پرسه زدن تصادفی روی گراف‌های هم‌بند و کاربرد آن در شبکه‌های الکترنیکی

مهدی شمس[1*]، استادیار، نام و غلامرضا حسامیان[2]، دانشیار

[1] گروه آمار – دانشکده علوم ریاضی ـ دانشگاه کاشان ـ کاشان ـ ایران ـ mehdishams@kashanu.ac.ir

[2] گروه آمار – دانشکده ریاضی ـ دانشگاه پیام نور ـ تهران ـ ایران ـ gh.hesamian@pnu.ac.ir

چکیده: در این مقاله پارامترهای پرسه زدن تصادفی تحلیل می‌شوند. سپس روابط مقادیر ویژه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این میان یک کران برای پارامترهای اصلی تعیین می‌شود. سپس کاربرد در شبکه‌های الکترونیکی شرح داده خواهد شد. همچنین کاربردهایی در علوم کامپیوتر به ویژه در مدیریت رمزگذاری برای شبکه محاسبات ذکر می‌شود. دست‌آوردهای فیزیکی برای به دست آوردن نتایجی در پرسه زدن تصادفی به کار برده می‌شوند. در پایان الگوریتم‌های کاربردی پرسه زدن تصادفی و نمونه‌گیری با پرسه زدن تصادفی بیان خواهند شد.

واژه‌های کلیدی: زنجیر مارکوف، توزیع ایستا، نرخ آمیختگی، تابع مولد احتمال، گراف هم‌بند.

* نویسنده مسئول، **mehdishams@kashanu.ac.ir**

Random walk on connected graphs and its application in electronic networks

Mehdi Shams [1*], Assistant Professor, Gholamreza Hesamian [2], Associate Professor

[1] Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Kashan, Kashan, Iran, mehdishams@kashanu.ac.ir

[2] Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran, gh.hesamian@pnu.ac.ir

Abstract: In this article, random walk parameters are analyzed. Then the relations of eigenvalues are examined. Meanwhile, a limit is set for the main parameters. Then the application in electronic networks will be described. Also, applications in computer science are mentioned, especially in encryption management for computing network. Physical achievements are used to obtain results in random walks. At the end, the applied algorithms of random walk and random walk sampling will be described.

Keywords: *Markov chain, stationary distribution, mixing rate, probability generating function, connected graph.*

*** Corresponding author, mehdishams@kashanu.ac.ir**

۱. مقدمه

پرسه زدن تصادفی روی گراف، یک دنباله تصادفی از رأس‌های گراف است که شروع حرکت از یک نقطه دلخواه بوده و سپس یک همسایگی از آن نقطه به تصادف انتخاب شده و بعد از حرکت به نقطه جدید، عمل مذکور تکرار می‌شود. پرسه زدن تصادفی یک زنجیر مارکوف متناهی برگشت‌پذیر است. در حقیقت، تفاوت زیادی بین پرسه زدن تصادفی روی گراف و زنجیر مارکوف متناهی وجود ندارد. اگر یال‌ها وزن‌دار باشند، همه زنجیرهای مارکوف را می‌توان به‌صورت یک پرسه زدن تصادفی روی گراف جهت‌دار نشان داد. به‌طور مشابه، زنجیر مارکوف برگشت‌پذیر را نیز می‌توان به‌صورت یک پرسه زدن تصادفی روی گراف بدون جهت و زنجیر مارکوف متقارن را به‌صورت پرسه زدن تصادفی روی گراف متقارن منتظم نشان داد. در این مقاله، نتایج انواع پرسه زدن تصادفی فرمول‌نویسی می‌شود.

پرسه زدن تصادفی در بسیاری از مدل‌های ریاضی و فیزیک وارد می‌شود. برای مثال بُر زدن یک دسته کارت را در نظر بگیرید. گرافی را در نظر بگیرید که رأس‌های آن جایگشت هر دسته باشد و هر زوجی که با هر بار بُر زدن آمده‌اند، مجاور یکدیگر باشند که این به نحوه بُر زدن وابسته است. تکرار این حرکات، یک پرسه زدن تصادفی روی گراف را تشکیل می‌دهد [۱۰]. حرکات براونی گرد و غبار در یک اتاق نیز یک پرسه زدن تصادفی است. در برخی موارد مدل‌های مکانیک آماری نیز شامل پرسه زدن تصادفی هستند. نظریه کلاسیک پرسه زدن تصادفی، فقط شامل پرسه زدن تصادفی ساده بود و در مورد گراف‌های نامتناهی مثل شبکه‌ها و مطالعه رفتار کیفی آن‌ها تحقیقاتی صورت نگرفته بود. برای مثال در نظریه کلاسیک سوالاتی نظیر این‌که آیا با احتمال یک، پرسه زدن تصادفی به نقطه شروع خود باز می‌گردد و آیا این برگشت در بی‌نهایت رخ می‌دهد، بی‌جواب مانده بود. پولیا [۴۱] ثابت می‌کند که در یک پرسه زدن تصادفی در شبکه $d-$بُعدی، اگر $d=2$ باشد در بی‌نهایت، و برای $d \geq 3$ با تعداد متناهی حرکت، به نقطه شروع خود باز می‌گردد [۱۴]. برای مشاهده نتایج بیشتر در پرسه زدن تصادفی روی گراف نامتناهی [۲۶] را ببینید. کاربردهای زنجیرهای مارکوف در هوش مصنوعی و راست‌آزمایی مدل‌سازی سیستم‌های کامپیوتری در [۵۱] و کاربرد آن‌ها در مدل‌سازی برای شبیه‌سازی انتشار ویروس در [۵۳] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین مطالعه مرجع [۱۰] در رابطه با پرسه زدن تصادفی و زنجیر مارکوف متناهی [۱۴] و در مورد پرسه زدن تصادفی و شبکه‌های الکترونیکی مطالعه [۳۹،۴۲] می‌تواند مفید باشد. شبکه‌های الکتریکی زبان متفاوتی را برای زنجیرهای مارکوف برگشت‌پذیر ارائه می‌کنند. این دیدگاه به دلیل بینش به دست آمده از قوانین فیزیکی شبکه‌های الکتریکی مفید است.

اخیراً، پرسه زدن تصادفی عمومی‌تر شده است، اما گراف‌های متناهی بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند و جنبه‌های کیفی آن مورد مطالعه بیشتری قرار گرفته است. برای مثال، قبل از بازگشت به نقطه شروع چقدر باید پرسه بزنیم؟ متوسط پرسه‌ها قبل ازاین‌که رأس مشخصی یا همه رأس‌ها را ببینیم؟ توزیع پرسه زدن تصادفی با چه نرخی به توزیع نهایی‌اش میل می‌کند؟

همان‌طور که مشخص است، نظریه پرسه زدن تصادفی به دیگر شاخه‌های نظریه گراف نزدیک است. ویژگی‌های اساسی پرسه زدن تصادفی توسط طیف گراف توضیح داده می‌شود، همچنین مقاومت الکتریکی شبکه‌های الکترونیکی با گراف‌ها مرتبط است [۷]. شیوه‌های متفاوتی برای تعریف گراف وجود دارد که اغلب با نام نوعی از انتشار توصیف می‌شود (شلیک تراشه، تعادل بار در شبکه‌های توزیع شده و...) که پارامترهای اساسی آن با پارامترهای پرسه زدن تصادفی که در بالا ذکر شد،

مشابه است. همه این روابط مفید هستند، هم وسیله‌ای برای مطالعه و هم فرصتی برای کاربرد پرسه زدن تصادفی را فراهم می‌کنند. با این حال در این مقاله، بیشتر توجه خود را به ارتباط مقادیر ویژه و شبکه‌های الکترونیکی معطوف می‌کنیم [۳۹،۴۲].

اخیراً مباحث پرسه زدن تصادفی توسط برنامه‌های الگوریتمی انجام می‌شود. پرسه زدن تصادفی می‌تواند به بخش‌های مبهم مجموعه‌های بزرگ، تولید عناصر تصادفی در مجموعه‌های بزرگ و پیچیده، مثل مجموعه نقاط مشبک در جسم محدب یا مجموعه بهترین جورسازی‌ها در یک گراف (که به نوبه خود می‌توانند در شمارش مجانبی در این اشیاء استفاده شوند) کاربرد داشته باشد. در این مقاله برخی ازاین کاربردها، با نتایج ساختاری بیشتر را مورد بررسی قرار می‌دهیم [۸].

بخش‌بندی مقاله به شرح ذیل است. در بخش دوم مفاهیم مقدماتی تعریف می‌شوند. بخش سوم پارامترهای پرسه زدن تصادفی یعنی زمان دسترسی یا زمان اصابت، زمان پوشش و نرخ آمیختگی را مورد تحلیل قرار می‌دهد. سپس یک کران برای پارامترهای اصلی تعیین می‌شود. در ادامه مباحثی چون تقارن و زمان دسترسی، زمان دسترسی و زمان پوشش و یکنواختی مطرح خواهند شد. در بخش چهارم روابط مقادیر ویژه به خصوص طیف‌ها و زمان دسترسی و همچنین طیف‌ها و تابع مولد مورد تحلیل قرار خواهند گرفت. بخش پنجم به ارتباط الکترونیکی می‌پردازد و روش‌ها و نتایجی از نظریه الکتریک و استاتیک که اغلب با فیزیک ادغام می‌شود برای به دست آوردن نتایجی در پرسه زدن تصادفی به کار برده می‌شود. در بخش ششم یکی از مهم‌ترین پارامترها در پرسه زدن تصادفی، یعنی نرخ آمیختگی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. ساده‌ترین راه محاسبه نرخ آمیختگی در زمان‌های چندجمله‌ای، استفاده از مقادیر ویژه است، اما نظر به این‌که برخی گراف‌ها به‌صورت نمایی بزرگ می‌شوند و محاسبه مقادیر ویژه به کمک جبر خطی ممکن نیست، بنابراین نیاز به تکنیک‌های جای‌گزینی چون جفت‌سازی و میزان رسانایی احساس می‌شود. در این بخش این تکنیک‌ها بررسی می‌شوند و سپس کاربردهایی در طراحی الگوریتم معرفی می‌شوند. در پایان در بخش هفتم بحث نمونه‌گیری با پرسه زدن تصادفی به خصوص شمارش و حجم محاسبات، صافی متروپلیس و قوانین توقف مورد تحلیل قرار می‌گیرند.

۲. مفاهیم و تعاریف

در این بخش به معرفی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز پرداخته می‌شود.

گراف همبند[1] $G=(V,E)$ را با $|V|=n$ رأس[2] و $|E|=m$ یال[3] در نظر بگیرید که در آن V مجموعه رأس‌ها (گره‌ها یا نقاط) و E مجموعه یال‌ها (پیونده یا خطوط) است. واژه هم‌بند به این معنی است که بین هر دو رأس متمایز گراف، یک مسیر[4] وجود داشته باشد. وقتی $ij\in E$، گوییم i و j در مجاورت[5] یا همسایگی[6] یکدیگر هستند و آن را به‌صورت $i \sim j$ نمایش می‌دهیم. با طرح این تعریف، درجه[7] (یا ظرفیت[8]) یک رأس i، یعنی تعداد همسایگی‌های این رأس (تعداد یال‌هایی که به این رأس برخورد می‌کنند) را با $d(i)$ نمایش می‌دهیم.

[1]connected graph

[2]node/vertice/knot

[3]edge

[4]path

[5]adjacency

[6]neighborhood

[7]degree

[8]capacity

اکنون پرسه زدن تصادفی[9] روی گراف G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۰]:

از رأس v_0 شروع می‌کنیم، اگر در قدم tام در رأس v_t باشیم، با احتمال[10] $1/d(v_t)$ به همسایه[11] v_t می‌رویم. به‌وضوح دنباله[12] رأس‌های تصادفی[13] $(v_t : t=0,1,...)$ یک زنجیر مارکوف[14] است، یعنی به شرط زمان حال، آینده و گذشته از هم مستقل[15] هستند. به‌عبارت دقیق‌تر برای هر $i, j, i_0, ..., i_{k-1} \in V$ داریم:

$$P(v_{k+1}=j \mid v_k=i, v_{k-1}=i_{k-1}, ... v_0=i_0)$$
$$=P(v_{k+1}=j \mid v_k=i)=p_{ij}.$$

ممکن است رأس v_0 ثابت و یا دارای توزیع آغازین[16] π_0 باشد. π_t را توزیع v_t در نظر می‌گیریم، به‌طوری که

$$\pi_t(i)=\mathrm{Pr}ob(v_t=i).$$

همچنین $P=(p_{ij})_{i,j\in V}$ را ماتریس احتمال‌های انتقال[17] این زنجیر مارکوف تعریف می‌کنیم که آن را ماتریس مارکوف[18] یا ماتریس تصادفی[19] نیز می‌نامند که دارای درایه‌های نامنفی است و برای هر $i \in V$، داریم $\sum_{j\in V} p_{ij}=1$ [۴۳]. بنابراین

$$p_{ij}=\frac{A_{ij}}{\sum_{j\in V} A_{ij}} =\begin{cases}\frac{1}{\sum_{j\in V} A_{ij}} & ij\in E\\ 0 & o.w.\end{cases} =\begin{cases}\frac{1}{d(i)} & ij\in E\\ 0 & o.w.\end{cases} \qquad (۱,۲)$$

که در آن $A_G=(A_{ij})$ با درایه‌ها

$$A_{ij}=\begin{cases}1 & ij\in E\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

را ماتریس مجاورت[20] G گویند. اگر D را ماتریس قطری[21] با درایه‌های قطری $(D)_{ii}=1/d(i)$ در نظر بگیرید، داریم $P=DA_G$. اگر G یک گراف d-منتظم[22] باشد (یعنی تمام رأس‌های آن درجه یکسانی برابر با d دارند)، می‌توان این قانون پرسه زدن را با معادله ساده $\pi_{t+1}=P^T\pi_t$ شرح داد (P^T ترانهاده ماتریس[23] P است) و توزیع نقطه tام را با چندجمله‌ای[24] روی $\mathbb{R}^v$ نمایش می‌دهیم [۲۱]. بنابراین $\pi_t=(P^T)^t\pi_0$، که در آن $(P^T)^t$ توان tام ماتریس P^T است. احتمال p^t_{ij} یعنی با شروع از i، با t قدم به نقطه j می‌رسیم که در درایه ijام ماتریس P^t نشان داده می‌شود [۴۳].

---

[9] random walk
[10] probability
[11] neighbor
[12] sequence
[13] random vertices
[14] Markov chain
[15] independent
[16] initial distribution
[17] matrix of transition probabilities
[18] Markov matrix
[19] Stochastic matrix
[20] adjacency matrix
[21] diagonal matrix
[22] d-regular
[23] transpose of a matrix
[24] multinomial

یک زنجیر مارکوف را تحویل‌ناپذیر یا تحویل‌ناشدنی[۲۵] گویند، هرگاه هر دو وضعیت فرایند در دسترس یکدیگر باشند، به‌عبارت دیگر برای هر i و j، عدد صحیح نامنفی t وجود داشته باشد به‌طوری که $p_{ij}^{(t)} > 0$ [۴۳]. اگر

$$T(i) = \left\{t \ge 1 \mid p_{ii}^{(t)} > 0\right\}$$

مجموعه مراحلی باشد که امکان بازگشت زنجیر مارکوف با شروع از وضعیت i به موقعیت اولیه وجود دارد، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک[۲۶] $T(i)$ را دوره[۲۷] زنجیر مارکوف گویند و آن را با $d_i = \gcd T(i)$ نشان می‌دهند. زنجیر مارکوفی که دوره آن برابر با $d_i = ۱$ باشد، را نادوره‌ای[۲۸] نامند [۴۳].

