که هر راس، یک واحد مقاومت را نشان می‌دهد. اگر الکتریسیته در گراف جاری باشد، به گونه‌ای که از یک راس وارد و از راس دیگر خارج شود، با تعریف ولتاژ (به عنوان یک تابع هارمونیک) و پال‌های گراف (به صورت فزاینده متناسب با ثابت هوک واحد)، زمان رفت و آمد بین راس‌ها محاسبه شدند. به جز روش استفاده از مقادیر ویژه برای محاسبه نرخ آمیختگی، روش‌های نظیر جفت‌سازی و میزان رسانایی معرفی شدند. در انتها به مهم‌ترین کاربرد پرسه زدن تصادفی در طراحی الگوریتم‌های کاربردی و نمونه‌گیری با پرسه زدن تصادفی به ویژه شمارش و حجم محاسبات، صافی متروپلیس و قوانین توقف اشاره شد. در پایان مشاهده شد، برای گراف‌های همبند و نادوبخشی، توزیع زنجیر مارکوف به یک توزیع ایستا میل می‌کند. برای گراف‌های منتظم، این توزیع ایستا به صورت یکنواخت است و هر راس در پرسه زدن تصادفی، بعد از تعدادی گام، سرانجام به توزیع یکنواخت میل خواهد کرد.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافی ندارند.

- [1] P. Diaconis, Group Representations in Probability and Statistics, Lecture Notes-Monograph Series, vol. 11, pp. i-192, 1988.
- [2] G. Polya, "Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strabennetz," Math. Annalen., vol. 84, pp. 149-160, 1921.
- [3] P.G. Doyle and J.L. Snell, Random walks and Electric Networks, Mathematical Association of America, 1984.
- [4] P.E.T. Jorgensen and E.P.J. Pearse, "Resistance Boundaries of Infinite Networks," in Random Walks, Boundaries and Spectra. Progress in Probability, vol. 64, Springer, Basel, 2011, pp. 111-142, doi: 10.1007/978-3-0346-0244-0\_7.
- [5] M. Mohagheghi, "An approach to accelerate policy iteration for probabilistic model checking of Markov decision processes using machine learning," Soft Comput. J., vol. 11, no. 2, pp. 134-148, 2023, doi: 10.22052/scj.2023.243360.1029 [In Persian].
- [6] A. Yadollahi and H. Sabaghian-Bidgoli, "A simulation model for the propagation of Covid-19 virus based on the discrete-time Markov chain," Soft Comput. J., vol. 11, no. 2, pp. 88-103, 2023, doi: 10.22052/scj.2023.246527.1076 [In Persian].
- [7] A. Nachmias, "Random Walks and Electric Networks," in Planar Maps, Random Walks and Circle Packing, vol. 2243, Springer, Cham, pp. 11-31, 2020, doi: 10.1007/978-3-030-27968-4\_2.
- [8] D. Rasteiro, "Random Walks in Electric Networks," in Computational Intelligence and Decision Making, Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, vol. 61, Springer, Dordrecht, 2013, doi: 10.1007/978-94-007-4722-7\_24.
- [9] H. Chen, "Random walks and the effective resistance sum rules," Discret. Appl. Math., vol. 158, no. 15, pp. 1691-1700, 2010, doi: 10.1016/j.dam.2010.05.020.
- [10] H. Chen and F. Zhang, "The rapid mixing of random walks defined by an n-cube," Adv. Appl. Math., vol. 33, no. 1, pp. 136-145, 2004, doi: 10.1016/j.aam.2003.08.001.
- [11] S.M. Ross, Introduction to Probability Models, 12th Edition, Academic Press, 2019.
- [12] G. Grimmett, Probability on graphs, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2018, doi: 10.1017/9781108528986.
- [13] R.P. Dobrow, Introduction to Stochastic Processes with R, John Wiley & Sons. 2016, doi: 10.1002/9781118740712.
- [14] J.L. Gross, J. Yellen, and M. Anderson, Graph Theory and its Applications, Third Edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018.
- [15] D. Aldous and J.A. Fill, Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs, University of California, Berkeley, 2002.
- [16] F. Castella and B. Sericola, "Hitting times on the lollipop graph," Probab. Eng. Inf. Sci., pp. 1-34, 2025, doi: 10.1017/S0269964825000026.
- [17] P. Tetali, "Random walks and effective resistance of networks," J. Theor. Probab., vol. 4, pp. 101-109, 1991, doi: 10.1007/BF01046996.
- [18] A. Georgakopoulos and S. Wagner, "Hitting times, cover cost, and the wiener index of a tree," J. Graph Theory, vol. 84, no. 3, pp. 311-326, 2017, doi: 10.1002/jgt.22029.
- [19] L. Lovasz and P. Winkler, "Mixing of random walks and other diffusions on a graph," in Surveys in Combinatorics, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 119-154, 1995, doi: 10.1017/CBO9780511662096.007.
- [20] S. Hoory, N. Linial, and A. Wigderson, "Expander graphs and their applications," Bull. Amer. Math. Soc., vol. 43, pp. 439-561, 2006, doi: 10.1090/S0273-0979-06-01126-8.
- [21] D.A. Levin and Y. Peres, Markov chains and mixing times, 2nd Edition, American Mathematical Society, 2017.
- [22] S. Mehrjoo and F. Khunjush, "River Formation Dynamics based routing in Wireless Sensor Network," Soft Comput. J., vol. 3, no. 2, pp. 54-67, 2015, dor: 20.1001.1.23223707.1393.3.2.58.1 [In Persian].
- [23] G. Brightwell and P. Winkler, "Maximum hitting time for random walks on graphs," Random Struct. Algorithms, vol. 1, no. 3, pp. 263-276, 1990, doi: 10.1002/rsa.3240010303.

- [24] U. Feige, "A Tight Upper Bound on the Cover Time for Random Walks on Graphs," *Random Struct. Algorithms*, vol. 6, no. 1, pp. 51-54, 1995, doi: 10.1002/rsa.3240060106.
- [25] U. Feige, *Collecting Coupons on Trees and the Analysis of Random Walks*, Technical report CS93-20 of the Weizmann Institute, 1993.
- [26] D. Coppersmith, P. Tetali, and P. Winkler, "Collisions among random walks on a graph," *SIAM J. Discret. Math.*, vol. 6, no. 3, pp. 363-374, 1993, doi: 10.1137/0406029.
- [27] P. Diaconis, R.L. Graham, and J.A. Morrison, "Asymptotic analysis of a random walk on a hypercube with many dimensions," *Random Struct. Algorithms*, vol. 1, no. 1, pp. 51-72, 1990, doi: 10.1002/rsa.3240010105.
- [28] P. Matthews, "Covering problems for Brownian motion on spheres," *Ann. Probab.*, vol. 16, no. 1, pp. 189-199, 1998, doi: 10.1214/aop/1176991894.
- [29] J. Keilson, *Markov Chain Models-Rarity and Exponentiality*, Springer-Verlag, 1979.
- [30] F. Xia, J. Liu, H. Nie, Y. Fu, L. Wan, and X. Kong, "Random Walks: A Review of Algorithms and Applications," *IEEE Trans. Emerg. Top. Comput. Intell.*, vol. 4, no. 2, pp. 95-107, 2020, doi: 10.1109/TETCI.2019.2952908.
- [31] R.D. Nussbaum and S.M. Verduyn Lunel, "Generalizations of the Perron-Frobenius Theorem for Nonlinear Maps," *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 138, pp. 1-98, 1999, doi: 0.1090/memo/0659.
- [32] L. Lovasz, *Graphs and geometry*, American Mathematical Society, 2019.
- [33] J. Huang and S. Li, "On the normalised Laplacian spectrum, degree-Kirchhoff index and spanning trees of graphs," *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol. 91, no. 3, pp. 353-367, 2015, doi: 10.1017/S0004972715000027.