اگر گراف G منتظم باشد، زنجیر مارکوف متقارن[۲۹] است، به این معنی که احتمال انتقال به u وقتی در رأس v هستیم، با احتمال انتقال به v وقتی در u هستیم برابر است. برای گراف نامنتظم[۳۰] G، این ویژگی، با ویژگی برگشت‌پذیری[۳۱] جای‌گزین می‌شود. یک پرسه زدن تصادفی پس‌رو[۳۲]، یعنی دنباله پرسه زدن تصادفی $(v_0,v_1,...,v_t)$ که v_0 دارای توزیع آغازین π_0 است و هر v_t دارای توزیع π_t است را در نظر بگیرید. حال توزیع احتمال Q روی دنباله $(v_0,v_1,...,v_t)$ را به دست می‌آوریم. اگر دنباله را معکوس[۳۳] کنیم، Q' توزیع احتمال دنباله جدید خواهد بود. برگشت‌پذیری، یعنی توزیع احتمال Q' با هر توزیعی که از پرسه زدن تصادفی با شروع از π_t به دست می‌آید، برابر است [۱۰]. به‌عبارت دیگر پرسه زدن تصادفی $(v_0,v_1,...,v_t)$ برگشت‌پذیر است، هرگاه

$$(v_0,v_1,...,v_t) \overset{d}{=} (v_t,v_{t-1},...,v_0)$$

که در آن $\overset{d}{=}$ نشان‌دهنده هم‌توزیع[۳۴] بودن دو بردار تصادفی[۳۵] $(v_0,v_1,...,v_t)$ و $(v_t,v_{t-1},...,v_0)$ است و در این حالت برای همه مقادیر $i_0,i_1,...,i_n$ داریم:

$$P(v_0 = i_0, v_1 = i_1, ..., v_t = i_t) = P(v_0 = i_t, v_1 = i_{t-1} ..., v_t = i_0).$$

در حالت کلی، توزیع‌های $\pi_0,\pi_1,...$ با یکدیگر متفاوت‌اند. در گراف G گوییم توزیع π_0 ایستا[۳۶] (مانا یا پایا) است، اگر $\pi_1 = \pi_0$ باشد، یعنی توزیع آغازین و توزیع مرحله اول فرایند، هم‌توزیع هستند. در این صورت برای هر $t \ge 0$، $\pi_t = \pi_0$ است، یعنی توزیع فرایند در تمام مراحل با توزیع آغازین، یکسان است. به این پرسه زدن، پرسه زدن تصادفی ایستا (مانا) می‌گویند. شواهد نشان می‌دهد رأس‌هایی که اتصالات بیشتری دارند، با احتمال بالا ملاقات می‌شوند. یعنی، زمان گذرانده شده در رأس v وابسته به درجه v است. این موضوع، در نظر گرفتن یک توزیع روی رأس‌ها را که وابسته به درجه رأس‌هاست، پیشنهاد می‌کند. ازاین‌رو، اگر فرض کنیم توزیع ایستا متناسب با درجه رأس باشد، با یک محاسبه کوتاه می‌توان نشان داد که برای هر گراف G، توزیع $\pi(v) = \frac{d(v)}{2m}$ ایستاست، زیرا

[25]irreducible

[26]greatest common divisor

[27]period

[28]aperiodic

[29]symmetric

[30]irregular graph

[31]reversibility

[32]backward random walk

[33]reverse

[34]identically distributed

[35]random vector

[36]stationary

$$
\begin{aligned}
(\pi P)_v &= \sum_w \pi(w) P_{wv} \\
&= \sum_{w \backslash v} \left(\tfrac{\mathrm{d}(w)}{2m}\right) \tfrac{1}{\mathrm{d}(w)} \\
&= \tfrac{1}{2m} \sum_{w \backslash v} 1 \\
&= \tfrac{\mathrm{d}(v)}{2m} = \pi_v .
\end{aligned}
$$

به خصوص اگر گراف منتظم باشد، V دارای توزیع یکنواخت[37] است که این حقیقت را در انتهای همین بخش نشان خواهیم داد. به سادگی می‌توان نشان داد که توزیع ایستا، یکتاست. (در اینجا باید از گراف هم‌بند استفاده کنیم.)

زنجیر دو وضعیتی[38] با ماتریس احتمال‌های انتقال

$$
P = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}
\end{array}
$$

را می‌توان به عنوان پرسه زدن تصادفی روی گراف وزن‌دار[39] بیان کرد. به راحتی ثابت می‌شود توزیع ایستا برابر است با $\pi = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}\right)$.

به عنوان مثال دیگر، پرسه زدن تصادفی روی گراف n-دوری[40] (گراف همبندی که درجه هر رأس آن ۲ است)، با ماتریس احتمال‌های انتقال زیر را در نظر بگیرید:

$$
p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i+1 \mod n, \\ 1-p, & j = i-1 \mod n, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}
$$

این مثالی از یک زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر است و در حالتی که n زوج باشد، برای هر i،

$$
\begin{aligned}
d_i &= \gcd T(i) \\
&= \gcd \left\{ t \geq 1 \mid p_{ii}^{(t)} > 0 \right\} = 2
\end{aligned}
$$

و در حالتی که n فرد باشد، برای هر i،

$$
d_i = \gcd T(i) = ۱
$$

که در این حالت زنجیر مارکوف، نادوره‌ای هست. در این مثال، توزیع ایستا، یک توزیع یکنواخت است و پرسه زدن تصادفی برای $p = \frac{1}{2}$ برگشت‌پذیر زمان[41] است. پرسه زدن تصادفی ساده[42] روی گراف، برگشت‌پذیر زمان است، اگر i و j مجاور (همسایه) باشند. در این صورت

$$
\begin{aligned}
\pi(i) p_{ij} &= \left(\tfrac{d(i)}{2m}\right)\left(\tfrac{1}{d(i)}\right) \\
&= \tfrac{1}{2m} \\
&= \left(\tfrac{d(j)}{2m}\right)\left(\tfrac{1}{d(j)}\right) \\
&= \pi(j) p_{ji} .
\end{aligned}
$$

اگر i و j همسایه نباشند، $p_{ij} = p_{ji} = 0$ [۱۳]. برای $p \neq \frac{1}{2}$، پرسه زدن اریب[43] خواهد شد. برای مثال، اگر $p > \frac{1}{2}$، فراوانی[44] انتقال‌ها از i به $i+1$ بیشتر از فراوانی انتقال از $i+1$ به i خواهد بود.

پرسه زدن تصادفی ساده روی یک گراف حالت خاص از پرسه زدن تصادفی روی یک گراف وزن‌دار، با وزن‌های ۱ برای همه یال‌هاست. توزیع ایستا برای یک گراف وزن‌دار، همانند توزیع ایستای یک گراف غیروزن‌دار است. اگر v یک رأس باشد، گویند یک رأس واقع به v است، اگر v نقطه انتهایی یال باشد. گرافی را جهت‌دار[45] (سُودار یا دیگراف[46]) گویند،

[37]uniform distribution

[38]two-state chain

[39]weighted graph

[40]n-cyclic

[41]time-reversible

[42]simple random walk

[43]biased

[44]frequency

[45]directed graph

هرگاه یال‌های آن جهت و سو داشته باشند. پرسه زدن تصادفی روی گراف‌های جهت‌دار، برگشت‌پذیر زمان است. در حقیقت هر زنجیر مارکوف برگشت‌پذیر، می‌تواند به عنوان یک پرسه زدن تصادفی روی گراف جهت‌دار در نظر گرفته شود.

برای زنجیر مارکوف برگشت‌پذیر با ماتریس احتمال‌های انتقال P و توزیع ایستای π، با اختصاص دادن وزن‌های یال $w(i,j)=\pi(i)p_{ij}$، یک گراف جهت‌دار روی فضای وضعیت[47] (فضای حالت) می‌سازیم. با این انتخاب از وزن‌ها، پرسه زدن تصادفی روی گراف وزن‌دار از وضعیت i به j با احتمال زیر حرکت می‌کند:

$$\begin{aligned}\frac{w(i,j)}{\sum_v w(i,v)} &= \frac{\pi(i)p_{ij}}{\sum_v \pi(i)p_{iv}} \\ &= \frac{\pi(i)p_{ij}}{\pi(i)\sum_v p_{iv}} = p_{ij}.\end{aligned}$$

بر عکس، روی یک گراف وزن‌دار با تابع وزن $w(i,j)$، ماتریس احتمال‌های انتقال زنجیر مارکوف مربوطه با قرار دادن $p_{ij}=\frac{w(i,j)}{\sum_v w(i,v)}$ که در آن جمع روی همه همسایه‌های i است، به‌دست می‌آید. توزیع ایستا برابر است با

$$\pi(i)=\frac{\sum_y w(i,y)}{\sum_x\sum_y w(x,y)}.$$

می‌توان بررسی کرد که

$$\begin{aligned}\pi(i)p_{ij} &= \left(\frac{\sum_y w(i,y)}{\sum_x\sum_y w(x,y)}\right)\frac{w(i,j)}{\sum_y w(x,y)} \\ &= \frac{w(i,j)}{\sum_x\sum_y w(x,y)} \\ &= \left(\frac{\sum_y w(j,y)}{\sum_x\sum_y w(x,y)}\right)\frac{w(i,j)}{\sum_y w(j,y)} = \pi(j)p_{ji}\end{aligned}$$

بنابراین زنجیر، برگشت‌پذیر زمان است. به عنوان مثال، اگر زنجیر مارکوف، برگشت‌پذیر زمان دارای ماتریس احتمال‌های انتقال زیر باشد:

$$P=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 1/5 & 0 \\ 4/6 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\end{array}$$

گراف وزن‌دار مربوطه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

توزیع ایستا برای این زنجیر عبارتست از

$$\pi=(5/18, 6/18, 4/18, 3/18).$$

کمیت‌های $\pi(i)p_{ij}$ را در یک ماتریس (غیرتصادفی) قرار می دهیم:

$$R=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4/18 & 1/18 & 0 \\ 4/18 & 1/18 & 1/18 & 0 \\ 1/18 & 1/18 & 0 & 2/18 \\ 0 & 0 & 2/18 & 1/18 \end{pmatrix}\end{array}$$

که در آن $r_{ij}=w(i,j)=\pi(i)p_{ij}$. این ماتریس متقارن است. با ضرب کردن درایه‌ها در ۱۸ به‌طوری که همه وزن‌ها صحیح شوند، گراف وزن‌دار محاسبه می‌شود [۱۳].

گرافی را دوبخشی[48] گویند که رأس‌هایش به دو مجموعه مجزا به نحوی تقسیم شود که هر یال از آن گراف، یک رأس از مجموعه اول را به یک رأس از مجموعه دوم متصل کند. به‌طور معادل، گراف $G=(V,E)$ دوبخشی است، هرگاه بتوانیم V را به دو مجموعه مجزا U و W به گونه‌ای تقسیم کنیم که هیچ یالی در E دو رأس از U یا دو رأس از W را به هم وصل نکند [۲۳]. در بیان مهم‌ترین ویژگی‌های توزیع ایستا، می‌توان به این موضوع اشاره کرد که اگر گراف G دوبخشی

[46]digraph

[47]state space

[48]bipartite graph/bigraph

نباشد، وقتی $t \to \infty$، آن‌گاه توزیع v_t به توزیع ایستا میل خواهد کرد. (برهان آن را با استفاده از مقادیر ویژه[49] (ویژه‌مقدار) در آخر بخش چهارم بیان می‌کنیم.) در حالتی که $n>1$ این حقیقت برای گراف‌های دوبخشی برقرار نیست.

فرمول‌نویسی برگشت‌پذیری در توزیع ایستا بسیار ساده است. برای هر $i , j \in V$،

$$\pi(i)p_{ij} = \pi(j)p_{ji}$$

که به معادلات تعادل[50] نیز مشهور هستند. یعنی در پرسه زدن تصافی ایستا، انتقال از i به j با انتقال از j به i یکسان است. از (۱،۲) برای هر $i , j \in E$ داریم، $\pi(i)p_{ij} = \frac{1}{2m}$. پس می‌توان در هر یال، به هر جهت، با تکرار یکسان حرکت کرد. اگر در یک یال بوده و از آن بگذریم، متوسط تعداد مراحلی که در جهت یکسان طی می‌کنیم تا دوباره به آن یال برسیم، برابر با $2m$ است. این موضوع برای همه رأس‌ها یکسان است:

اگر در رأس i باشیم و از آن عبور کنیم، متوسط تعداد قدم‌هایی که باید طی کنیم تا دوباره به آن رأس بازگردیم برابر با $\frac{1}{\pi(i)} = \frac{2m}{d(i)}$ است. اگر گراف G منتظم باشد، زمان برگشت[51] برابر با n (تعداد رأس‌ها) است. برای اثبات این حقیقت به توجه به معادلات تعادل و معادله (۱،۲)، برای هر $i , j \in V$، $\frac{\pi(i)}{d(i)} = \frac{\pi(j)}{d(j)} = k$. اما نظر به این‌که جمع روی تمام مقادیر تابع احتمال برابر با ۱ است، داریم

$$1 = \sum_{i \in V} \pi(i) = k \sum_{i \in V} d(i) = 2mk$$

که از حل این معادله مقدار $k = \frac{1}{2m}$ محاسبه می‌شود. ازاین‌رو برای هر $i \in V$، $\frac{\pi(i)}{d(i)} = \frac{1}{2m}$. ازاین‌که برای گراف منتظم G با n رأس، برای هر $i \in V$، $d(i) = d$ و تعداد یال‌ها برابر است با $m = \frac{n\times d}{2}$، در این صورت برای هر $i \in V$، $\pi(i) = \frac{d}{2m} = \frac{1}{n}$. ازاین‌رو در گراف منتظم G، زمان برگشت برابر با $\frac{1}{\pi(i)} = n$ است.

در پایان، اگر معادلات تعادل برقرار باشند، یعنی برای هر $i , j \in V$، $\pi(i)p_{ij} = \pi(j)p_{ji}$، در این صورت برای هر $i \in V$:

$$\begin{aligned} \pi(i) &= \pi(i)\sum_{j\in V} p_{ij} \\ &= \sum_{j\in V} \pi(i)p_{ij} \\ &= \sum_{j\in V} \pi(j)p_{ji} \end{aligned}$$

که نشان‌دهنده ایستایی زنجیر مارکوف است.

۳. پارامترهای اصلی پرسه زدن تصادفی

اکنون به معرفی پارامترهای پرسه زدن تصادفی می‌پردازیم، که مهم‌ترین نقش را در شناخت این مدل‌ها ایفا می‌کنند.