- [34] J. Zhou, C. Bu, H.-J. Lai, "Edge-disjoint spanning trees and forests of graphs," *Discret. Appl. Math.*, vol. 299, pp. 74-81, 2021, doi: 10.1016/j.dam.2021.04.024.
- [35] M. Kempton, "Non-Backtracking Random Walks and a Weighted Ihara's Theorem," *Open J. Discret. Math.*, vol. 6, no. 4, pp. 207-226, 2016, doi: 10.4236/ojdm.2016.64018.
- [36] L. Lovasz, *Combinatorial Problems and Exercises*, 2nd Edition, American Mathematical Society, 2007.
- [37] P. Diaconis and L. Saloff-Coste, "Comparison theorems for random walk on finite groups," *Ann. Probab.*, vol. 21, no. 4, pp. 2131-2156, 1993, doi: 10.1214/aop/1176989013.
- [38] L. Babai and M. Szegedy, "Local expansion of symmetrical graphs," *Comb. Probab. Comput.*, vol. 1, no. 1, pp. 1-11, 1992, doi: 10.1017/S0963548300000031.
- [39] S. Schmidt, "On the quantum symmetry of distance-transitive graphs," *Adv. Math.*, vol. 368, p. 107150, 2020, doi: 10.1016/j.aim.2020.107150.
- [40] L. Babai, "Monte Carlo algorithms in graph isomorphism testing," *Universite de Montral, Tech. Rep.*, pp. 79-110, 1979.
- [41] A. Karzanov and L. Khachiyan, "On the conductance of order Markov chains," *Order*, vol. 8, pp. 7-15, 1991, doi: 10.1007/BF00385809.
- [42] J.D. Annan, "A randomised approximation algorithm for counting the number of forests in dense graphs," *Comb. Probab. Comput.*, vol. 3, pp. 273-283, 1994, doi: 10.1017/S0963548300001188.
- [43] D. Welsh, *Complexity: Knots, Colourings and Countings*, Cambridge University Press, 1993, doi: 10.1017/CBO9780511752506.
- [44] M.E. Dyer and A.M. Frieze, "On the complexity of computing the volume of a Polyhedron," *SIAM J. Comput.*, vol. 17, no. 5, pp. 967-974, 1998, doi: 10.1137/0217060.
- [45] R. Schneider, "On a Formula for the Volume of Polytopes," in *Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics*, vol. 2266, Springer, Cham, 2021, doi: 10.1007/978-3-030-46762-3\_16.
- [46] G. Elekes, "A geometric inequality and the complexity of computing volume," *Discret. Comput. Geom.*, vol. 1, pp. 289-292, 1986, doi: 10.1007/BF02187701.
- [47] M. Grottschel, L. Lovasz, and A. Schrijver, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization, Algorithms and Combinatorics 2*, Springer 1988, doi: 10.1007/978-3-642-97881-4.
- [48] L. Lovasz and M. Simonovits, "Random walks in a convex body and an improved volume algorithm," *Random Struct. Algorithms*, vol. 4, no. 4, pp. 359-412, 1993, doi: 10.1002/rsa.3240040402.
- [49] N. Metropolis, A. Rosenblut, M. Rosenbluth, A.

- Teller, and E. Teller, "Equation of state calculations by fast computing machines," J. Chem. Phys., vol. 21, pp. 1087-1092, 1953, doi: 10.1063/1.1699114.
- [50] L. Lovasz and P. Winkler, "A note on the last new vertex visited by a random walk," J. Graph Theory, vol. 17, no. 5, pp. 593-596, 1993, doi: 10.1002/jgt.3190170505.
- [51] S. Asmussen, P.W. Glynn, and H. Thorisson, "Stationary detection in the initial transient problem," ACM Trans. Model. Comput. Simul., vol. 2, no. 2, pp. 130-157, 1992, doi: 10.1145/137926.137932.
- [52] L. Lovasz and P. Winkler, "Exact mixing in an unknown Markov chain," Electron. J. Comb., vol. 2, pp. 1-14, 1995, doi: 10.37236/1209.