الف) زنجیر مارکوف پرسه زدن تصادفی روی رأس‌های گراف $G = (V , E)$، یعنی $\{v_t\}_{t\in \mathbb{N}\cup\{0\}}$ را در نظر بگیرید. برای این فرایند تصادفی گسسته–زمان[52]، اولین زمان اصابت[53] به وضعیت i را به‌صورت

$$T_i = min\{t \geqslant 0 | v_t = i\}$$

تعریف می‌کنند [۱]. در حالت کلی‌تر، اگر A زیرمجموعه‌ای از فضای وضعیت باشد، اولین زمان اصابت به مجموعه A و آخرین زمان خروج[54] از مجموعه A را به ترتیب با

49 eigenvalue

50 balance equations

51 return time

52 discrete-time stochastic process

53 first hitting time

54 last exit time

$$T_A = min\{t \geqslant 0 \,|\, v_t \in A\}$$

و

$$L_A = max\{t \geqslant 0 \,|\, v_t \in A\}$$

نشان می‌دهند. در برخی تحقیقات نظیر [۴۶] از معیار میانگین زمان اصابت ماکسیمال[55] یعنی $max_{i,j} E_i(T_j)$ نیز استفاده می‌شود. زمان دسترسی[56] یا زمان اصابت[57] $H(i,j)$، متوسط تعداد قدم‌هایی است که با شروع از i طی می‌کنیم تا به j برسیم. به‌طور دقیق‌تر برای هر $i,j \in V$،

$$H(i,j) = E_i[T_j] = E[T_j \,|\, v_0 = i].$$

در حالت خاص، برای هر $i \in V$، $H_i(i) = 0$. زمان رفت‌وآمد[58]، به‌صورت مجموع

$$\begin{aligned}\kappa(i,j) &= H(i,j) + H(j,i)\\ &= E_i[T_j] + E_j[T_i]\\ &= E[T_j \,|\, v_0 = i] + E[T_i \,|\, v_0 = j]\end{aligned}$$

تعریف می‌شود، یعنی تعداد قدم‌های طی شده که با شروع از i، قبل از رسیدن به j، دوباره به i برسیم. روش‌هایی برای توضیح زمان دسترسی در زمان رفت‌وآمد وجود دارد که برای دیدن جزئیات می‌توانید به [۷،۴۷] مراجعه کنید. داریم:

$$H(i,j) = \tfrac{1}{2}\Big(\kappa(i,j) + \sum_u \pi(u)[\kappa(u,j) - \kappa(u,i)]\Big) \qquad (۱،۳)$$

در بخش چهارم و پنجم، فرمول (۱،۳) با مقادیر ویژه یا فرمول‌های مقاومت الکتریکی[59] ثابت می‌شود.

ب) زمان پوشش[60] (که از توزیع داده شده آغاز می‌شود) را متوسط تعداد قدم‌ها، برای رسیدن به هر رأس تعریف می‌کنیم. بدترین حالت زمانی است که هیچ رأسی برای شروع مشخص نشده باشد که در این حالت توزیع آغازین تعریف نشده است. در این حالت باید از رأسی شروع کنیم که زمان پوشش را ماکسیمم کند. زمان پوشش را به‌طور دقیق‌تر می‌توان به‌صورت زمان تصادفی بازدید همه فضای وضعیت یک زنجیر مارکوف تعریف کرد، یعنی $C = max_j T_j$. در بخش ۳،۳ و ۵،۳ در مورد این پارامترها بحث خواهیم کرد. زمان پوشش و بازگشت[61] نیز به‌صورت

$$C^+ = min\{t \geqslant C \,|\, v_t = v_0\}$$

تعریف می‌شود [۲۰].

ج) نرخ آمیختگی[62]، سرعت همگرایی[63] یک پرسه زدن تصادفی به توزیع حدی‌اش[64] را اندازه‌گیری می‌کند. وقتی توزیع ایستا موجود باشد، یک سوال اساسی این است که تعیین کنیم پرسه زدن تصادفی با چه سرعتی به توزیع ایستا نزدیک می‌شود. برای گرافی که دوبخشی نباشد، وقتی $t \to \infty$، $p_{ij}^{(t)} \to d_j/2m$. در این حالت نرخ آمیختگی به صورت

$$\mu = \limsup_{t\to\infty} \max_{i,j} \left| p_{ij}^{(t)} - \frac{d_j}{2m} \right|^{1/t}$$

تعریف می‌شود که با توجه به شرط ایستایی، این حد همواره موجود است [۳۶].

55maximal mean hitting time

56access time

57hitting time

58commute time

59electrical resistance formulas

60cover time

61cover and return time

62mixing rate

63convergence

64limiting distribution

برای گراف دوبخشی با بخش‌های $\{V_1,V_2\}$، توزیع v_t بین تقریباً متناسب با درجه V_1 و تقریباً متناسب با درجه V_2 نوسان می‌کند. گراف‌های دوبخشی نتایج مشابهی دارند، اما گراف‌ها در حالت‌های پیچیده‌تر، کمی با هم متفاوت هستند که این موارد را نادیده می‌گیریم.

زمان آمیختگی را می‌توان تعداد قدم‌ها، قبل ازاین‌که توزیع v_t به توزیع یکنواخت میل کند، دانست. به عنوان مثال این‌که چه مدت باید دسته کارت را بُر[65] بزنیم یک زمان آمیختگی است؟ این عدد تقریباً برابر با $(\log n)/(1-\mu)$ است. البته مقدار دقیق آن وابسته به میزان نزدیکی توزیع، به توزیع یکنواخت است. در این بخش تعاریف ابتدایی زمان آمیختگی را بیان کردیم، در بخش ششم به تعاریف پیشرفته آن می‌پردازیم.

ذکر این نکته لازم است که زمان آمیختگی ممکن است کمتر از تعداد رأس‌ها باشد. برای مثال در یک گراف گسترده[66] تعداد قدم‌ها برابر با $O(\log n)$ خواهد بود [۲۴]. نماد $O(\cdot)$ یک روش کارآمد برای ارزیابی عملکرد الگوریتم[67] است. در حقیقت در اینجا $O(\log n)$ نشان دهنده پیچیدگی[68] زمانی لگاریتمی الگوریتم است و زمان اجرا به صورت لگاریتمی رشد می‌کند. به صورت دقیق و ریاضی، می‌توان گفت تابع f از مرتبه $O(\log n)$ است، هرگاه اعداد حقیقی مانند M و x_0 وجود داشته باشد که برای هر $x \ge x_0$، $f(x) \le M \log n$.

مثال ۱،۳ برای شروع، زمان دسترسی را برای دو نقطه از مسیر رأس‌های $0,1,\dots,n-1$ به دست می‌آوریم. ابتدا مشاهده می‌کنیم که زمان دسترسی $H(k-1,k)$ یک واحد از متوسط زمان بازگشت پرسه زدن تصادفی، با $k+1$ رأس و با شروع از آخرین رأس، کمتر است. همان‌طور که اشاره شد، این زمان برگشت برابر با $2k$ است، پس $H(k-1,k)=2k-1$.

برای اثبات این حقیقت به‌صورت ریاضی، مجموعه $\Gamma(i)$ را مجموعه همسایه‌های رأس i تعریف کنید. اگر $i \neq j$ باشد، ازاین‌که در قدم اول، از رأس i به سمت همسایه v می‌رویم و پس از آن به j می‌رسیم، داریم:

$$\begin{aligned} H(i,j) &= 1+\sum_{v} p_{iv} H(v,j) \\ &= 1+\tfrac{1}{d(i)}\sum_{v\in\Gamma(i)} H(v,j). \end{aligned}$$

با قرار دادن $i=k-1$ و $j=k$ در تساوی بالا، به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} H(k-1,k) &= 1+\tfrac{1}{d(k-1)}\sum_{j\in\Gamma(k-1)} H(j,k) \\ &= 1+\tfrac{1}{2}[H(k,k) \\ &\quad +H(k-2,k)] \\ &= 1+\tfrac{1}{2}[H(k-2,k-1) \\ &\quad +H(k-1,k)] \end{aligned}$$

برای حل این رابطه بازگشتی[69]، قرار دهید $a_k = H(k-1,k)$ که منجر به معادله بازگشتی $a_k - a_{k-1} - 2 = 0$ خواهد شد. به راحتی می‌توان این معادله را حل کرد که جواب آن برابر است با

$$a_k = H(k-1,k) = 2k-1.$$

حال زمان دسترسی $H(i,k)$ با $0 \le i < k \le n$ را در نظر بگیرید. برای این‌که به k برسیم، ابتدا باید از رأس $k-1$ بگذریم که به‌طور متوسط تعداد قدم‌ها $H(i,k-1)$ خواهد بود. ازاینجا باید به k برویم که به‌طور متوسط تعداد قدم‌ها $2k-1$ خواهد بود. (رأس‌های بعد از kامین رأس نقشی در مسئله ندارند). نتیجه به‌صورت

$$H(i,k)=H(i,k-1)+2k-1$$

بیان می‌شود و از آن‌جا با استفاده ازاین‌که

[65] shuffle

[66] expander graph

[67] algorithm

[68] complexity

[69] recurrence relation

$$H(k-1,k)=2k-1$$

داریم:

$$\begin{aligned} H(i,k) &= H(i,k-1)+2k-1 \\ &= H(i,k-2)+(2k-3)+(2k-1) \\ &= \dots \\ &= H(i,i+1)+(2i+3)+\dots+(2k-1) \\ &= (2i+1)+(2i+3)+\dots+(2k-1) \\ &= k^2-i^2. \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که این فرمول بسیار شبیه به فرمول حرکت براونی[70] در زمان t و در فاصله $\sqrt{t}$ است [۴۳]. به روشی دیگر نیز می‌توان حقیقت بالا را ثابت کرد. برای این منظور با استفاده ازاین‌که $H(k-1,k)=2k-1$، داریم:

$$\begin{aligned} H(i,k) &= \sum_{j=i+1}^{k} H(j-1,j) \\ &= \sum_{j=1}^{k-i} H(j+i-1,j+i) \\ &= \sum_{j=1}^{k-i} \left(2(j+i)-1\right) \\ &= 2\,\tfrac{(k-i)(k-i+1)}{2}+(k-i)(2i-1) \\ &= (k-i)(k+i)=k^2-i^2. \end{aligned}$$

توجه کنید که در حالت خاص $H(0,k)=k^2$. ازاین‌رو، در گرافی با n رأس، با این فرض که از رأس ۰ شروع به حرکت کنیم، زمان پوشش برای هر مسیر همواره برابر با $(n-1)^2$ خواهد بود که این مقدار برای رسیدن به رأس انتهایی کافی است.

مشابه مثال ۱٫۳، زمان دسترسی میان دو رأس با فاصله k، در مداری[71] به طول n، برابر با $k(n-k)$ است. برای تعیین زمان پوشش در یک مدار، باید توجه کنید که این زمان، همان زمان مورد نیاز برای یک مسیر طولانی، با شروع از نقاط میانی، برای رسیدن به n است. برای این کار ابتدا باید به $n-1$ نقطه دیگر برسیم که به‌طور میانگین $f(n-1)$ قدم خواهد بود. در این نقطه، یک مسیر با $n-1$ رأس را پوشش داده‌ایم و بعد به یکی از نقاط نهایی می‌رویم. رسیدن به نقطه جدید، به معنی رسیدن به یکی از نقاط نهایی، در همسایگی دیگر نقاط انتهایی، در یک مسیر با $n+1$ رأس است. به‌وضوح این عمل شبیه به زمان دسترسی بین دو رأس متوالی در یک مدار به طول n است، که منجر به تشکیل رابطه بازگشتی

$$f(n)=f(n-1)+(n-1)$$

می‌شود و در نهایت $f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$.

مثال ۲٫۳ در مثالی دیگر می‌خواهیم زمان دسترسی و زمان پوشش را برای گراف کامل[72] با رأس‌های $\{0,\dots,n-1\}$ محاسبه کنیم (یک گراف را کامل گویند، هرگاه هر رأسش به تمامی رأس‌های دیگر به وسیله یک یال متصل باشد). برای یافتن زمان دسترسی و با فرض شروع از رأس ۰، باید $H(0,1)$ را به دست آوریم. به‌وضوح احتمال این‌که در گام t ام به رأس ۱ برسیم برابر با $\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{t-1}\frac{1}{n-1}$ و زمان مورد انتظار برای این رویداد برابر با

$$H(0,1)=\sum_{t=1}^{\infty} t\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{t-1}\frac{1}{n-1}=n-1$$

است. زمان پوشش برای گراف‌های کامل، کمی متفاوت و شبیه به مسئله جمع‌آوری کوپن[73] است. این مسئله بیان می‌کند اگر شما بخواهید n کوپن مختلف جمع‌آوری کنید و هر روز به‌صورت تصادفی یک کوپن برای شما فرستاده شود، چه مدت باید منتظر بمانید؟ (برای دیدن جزئیات بیشتر ر. ک. به [۳۰]).

در ابتدا τ_i را اولین زمانی قرار دهید که رأس i را ملاقات می‌کنیم. پس $\tau_1=0<\tau_2=1<\tau_3<\dots<\tau_n$. فاصله $\tau_{i+1}-\tau_i$ تعداد قدم‌هایی است که برای رسیدن به رأس جدید

[70] Brownian motion

[71] circuit

[72] complete graph

[73] coupon collector problem

باید طی کنیم که احتمال آن برابر با $(n-i)/(n-1)$ و از قدم‌های قبل مستقل است. ازاین‌رو $E(\tau_{i-1}-\tau_i)=\frac{n-1}{n-i}$. بنابراین زمان پوشش برابر است با

$$E(\tau_n)=\sum_{i=1}^{n-1}E(\tau_{i+1}-\tau_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-1}{n-i}\approx n\log n.$$

یک پرسه زدن تصادفی با ویژگی‌های نامناسب را می‌توان به‌صورت زیر شرح داد: در یک دسته با اندازه $n/2$، طول مسیر برای رسیدن به نقطه انتهایی $n/2$ باشد. i هر نقطه‌ای در این دسته و j را نقطه نهایی در مسیر قرار دهید. ازاین‌رو $H(i,j)=\Omega(n^3)$. مشابه با نماد $O(\cdot)$ که نشان‌دهنده کران بالای مجانبی است، نماد $\Omega(\cdot)$ یک کران پایین مجانبی را ارائه می‌دهد. به صورت دقیق و ریاضی می‌توان گفت، در اینجا تابع $H(i,j)$ از مرتبه $\Omega(n^3)$ است، یعنی اعداد حقیقی مانند M و x_0 وجود داشته باشد که برای هر $x\ge x_0$، $H(i,j)\ge Mn^3$. در حقیقت برای حرکت از i و رسیدن به u به‌طور میانگین $n/2-1$ قدم نیاز است، پس با احتمال $1-2/n$ به سمت رأس دیگری از دسته می‌رویم و انتظار داریم در $n/2$ زمان به همان نقطه بازگردیم، اما می‌توان این‌گونه استدلال کرد که در مسیر با طول $n/2$، اگر پرسه زدن تصادفی را از یکی از نقاط پایانی شروع کنیم، انتظار داریم در $n/2$ زمان به نقطه آغازین برگردیم. در هر بار $\Omega(n^2)$ قدم برای برگشت در مسیر نیاز است.

۱,۳. تعیین کران پارامترهای اصلی

این مبحث را با استدلال‌های ابتدایی آغاز می‌کنیم، ولی در بخش پنجم با استفاده از مقادیر ویژه فرمول‌های قوی‌تری ارائه می‌دهیم. همان‌طور که اشاره شد، انتظار داشتیم با گذشتن از یک یال، تعداد قدم برای این‌که دوباره به آن یال برسیم برابر با $2m$ باشد. به‌عبارت دیگر اگر از رأس i شروع به حرکت کنیم و رأس مجاور آن j باشد (i و j را همسایه نیز نامند)، زمان مورد انتظار برای این‌که دوباره در این جهت به یال ji برسیم برابر با $2m$ است. ازاین‌رو زمان رفت‌وآمد برای دو رأس ji، $2m$ خواهد بود. بنابراین زمان رفت‌وآمد بین دو رأس با فاصله r از یکدیگر، تقریباً برابر با $2mr<n^3$ است. اکنون به اثبات این حقیقت می‌پردازیم. برای هر دو رأس مجاور i و j، یعنی $ij\in E$ ثابت می‌کنیم

$$\kappa(i,j)=H(i,j)+H(j,i)\le 2m$$

می‌دانیم احتمال پیمایش همه یال‌ها، هم‌شانس[۷۴] با احتمال $\frac{1}{2m}$ است. ازاین‌رو، فراوانی مشاهده یک یال در پرسه زدن تصادفی برابر با $2m$ است. بر مبنای این شرط که پرسه زدن، یال ij را طی نموده، زمان مورد انتظار پیمایش بعدی این یال برابر با $2m$ است. اما نظر به خاصیت بی‌حافظگی[۷۵] ([۴۳]) پرسه زدن تصادفی، می‌توان ازاین شرط صرف‌نظر کرد. مسیر طی شده توسط پرسه زدن تصادفی، می‌تواند قبل عبور از یال ij، چندین بار از i گذر کند و به j برگردد. لذا ازاین‌که مقدار مورد انتظار[۷۶] طول تمام مسیر $2m$ است، ممکن است مسیر طی کمتر از $2m$ مرحله از i گذر کند و به j برگردد. بنابراین $\kappa(i,j)=H(i,j)+H(j,i)\le 2m$. به عنوان مثال در یک گراف دوری، با توجه به تقارن، نامساوی اخیر منجر به نامساوی

$$H(i,j)+H(j,i)=2H(i,j)\le 2m$$

و در پی آن $H(i,j)\le m$ خواهد شد.

در این مقاله، یک کران مشابه برای زمان پوشش توسط تشکیل یک درخت فراگیر[۷۷]، به دست می‌آوریم. درخت فراگیر برای یک گراف همبند وزن‌دار، درختی است که شامل همه رأس‌های گراف باشد، ولی فقط برخی یال‌های آن را شامل شود و بین تمام درخت‌ها با این ویژگی، مجموع وزن یال‌های آن،

---

[74] equally likely

[75] memoryless property

[76] expected value

[77] spanning tree

کمترین مقدار ممکن باشد. در مورد کاربرد درخت‌ها درشبکه حسگر بی‌سیم، مطالعه مرجع [۵۲] مفید است.

یکی از نتایج مهم کران‌دار بودن برخی پارامترهای پرسه زدن تصادفی به یک چندجمله‌ای است. ذکر این نکته ضروری است که ممکن است این موضوع برای گراف‌های جهت‌دار صحیح نباشد.

حدس می‌زنیم گراف با کمترین زمان پوشش، گراف کامل باشد (همان‌طور که در مثال ۲,۳ دیدیم زمان پوشش آن تقریباً برابر با $n \log n$ بود که از توزیع آغازین مستقل بود).

قضیه زیر برخی نتایج زمان پوشش و زمان رفت‌وآمد را به‌صورت خلاصه توضیح می‌دهد. کران بالای زمان پوشش و زمان دسترسی $O(n^3)$ است.

قضیه ۱,۳ الف) زمان دسترسی بین دو رأس از یک گراف با n رأس حداکثر برابر است با [۶] :

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{27}\right)n^3-\left(\frac{1}{9}\right)n^2+\left(\frac{2}{3}\right)n-1, & n\equiv 0 \pmod 3 \\ \left(\frac{4}{27}\right)n^3-\left(\frac{1}{9}\right)n^2+\left(\frac{2}{3}\right)n-\left(\frac{29}{27}\right), & n\equiv 1 \pmod 3 \\ \left(\frac{4}{27}\right)n^3-\left(\frac{1}{9}\right)n^2+\left(\frac{4}{9}\right)n-\left(\frac{13}{27}\right), & n\equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

و مقدار ماکسیمم برای $m=\left[\frac{۲(n-۱)}{۳}\right]$ اتفاق می‌افتد [۴۶].

ب) در یک گراف n رأسی، با شروع از هر رأس، زمان پوشش حداقل برابر با $(1-o(1))n\log n$ و حداکثر $(4/27+o(1))n^3$ است [۱۷،۲۰].

ج) زمان پوشش برای یک گراف منتظم با n رأس، حداکثر برابر با $2n^2$ است [۱۹].

بدیهی است که زمان رفت‌وآمد بین دو رأس برای هر گراف به n^3 کران‌دار است و زمان دسترسی برای گراف منتظم حداکثر $2n^2$ و زمان رفت‌وآمد بین دو رأس برای آن گراف به $4n^2$ کران‌دار است.

هیچ کران پایین نابدیهی روی زمان رفت‌وآمد در یک گراف بر حسب تعداد رأس‌ها نمی‌توان یافت: زمان رفت‌وآمد بین دو رأس در رده رنگی کوچک‌تر از یک گراف کامل دوبخشی $K_{2,n}$ برابر با ۸ است. با این حال برای تمام مقادیر u و v، $\kappa(u,v)\geq\frac{2m}{d(u)}$ (در گزاره ۲,۳ و همچنین نتیجه ۴,۳ توضیح داده شده است). در هر حالت زمان رفت‌وآمد بین دو رأس در یک گراف منتظم حداقل n است. وضعیت بدتر برای زمان دسترسی می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

این محدودیت حتی در گراف منتظم هم وجود دارد. گراف منتظمی (با هر درجه $d\geq 3$) را در نظر بگیرید که دارای رأس برشی[۷۸] u باشد. قرار دهید $V(G_1)\cap V(G_2)=\{u\}$ که $G=G_1\cup G_2$ و v را رأسی از G_1 و متفاوت از u در نظر بگیرید. زمان دسترسی از v به u برابر با زمان دسترسی از v به u در G_1 است، که مستقل از اندازه گراف است.

۲,۳. تقارن و زمان دسترسی

در هر گراف، حتی گراف منتظم، ممکن است زمان دسترسی رفتن از i به j، با زمان دسترسی رفتن از j به i متفاوت باشد. در حقیقت هیچ راهی برای ایجاد کران در یکی ازاین موارد توسط دیگری وجود ندارد. برای مثال در آخر بند اخیر (انتهای بخش ۱,۳)، در پرسه زدن از u به v، ممکن است با احتمال حداقل $1/d$ به یک رأس G_2 وارد شویم، پس باید آنقدر گام برداریم تا به u بازگردیم و زمان مورد انتظار برای این رخداد بیشتر از $|V(G_2)|$ است. بنابراین $\alpha(u,v)>|V(G_2)|$ می‌تواند یک مقدار به دلخواه بزرگ باشد که مستقل از $\alpha(u,v)$ است.

هنوز انتظار می‌رود که زمان برگشت‌پذیری به نوعی باید عکس این کمیت‌ها را نتیجه بدهد. در ادامه دو موضوع را

---

[78] cutnode

فرمول‌بندی کرده‌ایم که موضوع نخست را می‌توان به راحتی با «پرسه زدن پس‌رو» در پرسه زدن تصادفی بررسی کرد.

گزاره ۱٫۳ در پرسه زدن تصادفی در یک گراف، اگر u و v دارای درجه یکسانی باشند، احتمال این‌که با شروع از u قبل از بازگشت به u، v را ملاقات کنیم، با احتمال این‌که با شروع از v قبل از بازگشت به v، u را ملاقات کنیم، مساوی است. (اگر درجه u و v متفاوت باشد، نسبت احتمال‌ها به‌صورت $\pi(v)/\pi(u)=d(v)/d(u)$ خواهد بود.)

در ادامه می‌بینیم احتمال‌های داده شده در گزاره ۱٫۳ وابسته به زمان رفت‌وآمد $\kappa(u,v)$ است. توجه کنید که برهان گزاره ۱٫۳ به کمک گزاره ۲٫۳ بدیهی است، زیرا طبق آن احتمال این‌که با شروع از u (v) قبل از بازگشت به u (v)، v (u) را ملاقات کنیم برابر با

$$1/\big(\kappa(u,v)\pi(u)\big)$$

$$\big(1/\big(\kappa(v,u)\pi(v)\big)\big)$$

است. اما ازاین‌که

$$\kappa(u,v)=\kappa(v,u)$$

و همچنین به واسطه یکسان بودن درجه‌های u و v داریم $\pi(v)=\frac{d(v)}{2m}=\frac{d(u)}{2m}=\pi(u)$. بنابراین دو احتمال مذکور در گزاره، با هم برابر هستند و گزاره ۱٫۳ ثابت می‌شود.

گزاره ۲٫۳ در پرسه زدن تصادفی احتمال این‌که با شروع از u قبل از بازگشت دوباره به u، v را ملاقات کنیم برابر با $1/\big(\kappa(u,v)\pi(u)\big)$ است.

اثبات q را اندازه احتمال در این مسئله، τ_u را اولین دفعه که با شروع از u به u باز می‌گردیم و τ_{uv} را اولین دفعه که بعد از ملاقات v به u باز می‌گردیم در نظر بگیرید. می‌دانیم

$$E(\tau_u)=\frac{1}{\pi(u)}=\frac{2m}{d(u)}$$

و طبق تعریف $E(\tau_{uv})=\kappa(u,v)$. به‌وضوح $\tau_u\le\tau_{uv}$ و احتمال این‌که پرسه زدن تصادفی با شروع از u، وضعیت v را قبل از بازگشت به u ملاقات کند، برابر با $q=P(\tau_i=\tau_{ij})$ است. ازاین‌که $\tau_u\le\tau_{uv}$، داریم:

$$\begin{aligned}1-q&=P(\tau_u\neq\tau_{uv})\\&=P(\tau_u<\tau_{uv})+P(\tau_u>\tau_{uv})\\&=P(\tau_u<\tau_{uv}).\end{aligned}$$

علاوه‌بر آن اگر $\tau_u\le\tau_{uv}$، بعد ازاین‌که τ_u قدم اول را طی کردیم، باید از u به v برسیم و سپس به u باز گردیم. ازاین‌رو طبق خاصیت خطی بودن[79] امید ریاضی و همچنین استفاده از قانون امیدهای مکرر[80] [۴۳] داریم:

$$\begin{aligned}E(\tau_{uv})-E(\tau_u)&=E(\tau_{uv}-\tau_u)\\&=qE(\tau_{uv}-\tau_u\mid\tau_u=\tau_{uv})\\&\quad+(1-q)E(\tau_{uv}-\tau_u\mid\tau_u<\tau_{uv})\\&=0+(1-q)E(\tau_{uv})\\&=E(\tau_{uv})-qE(\tau_{uv}).\end{aligned}$$

بنابراین

$$q=\frac{E(\tau_u)}{E(\tau_{uv})}=\frac{2m}{d(u)\kappa(u,v)}=\frac{1}{\kappa(u,v)\pi(u)}.$$

خاصیت تقارن عمیق‌تر برای زمان دسترسی در [۹] شرح داده شده است. همچنین با مفاهیم ابتدایی، پرسه زدن و ملاقات در سه نقطه u و v و w را توضیح می‌دهد و برگشت‌پذیری آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهد، اما جزئیات آن ساده نیستند.

قضیه ۲٫۳ برای هر سه رأس u و v و w [۹]:

---

[79]linearity property

[80]law of iterated expectations

$$H(u,v)+H(v,w)+H(w,u)=$$
$$H(u,w)+H(w,v)+H(v,u).$$

یکی از نتایج مهم در رابطه با این ویژگی متقارن، به شرح زیر است:

نتیجه ۳,۳ رأس‌های هر گراف می‌تواند دارای رتبه[۸۱] باشد، به‌طوری که اگر u مقدم بر v باشد، آن‌گاه $H(u,v)\le H(v,u)$. چنین رتبه‌گذاری را می‌توان با ثابت نگه داشتن هر رأس t به دست آورد و رأس‌ها را طبق مقدار $H(u,t)-H(t,u)$ رتبه‌گذاری کرد.

اثبات اگر در یک گراف رتبه‌بندی شده u مقدم بر v باشد،

$$H(u,t)-H(t,u)\le H(v,t)-H(t,v)$$

و ازاین‌رو

$$H(u,t)+H(t,v)\le H(v,t)+H(t,u).$$

اکنون با توجه به قضیه ۲,۳ می‌توان این تساوی را به‌صورت $H(u,v)\le H(v,u)$ بازنویسی کرد.

رتبه‌گذاری یک گراف به واسطه رأس‌ها یکتا نیست. اما اگر رأس‌ها را افراز کنیم و u و v را در یک رده قرار دهیم، اگر $H(u,v)=H(v,u)$ (طبق قضیه ۲,۳)، آن‌گاه یک رتبه‌بندی خوش‌تعریف[۸۲] برای رده این تساوی، مستقل از رأس مرجع t به دست می‌آید. رأس‌های در پایین‌ترین رده "رسیدن به آن‌ها سخت و خروج از آن‌ها آسان است" و رأس‌های در بالاترین رده "رسیدن به آن‌ها آسان اما خروج از آن‌ها سخت است". بهترین فرمول‌بندی ازاین موضوع در نتیجه ۴,۳ بیان شده است.

خودریختی[۸۳] یک گراف، حالتی تقارن است که در آن گراف به خود نگاشته می‌شود، به‌طوری که اتصال بین رأس-یال حفظ می‌شود. بنابراین خودریختی گراف $G=(V,E)$، یک جایگشت[۸۴] مانند تابع یک‌به‌یک[۸۵] σ از رأس‌های V است به‌طوری که برای هر $(u,\ v)\in V\times V$، $uv\in E$ اگر و تنها اگر $\sigma(u)\sigma(v)\in E$ و این جایگشت، نوعی یک‌ریختی[۸۶] گراف $G=(V,E)$ به خودش است. با تعریف تمام خودریختی‌های یک گراف $G=(V,E)$، که آن را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم، دو خانواده مهم به نام‌های، گراف رأس-انتقالی[۸۷] و گراف یال-انتقالی[۸۸] تعریف می‌شوند. گراف رأس-انتقالی (یال-انتقالی)، یک گراف بدون جهت است که در آن هر رأس (یال) توسط یک خودریختی به هر رأس (یال) دیگر نگاشته می‌شود. به‌عبارت دیگر گراف $G=(V,E)$، رأس-انتقالی (یال-انتقالی) است، هرگاه گروه خودریختی‌های آن، یعنی $Aut(G)$ به ترتیب روی V (E) به‌صورت انتقالی عمل می‌کند، یعنی برای هر $i,j\in V$ ($i,j\in E$)، خودریختی $\sigma\in Aut(G)$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\sigma(i)=j$ [۱].

نتیجه ۴,۳ اگر یک گراف، دارای گروه خودریختی رأس-انتقالی باشد، به ازای هر i و j، $H(i,j)=H(j,i)$.

[81]rank

[82]well-defined

[83]automorphism

[84]permutation

[85]one to one function/injective function

[86]isomorphism

[87]node-transitive/vertice-transitive

[88]edge-transitive

اثبات با توجه به این‌که گراف، دارای گروه خودریختی رأس-انتقالی است، هر رأس توسط یک خودریختی به هر رأس دیگر نگاشته می‌شود و برای هر $i,j\in V$، یک خودریختی مانند $\sigma\in Aut(G)$ وجود دارد که $\sigma(i)=j$ و $\sigma^{-1}(j)=i$. ازاین‌رو طبق نتیجه ۳،۳، به ازای هر i و j، $H(i,j)\le H(j,i)$ و $H(j,i)\le H(i,j)$ که منجر به $H(i,j)=H(j,i)$ می‌شود.

۳،۳. زمان دسترسی و زمان پوشش

زمان دسترسی و زمان رفت‌وآمد در پرسه زدن تصادفی دارای ویژگی‌های خوب و روابط قابل محاسبه هستند، در صورتی که زمان پوشش به راحتی قابل محاسبه نیست. اما ارتباط تنگاتنگی بین زمان دسترسی و زمان پوشش وجود دارد که در [۱۱،۳۷] مطرح شده است.

قضیه ۳،۳ زمان پوشش از هر رأس، در گرافی با n رأس حداکثر $\left(1+(\frac{1}{2})+\ldots+(\frac{1}{n})\right)$ ضرب در ماکسیمم زمان دسترسی بین دو رأس و حداقل $\left(1+(\frac{1}{2})+\ldots+(\frac{1}{n})\right)$ ضرب در مینیمم زمان دسترسی بین دو رأس است [۳۰].

توسط ارائه لم زیر، برهانی ساده برای کران بالای ضعیف‌تر $2\log_2 n$ ضرب در ماکسیمم زمان دسترسی طرح می‌کنیم.

لم ۱،۳ b را متوسط تعداد گام‌ها که در یک پرسه زدن تصادفی بیش از نیمی از رأس‌ها را ملاقات کنیم و h را ماکسیمم زمان دسترسی میان دو رأس در نظر بگیرید. در این صورت $b\le 2h$.

اثبات برای سادگی فرض کنید $n=2k+1$ عددی فرد است. قرار دهید α_v زمانی که برای اولین بار v را ملاقات می‌کنیم و زمان β هنگامی که به بیش از نیمی از رأس‌ها رسیده باشیم، برابر با $k+1$امین از بین بزرگترین مقادیر α_v است. ازاین‌رو $\sum_v \alpha_v \ge (k+1)\beta$ و در پی آن

$$b=E(\beta)\le \tfrac{1}{k+1}\sum_v E(\alpha_v)\le \tfrac{n}{k+1}h<2h.$$

با استفاده از لم ۱،۳، اثبات قضیه ۳،۳ آسان می‌شود (ر. ک. به [۳۰]) در حقیقت، لم ۱،۳ بیان می‌کند، اگر با عوامل یکسان با $2h$ قدم بیش از نیمی از رأس‌ها را ملاقات کنیم، در $2h$ قدم بعدی نیم دیگر رأس‌ها را ملاقات خواهیم کرد و الی آخر.

۴،۳. یکنواختی

گراف G' را در نظر بگیرید که از اضافه کردن یک یال جدید ab به گراف G تشکیل شده است. از آن‌جایی که این گراف متراکم‌تر است، انتظار داریم که پرسه زدن تصادفی در آن، مدت کمتری طول بکشد و بنابراین زمان دسترسی، زمان رفت‌وآمد و زمان پوشش کاهش یابد، اما در واقعیت این‌گونه نیست.

در ابتدا به سادگی می‌توان دید که با اضافه شدن یک یال، زمان دسترسی به‌طور چشم‌گیری افزایش می‌یابد. مسیر G را با n رأس و با نقاط انتهایی در نظر بگیرید. فرض کنید $s=a$ و t همسایه یکتای s باشد. پس زمان دسترسی از s تا t برابر با یک است، از طرف دیگر اگر یال ab را اضافه کنیم، با احتمال $1/2$، باید گام‌های بیشتری برداریم، بنابراین زمان دسترسی از s تا t بیشتر از یک می‌شود. در حقیقت همان‌طور که خواهیم دید تا $n-1$ بالا می‌رود.

ویژگی زمان یکنواختی این‌گونه است که اگر یک یال به t اضافه شود، زمان دسترسی از s به t در G'، از G بزرگتر نمی‌شود.

زمان رفت‌وآمد که به‌طور کلی بهترین رفتار را دارد، یکنواخت نیست. برای مثال، زمان گردش بین دو رأس مخالف در یک ۴-دور برابر با ۸ است، اگر یک اتصال قطری بین دو

رأس ایجاد کنیم، زمان رفت‌وآمد به ۱۰ افزایش پیدا می‌کند. اما در ادامه خواهیم دید که تقریباً یکنواخت است. (در بخش پنجم به اثبات آن می‌پردازیم.)

قضیه ۴,۳ اگر گراف G' از اضافه کردن یک یال به گراف G ایجاد شود و دارای m یال باشد، زمان رفت‌وآمد بین دو رأس در G' حداکثر $1+1/m$ ضرب در زمان رفت‌وآمد در گراف G است. به‌عبارت دیگر کمیت $\kappa(s,t)/m$ کاهش پیدا نمی‌کند [۴۷].

به‌طور خلاصه در مورد یکی از روابطی که هر شخص به‌طور شهودی انتظار رخداد آن را دارد، بحث می‌کنیم:

"زمان دسترسی با افزایش فاصله افزایش پیدا می‌کند"، در حالی که چنین شهودی اغلب گمراه‌کننده است. نتایج زیر نشان می‌دهد که این مطلب در چه مواقعی صحیح است [۲۸].

قضیه ۵,۳ گراف G و $t \in V(G)$ در نظر بگیرید.

الف) اگر s را به‌طور یکنواخت از مجموعه همسایه‌های t انتخاب کنیم، مقدار مورد انتظار $H(s,t)$ دقیقاً $(2m/d(t))-1$ خواهد بود.

ب) اگر s را با یک توزیع ایستا روی V انتخاب کنیم، مقدار مورد انتظار $H(s,t)$ حداقل $\frac{2m}{d(t)}\left(1-\frac{d(t)}{2m}\right)^2$ است. بنابراین اگر روی $s \neq t$ شرطی کنیم، مقدار مورد انتظار $H(s,t)$ حداقل $(2m/d(t))-1$ است.

ج) اگر t را با یک توزیع ایستا روی V انتخاب کنیم، مقدار مورد انتظار $H(s,t)$ حداقل $n-2+1/n$ خواهد بود [۲۸].

قسمت (الف) بیان مجدد فرمول بازگشت است. برهان قسمت‌های (ب) و (ج) با استفاده از تکنیک‌های مقدار ویژه انجام می‌شود. به راحتی می‌توان از قسمت (ب) و (ج) نتیجه گرفت که $\max_{s,t} H(s,t) \geq n-1$.

نشان خواهیم داد که مقدار امید ریاضی در قسمت (ج) مستقل از s است (فرمول (۳,۴) را نگاه کنید).

۵,۳. کاربردهای کران زمان پوشش و زمان رفت‌وآمد

شاید اولین تکنیک‌های پرسه زدن تصادفی در علوم کامپیوتر[۸۹] به‌صورت زیر باشد [۴۹]:

گراف همبند d-منتظم $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید که $v_0 \in V(G)$ و فرض کنید در هر رأس در پایان یال، به رأسی برخورد می‌کنید که با شماره‌های $1,2,\ldots,d$ برچسب‌گذاری شده[۹۰] است. یک دنباله مسیر (در این گراف، نقطه شروع و نقاط برچسب‌گذاری شده) به‌صورت $(h_1,h_2,\ldots,h_t) \subseteq \{1,2,\ldots,d\}^t$ است، به گونه‌ای که اگر قدم زدن را از v_0 شروع کرده و در قدم iام رأسی را ترک کنیم که در یال h_i باشد؛ آن‌گاه تمام رأس‌ها را ملاقات کرده‌ایم. یک دنباله مسیر کلی (با پارامترهای d و n) دنباله‌ای است که برای هر گراف d-منتظم با n رأس و با هر گونه برچسب‌گذاری و هر نقطه شروع از تمام نقاط عبور می‌کند.

جالب است که چنین دنباله‌هایی وجود دارد و لازم نیست خیلی طولانی باشد که در قضیه زیر به این مهم می‌پردازیم.

قضیه ۶,۳ برای هر $d \geq 2$ و $n \geq 3$ یک گراف منتظم، مسیر کلی وجود دارد که طول آن $O(d^2 n^3 \log n)$ است.

اثبات. قرار دهید $t = 8dn^3 \log n$ و $H=(h_1,\ldots,h_t)$ که به‌طور تصادفی از $\{1,\ldots,d\}^t$ انتخاب شده است. در گراف

[۸۹] computer science

[۹۰] labelled

G با نقطه شروع مشخص و برچسب‌گذاری شده، H را پرسه زدن تصادفی تعریف می‌کنیم؛ بنابراین با احتمال p، H یک دنباله مسیر نخواهد بود، که با احتمال این‌که در قدم زدن به طول t همه رأس‌ها را ملاقات نکنیم، یکسان است. بر اساس قضیه ۱٫۳ مدت زمانی که در گراف منتظم، نیاز داریم تا همه رأس‌ها را ملاقات کنیم حداکثر $2n^2$ است. ازاین‌رو طبق نامساوی مارکوف[91] [۴۳]، احتمال این‌که بعد از $4n^2$ قدم هنوز تمام رأس‌ها را ملاقات نکرده باشیم کمتر از $1/2$ است. ازآنجا که ممکن است $4n^2$ قدم بعدی را پرسه زدن تصادفی دیگری در نظر بگیریم، احتمال این‌که بعد از t قدم همه رأس‌ها را ملاقات نکرده باشیم، کمتر از $2^{-t/(4n^2)} = n^{-2nd}$ است.

حال تعداد کل گراف‌های d–منتظم G با n رأس و با یال‌های برچسب‌گذاری شده کمتر از n^{dn} است (کمتر از n^d انتخاب در هر رأس) و احتمال این‌که H در این گراف‌ها، با چند نقطه شروع یک گراف مسیر نباشد، کمتر از $nn^{dn}n^{-2nd} < 1$ است. بنابراین حداقل یک دنباله به طول t دنباله مسیر کلی است.

نتایج موجود در [۹] در مورد حل چگونگی مسئله‌ای که در ادامه بیان می‌شود، بحث می‌کند:

هم‌زمان دو پرسه زدن تصادفی بر یک گراف را شروع می‌کنیم؛ چه مدت طول می‌کشد تا به یکدیگر برخورد کنند؟ بین دو پرسه زدن تصادفی اختلافاتی وجود دارد که ناشی از چگونگی پرسه زدن است. در اینجا بدترین حالت را در نظر می‌گیریم، که پرسه زدن تصادفی در هر زمان چگونه حرکت می‌کند، هدف این کار جلوگیری از تصادف تا حد ممکن است.

انگیزه این مسئله خود پایداری کردن طرح مدیریت رمزگذاری برای شبکه محاسبات توزیع شده است. طرح رمزگذاری مجوزی برای حمل پردازنده آن، برای انجام برخی از امور است و در هر زمان فقط یک پردازشگر آن را حمل می‌کند. فرض کنید دو پردازشگر با چند اختلاف، رمزگذاری را بر عهده دارند. آن‌ها به‌طور تصادفی از آن می‌گذرند تا به دو رمز برخورد کنند، پس از آن سامانه به حالت نرمال باز می‌گردد. این مدت زمان چقدر است؟

کمیت $M(u,v)$، متوسط تعداد قدم‌ها قبل ازاین‌که دو پرسه زدن تصادفی با شروع از نقاط u و v به یکدیگر برخورد کنند را مشخص می‌کند. واضح است که

$$M(u,v) \ge H(u,v)$$

(v ممکن است هیچ وقت حرکت نکند). در [۹] این نامساوی ثابت شده است. برای رأس w،

$$M(u,v) \le H(u,v) + H(v,w) - H(w,u).$$

بنابراین طبق گفته‌های اخیر، زمان برخورد $O(n^3)$ است.

۴. روابط مقادیر ویژه

به یاد دارید که احتمال p_{ij}^t رخدادی بود که با احتمال p، با شروع از i، بعد از t قدم تصادفی به j می‌رسیدیم، که یکی از درایه‌های ماتریس P^t بود. به نظر می‌رسد نظریه قوی طیفی[92] ماتریس‌ها می‌تواند به کار برده شود.

ماتریس P دارای بزرگترین مقدار ویژه 1، با مقدار ویژه متناظر چپ π و مقدار ویژه متناظر راست $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$ و یک بردار بر V است. در حقیقت $P^T \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$ این موضوع را

[91] Markov inequality

[92] spectral

بیان می‌کند که $\boldsymbol{\pi}$ یک توزیع ایستا است. در حالی که $P\mathbf{1}=\mathbf{1}$ بیان می‌کند، دقیقاً از هر رأس یک قدم برداشته شده است.

متأسفانه ماتریس P، متقارن نیست، مگر این‌که G منتظم باشد، اما به راحتی می‌توان آن را به حالت متقارن تبدیل کرد. می‌دانیم $P=DA$ به‌طوری که $A=A_G$ ماتریس مجاورت G و D ماتریس متقارن است، به گونه‌ای که درایه قطری i ام، $1/d(i)$ است. ماتریس $N=D^{\frac{1}{2}}AD^{\frac{1}{2}}=D^{-\frac{1}{2}}PD^{\frac{1}{2}}$ را در نظر بگیرید. این ماتریس متقارن است و می‌توان آن را به صورت طیفی $N=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T$ نوشت که $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots\ge\lambda_n$ مقادیر ویژه N و $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_n$ بردارهای ویژه[93] متناظر، با طول واحد هستند. با یک جای‌گذاری می‌توان نشان داد که بردار $\mathbf{w}$ با درایه‌های $w_i=\sqrt{d(i)}$ یک بردار ویژه با مقادیر ویژه $\mathbf{1}$ است. ازآنجا که این بردار ویژه مثبت است، از قضیه فروبینیوس-پیرون[94] [۴۰] پیروی می‌کند که $\lambda_1=1>\lambda_2\ge\dots\ge\lambda_n\ge-1$ و $\mathbf{v}_1=\left(1/\sqrt{2m}\right)\mathbf{w}$، یعنی $v_{1i}=\sqrt{d(i)/2m}=\sqrt{\pi(i)}$. همچنین ازاین الگو پیروی می‌کند که اگر گراف G، نادوبخشی[95] باشد، آن‌گاه $\lambda_n>-1$. حال داریم:

$$\begin{aligned}P^t&=D^{\frac{1}{2}}N^tD^{-\frac{1}{2}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^tD^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^TD^{-\frac{1}{2}}\\&=Q+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k^tD^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^TD^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

به‌طوری که $Q_{ij}=\pi(j)$. به‌عبارت دیگر

$$p_{ij}^t=\pi(j)+\sum_{k=2}^{n}\lambda_k^tv_{ki}v_{kj}\sqrt{\tfrac{d(j)}{d(i)}}. \qquad (۱,۴)$$

اگر G دوبخشی نباشد، برای $k=2,\dots,n$، $|\lambda_k|<1$ و ازاین‌رو $\lim_{t\to\infty}\lambda_k^t=0$ و در پی آن با استفاده از رابطه (۱,۴)، برای هر $i,j\in V$ داریم

$$\lim_{t\to\infty}P(v_t=j\,|\,v_0=i)=\lim_{t\to\infty}p_{ij}^t=\pi(j)$$

که نشان می‌دهد همگرایی به مقدار $\pi(j)$ به رأس آغازین i بستگی ندارد و در پی آن با کمک این تساوی داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\pi_t(j)&=\lim_{t\to\infty}P(v_t=j)\\&=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\in V}P(v_t=j\,|\,v_0=i)\times P(v_0=i)\\&=\sum_{i\in V}\lim_{t\to\infty}P(v_t=j\,|\,v_0=i)\times P(v_0=i)\\&=\pi(j)\sum_{i\in V}\pi_0(i)=\pi(j)\end{aligned}$$

در این حالت، با تعریف بردار توزیع $\mathbf{v}_t$ به‌صورت

$$\boldsymbol{\pi}_t=\left(\pi_t(j)\right)_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$$

که در آن $\pi_t(j)=\mathrm{Prob}(v_t=j)$ و بردار توزیع ایستای $\boldsymbol{\pi}=(\pi_j)_{j\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$، داریم $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{\pi}_t=\boldsymbol{\pi}$ که نشان می‌دهد توزیع حدی زنجیر به مقدار آغازین وابسته نیست. این حقیقت معادل با این است که $\lim_{t\to\infty}P^t=\Pi$ که در آن Π ماتریس تصادفی با سطرهای یکسان و برابر با $\boldsymbol{\pi}$ هست.

۱,۴. طیف‌ها و زمان دسترسی

مطالعه عمیق‌تری در روابط میان پرسه زدن تصادفی و طیف‌ها را با استخراج فرمول‌های طیفی برای زمان دسترسی، شروع می‌کنیم.

قضیه ۱,۴ زمان دسترسی از s به t برابر است با

$$H(s,t)=2m\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(\frac{v_{kt}^2}{d(t)}-\frac{v_{ks}v_{kt}}{\sqrt{d(s)d(t)}}\right).$$

---

93 eigenvectors

94 Frobenius–Perron Theorem

95 non–bipartite

اثبات. قرار دهید $H \in \mathbb{R}^{V\times V}$ که درایه‌های ماتریس مربع[96] $H=(H_{ij})=\big(H(i,j)\big)$، زمان دسترسی از i به j را مشخص می‌کند. در مثال ۱٫۳ مشاده کردیم:

$$\begin{aligned} H(i,j) &= 1+\sum\nolimits_v p_{iv}H(v,j) \\ &= 1+\tfrac{1}{d(i)}\sum\nolimits_{v\in\Gamma(i)}H(v,j). \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن ماتریس قطری $F=J+PH-H$، داریم

$$F^T\pi = J\,\boldsymbol{\pi}+H^T(P-I)^T\boldsymbol{\pi}=J\,\boldsymbol{\pi}=\mathbf{1}$$

که از آن‌جا $(F)_{ii}=\frac{1}{\pi(i)}=\frac{2m}{d(i)}$. بنابراین $F=2mD$ و در پی آن با جای‌گذاری در $F=J+PH-H$ داریم:

$$(I-P)H=J-2mD. \qquad (۲٫۴)$$

اکنون می‌خواهیم این معادله ماتریسی را برای H حل کنیم. البته از آن‌جا که $I-P$ یک ماتریس تکین[97] منحصربه‌فرد است، این کار ممکن نیست. در حقیقت با هر X مناسب (۲٫۴) (به جای H) هر ماتریس $X+\mathbf{1a}^T$، برای هر بردار $\mathbf{a}$ صدق می‌کند. اما همه این‌ها، شاخه‌ای از مبانی جبر خطی[98] است، بنابراین $\mathbf{a}$ با کمک رابطه $H(i,i)=0$، $i\in V$ قابل تعیین است. در این صورت، اگر حل معادله (۲٫۴) را داشته باشیم، می‌توانیم H را با تفریق درایه‌های قطری از هر ستون به دست آوریم.

در این مرحله، ماتریس $\mathbf{1\pi}^T$ را با P^* نشان می‌دهیم، یعنی $P^*_{ij}=\pi(j)$ (P^* حد P^t است، وقتی $t\to\infty$). با جای‌گذاری، می‌توان نشان داد که ماتریس

$$X=(I-P+P^*)^{-1}(J-2md)$$

در معادله (۲٫۴) صدق می‌کند. با قطری کردن ماتریس P حکم ثابت می‌شود. برای دیدن جزئیات، قرار دهید

$$Z=(I-P+\Pi)^{-1}.$$

ازاین‌رو

$$H=J-2mZD+\Pi H$$

و در پی آن نظر به این‌که $H(i,i)=0$، داریم:

$$H(i,j)=\begin{cases} 1-\frac{2m}{d(j)}Z_{ij}+(\boldsymbol{\pi}H)_j & i\neq j \\ 1-\frac{2m}{d(j)}Z_{jj}+(\boldsymbol{\pi}H)_j=0 & o.w. \end{cases}$$

از ضابطه دوم که همواره برابر صفر است بهره جسته و نتیجه می‌گیریم $1+(\boldsymbol{\pi}H)_j=\frac{2m}{d(j)}Z_{jj}$. به کمک این تساوی، زمان دسترسی بر حسب ماتریس Z به‌صورت

$$H(i,j)=2m\,\frac{Z_{jj}-Z_{ij}}{d(j)}$$

محاسبه می‌شود. با استفاده از روش قطری کردن در جبر خطی داریم

$$N=D^{-1/2}PD^{1/2}=D^{-1/2}DA_GD^{1/2}=D^{1/2}A_GD^{1/2}$$

که مقادیر ویژه یکسان با ماتریس P دارد که آن‌ها را با نمایش $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_n$ می‌دهیم. سپس ماتریس N را به‌صورت طیفی، یعنی $N=\sum_{r=1}^{n}\lambda_r\mathbf{v}_r^T\mathbf{v}_r$ می‌نویسیم که در آن بردارهای ویژه سطری $\mathbf{v}_r$، یکانی[99] و متعامد[100] هستند. لذا $\mathbf{w}=\left(\sqrt{d(1)},\ldots,\sqrt{d(n)}\right)$ یک بردار ویژه مثبت برای ماتریس N با مقدار ویژه ۱ است و ازاین‌رو حکم ثابت می‌شود.

برای آشنایی با کاربردهای قضیه ۱٫۴، خواننده تشویق می‌شود برهان ویژگی تقارن زمان دسترسی در قضیه ۲٫۳ را

[96]square matrix

[97]singular matrix

[98]linear algebra

[99]unitary

[100]orthogonal

انجام دهد و ساختاری برای زمان دسترسی برحسب زمان رفت‌وآمد (۱,۳) نیز بیان کند. اگر بخواهیم متوسط زمان دسترسی را برای هر t به دست آوریم، با استفاده از قضیه ۱,۴، برای توزیع ایستای $\pi(v)=\frac{d(v)}{2m}$ داریم:

$$\sum_{t\in V}\pi(t)H(s,t)=$$
$$\sum_{t\in V}\frac{d(t)}{2m}\times 2m\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(\frac{v_{kt}^2}{d(t)}-\frac{v_{ks}v_{kt}}{\sqrt{d(s)d(t)}}\right)=$$
$$\sum_{t\in V}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(v_{kt}^2-\frac{v_{ks}v_{kt}\sqrt{d(t)}}{\sqrt{d(s)}}\right)=$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(\sum_{t\in V}v_{kt}^2-v_{ks}\frac{1}{\sqrt{d(s)}}\cdot\sum_{t\in V}v_{kt}\sqrt{d(t)}\right)=$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(1-v_{ks}\frac{1}{\sqrt{d(s)}}\times 0\right)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}$$

که در تساوی ماقبل آخر ازاین حقیقت که $\mathbf{v}_k$ دارای طول واحد و برای $k\ge 2$ متعامد است، استفاده شد. لذا فرمول زیر را به دست می‌آوریم

$$\sum_{t}\pi(t)H(s,t)=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k} \qquad (۳,۴)$$

که این مقدار مستقل از رأس آغازین s است.

به عنوان یک نتیجه بدیهی از قضیه ۱,۴، فرمول زیر را مشابه فرمول قبل برای زمان رفت‌وآمد بیان می‌کنیم:

نتیجه ۱,۴ زمان رفت‌وآمد از s به t برابر است با

$$\kappa(s,t)=2m\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(\frac{v_{kt}}{\sqrt{d(t)}}-\frac{v_{ks}}{\sqrt{d(s)}}\right)^2.$$

اثبات. طبق فرمول $\kappa(i,j)=H(i,j)+H(j,i)$ و جای‌گذاری زمان‌های دسترسی متناظر از قضیه ۱,۴، داریم:

$$\kappa(i,j)=2m\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(\frac{v_{kt}^2}{d(t)}-\frac{v_{ks}v_{kt}}{\sqrt{d(s)d(t)}}\right)$$
$$+2m\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(\frac{v_{ks}^2}{d(s)}-\frac{v_{ks}v_{kt}}{\sqrt{d(s)d(t)}}\right)$$
$$=2m\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}\left(\frac{v_{kt}}{\sqrt{d(t)}}-\frac{v_{ks}}{\sqrt{d(s)}}\right)^2.$$

با استفاده از نتیجه ۱,۴ و این حقیقت که $\frac{1}{2}\le\frac{1}{1-\lambda_k}\le\frac{1}{1-\lambda_2}$ و تعامد ماتریس (v_{ks})، نتیجه ۲,۴ به دست می‌آید.

نتیجه ۲,۴ زمان رفت‌وآمد از s به t از بالا و پایین کران‌دار[101] است، یعنی:

$$m\left(\frac{1}{d(s)}+\frac{1}{d(t)}\right)\le\kappa(s,t)\le\frac{2m}{1-\lambda_2}\left(\frac{1}{d(s)}+\frac{1}{d(t)}\right).$$

اگر گراف منتظم باشد، کران پایین برابر n خواهد بود. اگر گراف گسترده باشد، به گونه‌ای که بتوانیم آن را به‌صورت یک گراف منتظم نشان دهیم که $1/(1-\lambda_2)=O(1)$، در این صورت زمان رفت‌وآمد بین هر جفت رأس $\Theta(n)$ است. نماد $\Theta(\cdot)$، تلفیق دو نماد $O(\cdot)$ و $\Omega(\cdot)$ است، یعنی وجود یک کران بالا و پایین مجانبی را تضمین می‌کند.. به صورت دقیق و ریاضی می‌توان گفت، در اینجا زمان رفت‌وآمد $\kappa(s,t)$ از مرتبه $\Theta(n)$ است، یعنی اعداد حقیقی مانند M_1، M_2 و x_0 وجود داشته باشد که برای هر $x\ge x_0$، $M_1n\le\kappa(s,t)\le M_2n$.

در این فرمول‌ها، ظاهر شدن $1-\lambda_k$ در مخرج نشان می‌دهد که برای یافتن کران‌های خوب در رخنه‌های طیفی[102] لازم است اختلاف $1-\lambda_2=\lambda_1-\lambda_2$ برقرار باشد. این یکی از عوامل مهم در مطالعه گراف‌ها است که در بخش ششم به بررسی آن می‌پردازیم.

به عنوان کاربردی دیگر، می‌توان زمان دسترسی بین دو رأس مخالف k وجهی Q_k را یافت. $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ و $\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$ را نشان دهنده دو رأس مخالف دارای k وجه در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌دانید بردار صحیح $\mathbf{v}_b$ از P (یا A) برای هر بردار $0-1$ که $b\in\{0,1\}^k$، به‌صورت

---

[101] bounded (from) above and below

[102] spectral gap

$(v_b)_x = (-1)^{b.x}$ تعریف می‌شود. بردار ویژه متناظر P برابر با $1-(2/k)b.\mathbf{1}$ است. با نرمال‌سازی[۱۰۳] $\mathbf{v}_b$ و جای‌گذاری در قضیه ۱,۴ داریم:

$$H(\mathbf{0,1}) = k\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\tfrac{1}{2j}\left(1-(-1)^j\right).$$

برای یافتن مقدار مجانبی این عبارت، با جای‌گذاری

$$\binom{k}{j} = \sum_{p=0}^{k-1}\binom{p}{j-1}$$

عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{0,1}) &= k\sum_{j=1}^{k}\sum_{p=0}^{k-1}\tfrac{1}{2j}\binom{p}{j-1}\left(1-(-1)^j\right) \\ &= k\sum_{p=0}^{k-1}\tfrac{1}{2(p+1)}\sum_{j=1}^{k}\binom{p}{j-1}\left(1-(-1)^j\right) \\ &= k\sum_{p=0}^{k-1}\tfrac{2^p}{p+1} \\ &= 2^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\tfrac{1}{2^j}\tfrac{k}{k-j} \sim 2^k. \end{aligned}$$

(به راحتی می‌توان دید که مقدار دقیق این عبارت همیشه بین 2^k و 2^{k+1} است.)

به عنوان کاربردی دیگر ثابت می‌کنیم که "دسترسی به هدف‌های دورتر سخت‌تر است" (قضیه ۵,۳ قسمت (ب)). استدلال شبیه به ۳,۴ است. داریم:

$$\begin{aligned} &\sum_s \pi(s)H(s,t) = \\ &\quad \sum_s\sum_{k=2}^{n}\tfrac{1}{1-\lambda_k}\left(v_{kt}^2\,\tfrac{d(s)}{d(t)} - v_{kt}v_{ks}\sqrt{\tfrac{d(s)}{d(t)}}\right) \end{aligned}$$

با استفاده دوباره ازاین موضوع که v_k، $k \geq 2$ به v_1 عمود است، داریم:

$$\sum_s \pi(s)H(s,t) = \tfrac{2m}{d(t)}\sum_{k=2}^{n}\tfrac{1}{1-\lambda_k}v_{kt}^2.$$

با یک نامعادله بین میانگین حسابی[۱۰۴] و هارمونیک (همساز)[۱۰۵] (با وزن v_{kt}^2) داریم

$$\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{1-\lambda_k}v_{kt}^2}{\sum_{k=2}^{n}v_{kt}^2} \geq \frac{\sum_{k=2}^{n}v_{kt}^2}{\sum_{k=2}^{n}(1-\lambda_k)v_{kt}^2}.$$

حال در اینجا

$$\sum_{k=2}^{n}v_{kt}^2 = \sum_{k=1}^{n}v_{kt}^2 - \pi(t) = 1-\pi(t)$$

و

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n}(1-\lambda_k)v_{kt}^2 &= \sum_{k=1}^{n}(1-\lambda_k)v_{kt}^2 \\ &= 1-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k v_{kt}^2 \\ &= 1-(N)_{t,t} = 1. \end{aligned}$$

بنابراین $\sum_s \pi(s)H(s,t) \geq \tfrac{1}{\pi(t)}\left(1-\pi(t)\right)^2$ که این ادعا را ثابت می‌کند.

شاید مهم‌ترین کاربرد تکنیک مقادیر ویژه در نرخ آمیختگی باشد که در بخش ششم در مورد آن بحث خواهیم کرد.

۱,۴. طیف‌ها و تابع مولد

ابتدا با معرفی تابع مولد احتمال[۱۰۶] در ارتباط با فرمول‌های طیفی اطلاعات بیشتری کسب می‌کنیم. تعریف می‌کنیم $F(x) = \sum_{t=0}^{\infty}x^t P^t = (I-xP)^{-1}$ که در این حالت $F_{ij}(x)$، درایه (i,j)ام این ماتریس، تابع مولد برای احتمال‌های p_{ij}^t است.

با استفاده ازاین تابع می‌توان از طریق تکنیک‌های استاندارد تابع مولد، احتمال‌های دیگر را شرح داد. به عنوان مثال، قرار

[۱۰۳] normalizing

[104] arithmetic mean/arithmetic average

[105] harmonic mean

[106] probability generating function

دهید q_{ij}^t احتمال این‌که در پرسه زدن تصادفی با شروع از i در t قدم، برای اولین بار به رأس j اصابت کنیم. واضح است که $p_{ij}^t = \sum_{s=0}^{t} q_{ij}^s p_{jj}^{t-s}$. می‌توان این رابطه را با استفاده از تابع مولد نیز نوشت. قرار دهید $G_{ij}(x) = \sum_{t=0}^{\infty} q_{ij}^t x^t$، پس

$$F_{ij}(x) = G_{ij}(x) F_{jj}(x).$$

بنابراین ماتریس $G(x) = \left(G_{ij}(x)\right)$ از $F(x)$ به دست می‌آید به گونه‌ای که درایه‌های روی قطر ۱ هستند.

می‌توانیم از تجزیه طیفی[۱۰۷] P برای دستیابی به فرمولی صریح‌تر استفاده کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} F_{ij}(x) &= \sqrt{\tfrac{d(j)}{d(i)}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(x\lambda_k\right)^t v_{ki} v_{kj} \\ &= \sqrt{\tfrac{d(j)}{d(i)}} \sum_{k=1}^{n} v_{ki} v_{kj} \tfrac{1}{1-x\lambda_k} \end{aligned}$$

با تابع مولد داریم:

$$G_{ij}(x) = \sqrt{\tfrac{d(j)}{d(i)}} \frac{\sum_{k=1}^{n} v_{ki} v_{kj} \tfrac{1}{1-x\lambda_k}}{\sum_{k=1}^{n} v_{kj}^2 \tfrac{1}{1-x\lambda_k}}.$$

اکنون برهان دیگری از قضیه ۱,۴ به کمک تابع مولد احتمال ارائه می‌دهیم. ازاین‌که $H(s,t) = G'_{st}(1)$. با محاسبه مشتقات بالاتر می‌توانیم فرمول‌های مشابهی (با پیچیدگی بیشتر) برای زمان‌های بالاتر در ملاقات رأس t برای اولین بار به دست آوریم.

۵. ارتباط الکتریکی

گراف هم‌بند $G = (V,E)$ و زیرمجموعه $S \subseteq V$ را در نظر بگیرید. تابع $\phi : V \to \mathbb{R}$ "تابع هارمونیک[۱۰۸] با مجموعه قطب‌های[۱۰۹] S" نام‌گذاری می‌شود، اگر

[107] spectral decomposition

$$\tfrac{1}{d(v)} \sum_{u \in \Gamma(v)} \phi(u) = \phi(v)$$

برای هر $v \notin S$ برقرار باشد (همچنین مجموعه S کران تابع هارمونیک نامیده می‌شود) [۳۰]. تعجب‌آور نیست که تابع هارمونیک نقش مهمی در مطالعه پرسه زدن تصادفی بازی می‌کند. میانگین را در تعریف می‌توان مقدار امید بعد از یک حرکت تفسیر کرد که در نظریه شبکه‌های الکتریکی[۱۱۰] و همچنین در استاتیک[۱۱۱] نیز آورده شده است. ارتباط میان این شاخه‌ها بسیار مورد استفاده واقع می‌شود. به خصوص روش‌ها و نتایجی از نظریه الکتریک و استاتیک که اغلب با فیزیک[۱۱۲] ادغام می‌شود را می‌توان برای به دست آوردن نتایجی در پرسه زدن تصادفی به کار برد. قبل از انجام این مهم، توجه کنید که یک شبکه یک گراف هم‌بند بدون جهت متناهی G با است که علاوه‌بر آن به اعداد نامنفی به اسم رسانایی[۱۱۳] مرتبط با یال‌های گراف نیز مجهز شده است. در مورد رسانایی در بخش‌های ۳,۶ و ۴,۶ صحبت خواهیم کرد. وارون رسانایی را مقاومت یال نامند که در بخش ۵ مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

فرض کنید در زمان k، پرسه زدن تصادفی، رأس i را ملاقات می‌کند. در این صورت

$$\begin{aligned} E(\varphi(v_{k+1}) \mid v_k = i) &= \sum_{j \in V} \varphi(j) p_{ij} \\ &= \tfrac{1}{d(i)} \sum_{j \in \Gamma(i)} \varphi(j) = \varphi(i). \end{aligned}$$

ازاین‌رو فرایند تصادفی $\{\varphi(v_t)\}_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ یک مارتینگل[۱۱۴] نسبت به X است و لذا با یک بازی منصفانه[۱۱۵] سروکار داریم.

[108] harmonic function

[109] poles

[110] electrical networks

[111] statics

[112] physics

[113] conductance

[114] martingale

با شرح سه ساختار از تابع هارمونیک در شاخه‌های ذکر شده، مطلب را آغاز می‌کنیم:

الف) $\phi(v)$ را احتمال این‌که در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از رأس v، قبل از اصابت به t، به s برسیم در نظر بگیرید. به‌وضوح ϕ تابع هارمونیک با قطب‌های s و t است، به‌طوری که $\phi(s)=1$ و $\phi(t)=0$ است.

به‌طور کلی‌تر اگر مجموعه $S \subseteq V$ و تابع $\phi_0 : S \to \mathbb{R}$ را داشته باشیم، $\phi(v)$ را برای $v \in V \setminus S$، امید $\phi_0(s)$ تعریف می‌کنیم که s (به‌صورت تصادفی) رأسی است که پرسه زدن تصادفی با شروع از v ابتدا به S اصابت می‌کند. پس $\phi(v)$ یک تابع هارمونیک با مجموعه قطب S است. علاوه‌بر آن برای هر $s \in S$، $\phi(s)=\phi_0(s)$.

ب) گراف G را به عنوان یک شبکه الکتریکی در نظر بگیرید، به‌طوری که هر رأس، یک واحد مقاومت را نشان می‌دهد. فرض کنید الکتریسیته[116] در گراف G جاری است، به گونه‌ای که از رأس s وارد و از t خارج می‌شود. $\phi(v)$ ولتاژ[117] رأس v است. پس ϕ یک تابع هارمونیک با قطب‌های s و t است.

ج) یال‌های گراف G را به‌صورت فنرهای متناسب با ثابت هوک[118] واحد در نظر بگیرید. (یعنی h واحد نیرو برای کشسان فنرها به طول h، لازم است). رأس‌های s و t را با شماره‌های ۱ و ۰ در خط اعداد حقیقی، میخ می‌زنیم و تعادل گراف را می‌یابیم. انرژی[119] در مکان هر رأس، دارای یک

[115]fair game

[116]electricity

[117]voltage

[118]Hooke constant

[119]energy

صورت درجه دوم معین مثبت[120] است و بنابراین مینیمم آن یکتا است، که همان نقطه تعادل است. به‌وضوح تمام رأس‌ها بین ۰ و ۱ قرار دارند و مکان رأس‌ها را به‌صورت یک تابع هارمونیک با قطب‌های s و t تعریف می‌کنیم.

به‌طور کلی اگر قرار دهیم $S \subseteq V$ و مکان رأس‌ها را در S ثابت نگه داریم (در هر بُعد) و اجازه دهیم بقیه رأس‌ها نقطه تعادلشان را پیدا کنند، آن‌گاه هر مختصاتی از رأس‌ها تابع هارمونیک با مجموعه قطب S است.

حال ویژگی‌های بدیهی تابع هارمونیک را به‌صورت خلاصه بیان می‌کنیم. به‌وضوح $\phi(v)$ بین مینیمم و ماکسیمم ϕ روی مجموعه S قرار می‌گیرد. علاوه‌بر آن در $S \subseteq V$ و $\phi_0 : S \to \mathbb{R}$، یک تابع هارمونیک روی G با مجموعه قطب S که روی ϕ_0 گسترش می‌یابد، وجود دارد. (این وجود توسط هر یک از ساختارهای (الف) یا (ج) نتیجه می‌شود و یکتایی منجر به ایجاد ماکسیمم اختلاف بین چنین توابعی می‌شود.)

به خصوص نتیجه می‌شود که هر تابع هارمونیک با حداکثر یک قطب، مقدار ثابت است. نشان می‌دهیم ϕ_{st}، تابع هارمونیک (یکتا) با قطب‌های s و t است که $\phi_{st}(s)=1$ و $\phi_{st}(t)=0$.

نتیجه دیگر از ویژگی یکتایی این است که توابع هارمونیکی که دارای ساختاری به‌صورت (الف) و (ج) هستند (و برای $|S|=2$) در (ب) یکسان‌اند. به عنوان کاربردی ازاین ایده، مطالب مفیدی را از زمان رفت‌وآمد، بیان خواهیم کرد.

قضیه ۱,۵ گراف G را به عنوان یک شبکه الکتریکی با ساختار (ب) و R_{st} را مقاومت میان دو رأس s و t در نظر

[120]positive definite quadratic form

بگیرید. زمان رفت‌وآمد بین رأس‌های s و t دقیقاً برابر با $2mR_{st}$ است.

توجه داشته باشید که معادله (۱,۳) می‌تواند در شرح زمان‌های دسترسی در مقاومت‌ها و نیروهای کشسانی، مفید باشد [۳۲،۴۷].

اثبات با توجه به قسمت (ب)، در گراف G، اگر جریان[121] از s به t برود، $\phi_{st}(v)$ ولتاژ v خواهد بود، به‌طوری که ولتاژ t، ۱ است. کل جریان در یک شبکه برابر با $\sum_{u\in\Gamma(t)}\phi_{st}(u)$ و بنابراین مقاومت برابر با

$$R_{st}=\left(\sum_{u\in\Gamma(t)}\phi_{st}(u)\right)^{-1}$$

است. از سوی دیگر، قسمت (الف) بیان می‌کند احتمال این‌که در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از u، قبل از رسیدن به t، s را ملاقات کنیم، برابر با $\phi_{st}(u)$ است و لذا احتمال این‌که در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از t، قبل از بازگشت به t، برای اولین بار به s اصابت کنیم، برابر با $\frac{1}{d(t)}\sum_{u\in\Gamma(t)}\phi_{st}(u)$ است. با توجه به گزاره ۲,۳، این احتمال برابر $2m/d(t)\kappa(s,t)$ است که برهان را کامل می‌کند.

با استفاده از فرمول‌های توپولوژیک[122] از نظریه شبکه‌های الکتریکی برای مقاومت [۳۰]، مشخصه‌های زیر را برای زمان رفت‌وآمد نتیجه می‌گیریم.

نتیجه ۱,۵ برای گراف G و $s,t\in V$ و گراف G' که از گراف G با شناسه‌های s و t حاصل شده است و $T(G)$ که تعداد درخت‌های فراگیر G است، داریم $\kappa(s,t)=2m\frac{T(G')}{T(G)}$ [۲۵،۵۰].

[121]current

[122]topological formulas

نتیجه ۱,۵ در نظریه شبکه‌های الکتریکی، اصل رالی[123] نامیده می‌شود که نتیجه‌ای از قضیه ۱,۵ است.

نتیجه ۲,۵ افزودن هر یالی به گراف، میزان مقاومت R_{st} را افزایش نمی‌دهد. در نتیجه زمان رفت‌وآمد $\kappa(s,t)$ از عامل $(m+1)/m$ بیشتر نمی‌شود [۵۰].

در حقیقت، به سادگی می‌توان ثابت کرد که حذف یک یال از گراف G نمی‌تواند انرژی تعادل پیکربندی در ساختار فنری را افزایش دهد. اگر در یک گراف جدید، تعادل را پیدا کنیم، انرژی می‌تواند به میزان بیشتری کاهش یابد.

به‌وضوح هنگامی که مکان رأس‌ها ثابت است، حذف یک یال نمی‌تواند انرژی را افزایش دهد. اگر اجازه دهیم گراف جدید تعادل خود را پیدا کند، انرژی به مقدار بیشتری کاهش می‌یابد.

۶. نرخ آمیختگی

یکی از مهم‌ترین پارامترها در کاربرد پرسه زدن تصادفی، نرخ آمیختگی است. ساده‌ترین راه محاسبه نرخ آمیختگی در زمان‌های چندجمله‌ای، استفاده از مقادیر ویژه است، اما این نتیجه شامل کل موضوع نیست. همان‌طور که خواهیم دید، گراف‌های پایه‌ای در موارد مورد نظر به‌صورت نمایی[124] بزرگ می‌شوند و محاسبه مقادیر ویژه به کمک جبر خطی ممکن نیست. بنابراین تکنیک‌های ترکیبی منجر به ایجاد تقریب‌هایی می‌شود که هر کدام بیشتر قابل کنترل باشد، ارجح است. جفت‌سازی[125] و میزان رسانایی دو تکنیک اصلی و مورد استفاده

[123]Raleigh’s Principle

[124]exponentially

[125]coupling

هستند. در این بخش به بررسی این تکنیک‌ها می‌پردازیم و سپس کاربردهایی در طراحی الگوریتم[۱۲۶] معرفی می‌کنیم.

۱.۶. نرخ آمیختگی و جفت‌سازی

روش‌هایی را برای محدودسازی نرخ آمیختگی در یک رده خاص از گراف‌ها ارائه می‌دهیم. (جهت مقایسه، روش‌های مختلفی برای گراف‌های یکسان به کار می‌بریم.) این گراف‌ها جمع دکارتی[۱۲۷] C_n^k از k مدار به طول n است، به‌طوری که n فرد است. مجموعه رأس‌های این گراف به‌صورت $\{0,...,n-1\}^k$ و دو رأس $(x_1,x_2,...,x_k)$ و $(y_1,y_2,...,y_k)$ مجاور هستند، اگر و فقط اگر یک $1 \le i \le k$ وجود داشته باشد که $x_j = y_j$ و برای هر $i \ne j$، $x_i = y_i \pm 1 \pmod n$.

پرسه زدن تصادفی $(v_0,v_1,...)$ را روی C_n^k با توزیع آغازین دلخواه، شروع می‌کنیم. به منظور براورد[۱۲۸] تعداد قدم‌ها برای رسیدن به توزیع ایستا (در این مورد توزیع یکنواخت)، پرسه زدن تصادفی با رأس‌های $(w_0,w_1,...)$ را شروع می‌کنیم که w_0 از توزیع یکنواخت استخراج شده است. پس w_t به ازای هر t دارای توزیع یکنواخت است.

دو پرسه زدن تصادفی اخیر، از هم مستقل نیستند، همان‌طور که گفته شد آن‌ها با هم جفت هستند. رأس‌های C_n^k برداری به طول k و یک پرسه زدن تصادفی، انتخاب تصادفی تغییر وضعیت به مختصات یک، است. اولین قدم، در اولین پرسه زدن را با انتخاب تصادفی مختصات j که $1 \le j \le k$ و مقدار تصادفی $\varepsilon \in \{-1,1\}$، تولید می‌کنیم. نقطه v_{t+1}، با اضافه کردن ε به مختصات j ام v_t به دست می‌آید. حال اگر هر دو v_t و w_t در مختصات j ام بودند، w_{t+1} را با اضافه کردن ε به مختصات j ام w_t تولید می‌کنیم، در غیر این صورت ε را از مختصات j ام w_t، کم می‌کنیم. (تمام عمل‌ها[۱۲۹] به پیمانه[۱۳۰] n هستند.)

یک موضوع مهم مشاهده $(w_0,w_1,...)$ در پرسه زدن است که یک پرسه زدن تصادفی کاملاً صحیح است. از طرف دیگر قاعده جفت‌سازی، نتیجه می‌دهد که اگر برای یک‌بار مختصات v_t با مختصات w_t مساوی شود، این برابری برای همیشه باقی می‌ماند. دیر یا زود، همه مختصات‌ها با هم برابر خواهند شد. پس v_t با w_t که دارای توزیع یکنواخت است، هم‌توزیع خواهد شد.

برای استدلال دقیق این موضوع، قدم‌ها را وقتی مختصات j ام انتخاب می‌شود، نگاه کنید. متوسط تعداد قدم‌ها قبل ازاین‌که دو پرسه زدن در مختصات j ام با هم مساوی شوند، برابر با میانگین زمان دستیابی بین دو رأس در یک مدار به طول n، یعنی $(n^2-1)/6$ است. بنابراین متوسط تعداد قدم‌ها قبل ازاین‌که همه مختصات‌ها مساوی شوند، برابر با $k(n^2-1)/6$ است. طبق نامساوی مارکوف [۴۳]، احتمال این‌که بعد از kn^2 قدم، هنوز v_t و w_t با هم مساوی نباشند کمتر از $1/6$ است و بنابراین احتمال این‌که بعد از ckn^2 قدم هنوز این نقاط با هم مساوی نباشند، کمتر از 6^{-c} است. ازاین‌رو برای هر T به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\left|P(v_t \in S) - \frac{|S|}{n^k}\right| = \left|P(v_t \in S) - P(w_t - S)\right|$$
$$\le P(w_t \ne v_t) < 6^{\frac{-T}{kn^2}}.$$

نرخ آمیختگی حداکثر برابر با

[۱۲۶] algorithm design

[۱۲۷] cartesian sum

[۱۲۸] estimate

[۱۲۹] operation

[۱۳۰] modulo

$$6^{-\frac{1}{kn^2}} < 1-\frac{1}{kn^2}$$

است.

این برهان بسیار دقیق است، اما به نظر می‌رسد برای کاربردهای بیشتر، تنها راه، قاعده جفت‌سازی نیست و فقط در بعضی شرایط دارای نتیجه خواهد بود.

۲,۶. نرخ آمیختگی و رخنه مقادیر ویژه

فرمول جبری نرخ آمیختگی به راحتی به دست می‌آید. قرار دهید $\lambda=\min\{|\lambda_2|,|\lambda_n|\}$، پس از (۱,۴) به سادگی به دست می‌آوریم:

قضیه ۱,۶ در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از رأس i داریم:

$$|P_t(j)-\pi(j)| \le \sqrt{\frac{d(j)}{d(i)}}\lambda^t.$$

به‌طور کلی‌تر

$$|P_t(S)-\pi(S)| \le \sqrt{\frac{\pi(S)}{\pi(i)}}\lambda^t.$$

بنابراین نرخ آمیختگی حداکثر λ است. به راحتی می‌توان این تساوی را ثابت کرد [۸،۳۶].

نتیجه ۲,۶ نرخ آمیختگی پرسه زدن تصادفی روی گراف نادوبخشی G برابر $\lambda=\max\{|\lambda_2|,|\lambda_n|\}$ است [۸،۲۹].

به منظور کاربرد، نباید نگران λ_n باشیم. برای مثال، در هر نقطه i، $d(i)$ حلقه[131] اضافه می‌کنیم به‌طوری که با عامل ۲، پرسه زدن را کندتر کند. اما این نتایج برای یک گراف با ماتریس مجاورت نیمه معین مثبت است. مهم‌ترین پارامتر، λ_2، یا ترجیحاً رخنه طیفی $1-\lambda_2$ است. دقت کنید که

$$\log(1/\lambda)\approx(1-\lambda)^{-1}.$$

همگرایی توزیع‌ها موضوعی است که قضیه ۱,۶ روی آن متمرکز است و در کاربرد بسیار مهم است. برحسب فاصله تغییرات کلی (که به نظر می‌رسد در کاربردها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است)، معیارهای تکنیکی دیگر از مزایای متفاوتی برخوردار هستند. برای مثال به کارگیری معیار χ^2 دارای این مزیت است که فاصله بعد از هر قدم توسعه می‌یابد:

$$\sum_j \frac{(P_{t+1}(j)-\pi(j))^2}{\pi(j)} \le \lambda \sum_j \frac{(P_t(j)-\pi(j))^2}{\pi(j)}.$$

به عنوان کاربردی از قضیه ۱,۶، نرخ آمیختگی پرسه زدن تصادفی را در یک مکعب[132] $n-$ بُعدی، محاسبه می‌کنیم. از آن‌جا که گراف دوبخشی است، باید به آن حلقه بیافزایم، پس به هر رأس، n حلقه اضافه می‌کنیم. مقادیر ویژه گراف حاصل $0,2,4,\dots,2n$ هستند، ازاین‌رو مقادیر ویژه این ماتریس احتمال‌های انتقال $0,1/n,2/n,\dots,(n-1)/n,1$ است. پس نرخ آمیختگی $(n-1)/n$ است.

در ادامه گراف C_n^k را برای n فرد، می‌سازیم. مقادیر ویژه C_n، برای $0\le r<n$، $2\cos(2r\pi/n)$ است، پس مقادیر ویژه ماتریس مجاورت C_n^k همه مقادیر

$$2\cos(2r_1\pi/n)+2\cos(2r_2\pi/n)+\dots+2\cos(2r_k\pi/n)$$

است [۳۱]. به خصوص بزرگترین مقدار ویژه $2k$ است، بعد از آن $2(k-1)+2\cos(2\pi/n)$ و کوچکترین مقدار ویژه $2k\cos((n-1)\pi/n)$ است. ازاین‌رو نرخ آمیختگی برابر با

$$1-\frac{1}{k}\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)\approx 1-\frac{2\pi^2}{kn^2}$$

است.

131loop

132cube

۳٫۶. رخنه مقدار ویژه و رسانایی

گراف G و $S \subset V$ و $S \neq \emptyset$ را در نظر بگیرید. مجموعه یال‌های متصل از S به $V \setminus S$ را با $\nabla(S)$ نشان می‌دهیم. رسانایی مجموعه $S \subset V$ و $S \neq \emptyset$ را به‌صورت

$$\Phi(S) = \frac{|\nabla(S)|}{2m\pi(S)\pi(V \setminus S)}$$

تعریف می‌کنیم و رسانایی گراف را با $\Phi = \min_S \Phi(S)$ نشان می‌دهیم به‌طوری که مینیمم، از بین همه زیرمجموعه‌های ناتهی سره[133] $S \subset V$ استخراج شده است. اگر گراف، d-منتظم باشد، رسانایی S برابر با $\Phi(S) = \frac{n|\nabla(S)|}{d|S||V \setminus S|}$ است.

برای درک بیشتر این کمیت، توجه کنید که

$$|\nabla(S)|/2m$$

بسامد یک پرسه زدن تصادفی ایستا است که از S به $V \setminus S$ تغییر وضعیت می‌دهد، در حالی که $\pi(S)\pi(V \setminus S)$، بسامد یک دنباله از اعضای تصادفی مستقل V است که از توزیع π استخراج شده و Φ می‌تواند به منظور معیار قطعی مشخص شود که میزان استقلال رأس‌های متوالی در پرسه زدن تصادفی را نشان می‌دهد. بنابراین Φ نشان‌دهنده اندازه دقیق استقلال رأس‌های متوالی در یک پرسه زدن تصادفی است.

لم ۱٫۶ ثابت می‌شود

$$1-\lambda_2 = \min\left\{\sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2 : \sum_i \pi(i)x_i = 0, \sum_i \pi(i)x_i^2 = \tfrac{1}{2m}\right\}$$

که هر یال ij فقط یک‌بار جمع می‌شود.

اثبات. فرض کنید $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^V$ بردار ویژه واحد ماتریس احتمال‌های انتقال متقارن‌شده $\hat{P}$ و متناظر با مقدار ویژه λ_2 باشد. قرار دهید $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{\pi(i)}}$. بردار $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^V$ بر بردارهای ویژه $(\sqrt{\pi(i)})_{i \in V}$ متناظر با مقدار ویژه ۱ متعامد هستند و ازاین‌رو

$$\sum_i \pi(i)x_i = \sum_i \sqrt{\pi(i)}\, y_i = 0,$$
$$\sum_i \pi(i)x_i^2 = \sum_i y_i^2 = 1$$

علاوه‌بر آن انتخاب زیر، سمت راست را به کمترین مقدار ممکن می‌رساند:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2m}\sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2 &= \tfrac{1}{2m}\sum_{i \in V} d(i)x_i^2 - \tfrac{1}{m}\sum_{ij \in E(G)} x_i x_j \\ &= \sum_{i \in V} \pi(i)x_i^2 - \mathbf{y}^T \hat{P}\, \mathbf{y} \\ &= 1-\lambda_2.\end{aligned}$$

لم ۲٫۶ گراف G با رسانایی Φ را در نظر بگیرید. قرار دهید $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^V$ و فرض کنید $\pi(\{i : y_i > 0\}) \le \frac{1}{2}$، $\pi(\{i : y_i < 0\}) \le \frac{1}{2}$ و $\sum_i \pi(i)|y_i| =$. در این صورت

$$\sum_{(i,j) \in E} |y_i - y_j| \ge m\Phi.$$

اثبات. برای برهان، نقاط را با $1,\ldots,n$ برچسب‌گذاری می‌کنیم به‌طوری که

$$\begin{aligned} y_1 \le y_2 \le y_t &< 0 = y_{t+1} \\ &= \ldots \\ &= y_s < y_{s+1} \le \ldots \le y_n . \end{aligned}$$

قرار دهید $S = \{1,\ldots,i\}$. با جای‌گذاری

$$y_j - y_i = (y_{i+1} - y_i) + \ldots + (y_j - y_{j-1})$$

داریم

[133] proper

$$\sum_{(i,j)\in E}\left|y_i-y_j\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left|\nabla(S_i)\right|(y_{i+1}-y_i)$$
$$\geq 2m\Phi\sum_{i=1}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)\times$$
$$\pi(S_i)\pi(V\setminus S_i)$$

با استفاده ازاین‌که $\pi(S_i)\leq 1/2$، $i\leq t$ و $\pi(S_i)\geq 1/2$، $i\geq s+1$ و $y_{i+1}-y_i=0$، $t<i<s$ داریم:

$$\sum_{(i,j)\in E}\left|y_i-y_j\right|$$
$$\geq m\Phi\sum_{i=1}^{t}(y_{i+1}-y_i)\pi(S_i)+$$
$$m\Phi\sum_{i=t+1}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)\pi(V\setminus S_i)$$
$$=m\Phi\sum_i\pi(i)\left|y_i\right|=m\Phi.$$

قضیه ۲,۶ ثابت می‌شود $\frac{\Phi^2}{8}\leq 1-\lambda_2\leq\Phi^2$.

اثبات. ابتدا کران بالا را ثابت می‌کنیم. طبق لم ۱,۶، کافی است برای یک بردار $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^V$، نشان دهیم

$$\sum_i\pi(i)x_i=0,\quad \sum_i\pi(i)x_i^2=\tfrac{1}{2m} \qquad (۱,۶)$$

و

$$\sum_{ij\in E(G)}(x_i-x_j)^2=\Phi. \qquad (۲,۶)$$

مجموعه S را مجموعه‌ای با مینیمم رسانایی و بردار $\mathbf{x}$ با مولفه‌های

$$x_i=\begin{cases}a & i\in S\\ b & i\in V\setminus S\end{cases}$$

در نظر بگیرید. این بردار در (۱,۶) صدق می‌کند، اگر $a=\sqrt{\frac{\pi(V\setminus S)}{2m\pi(S)}}$ و $b=-\sqrt{\frac{\pi(S)}{2m\pi(V\setminus S)}}$.

با یک جای‌گذاری ساده می‌توان نشان داد در (۲,۶) نیز صدق می‌کند.

برای اثبات کران پایین، دوباره از لم ۱,۶ استفاده می‌کنیم. ثابت می‌کنیم برای هر بردار $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^V$ که در (۱,۶) صدق می‌کند، داریم:

$$\tfrac{1}{m}\sum_{ij\in E}(x_i-x_j)^2\geq\tfrac{\Phi^2}{8}. \qquad (۳,۶)$$

اکنون به اثبات رابطه (۳,۶) می‌پردازیم. فرض کنید $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^V$ یک بردار باشد که در (۱,۶) صدق کند و $x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_n$. مقدار $1\leq k\leq n$ را به گونه‌ای اختیار کنید که

$$\pi\left(\{1,\ldots,k-1\}\right)\leq\tfrac{1}{2}$$

و

$$\pi\left(\{k+1,\ldots,n\}\right)<\tfrac{1}{2}.$$

با اختیار کردن $z_i=\max\{0,x_i-x_k\}$ داریم:

$$\sum_i\pi(i)z_i^2\geq\tfrac{1}{2}\sum_i\pi(i)\left(x_i-x_k\right)^2$$
$$=\tfrac{1}{2}\sum_i\pi(i)x_i^2-$$
$$x_k\sum_i\pi(i)x_i+\tfrac{m}{2}x_k^2$$
$$=\tfrac{1}{2}+\tfrac{m}{2}x_k^2\geq\tfrac{1}{2}$$

اکنون با اختیار کردن $y_i=z_i^2/\sum_i\pi(i)z_i^2$ در لم ۲,۶، داریم

$$\sum_{ij\in E}\left|z_i^2-z_j^2\right|\geq m\Phi\sum_i\pi(i)z_i^2.$$

از طرف دیگر طبق نامساوی کوشی-شوارتز[۱۳۴] [۴۳] داریم:

[134] Cauchy-Schwarz inequality

$$\sum_{ij\in E}\left|z_i^2-z_j^2\right|\le\left(\sum_{ij\in E}\left(z_i-z_j\right)^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{ij\in E}\left(z_i+z_j\right)^2\right)^{1/2}.$$

همچنین $\sum_{ij\in E}\left(z_i-z_j\right)^2\le\sum_{ij\in E}\left(x_i-x_j\right)^2$ و

$$\begin{aligned}\sum_{ij\in E}\left(z_i+z_j\right)^2&\le 2\sum_{ij\in E}\left(z_i^2+z_j^2\right)\\&=2\sum_{i\in V}d(i)z_i^2\\&=4m\sum_i\pi(i)z_i^2.\end{aligned}$$

با ترکیب این دو نامساوی با نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{ij\in E}(x_i-x_j)^2&\ge\sum_{ij\in E}\left(z_i-z_j\right)^2\\&\ge\frac{\left(\sum_{ij\in E}\left|z_i^2-z_j^2\right|\right)^2}{\sum_{ij\in E}\left(z_i+z_j\right)^2}\\&\ge\frac{\Phi^2m^2\left(\sum_i\pi(i)z_i^2\right)^2}{4m\sum_i\pi(i)z_i^2}\\&=\tfrac{\Phi^2m}{4}\sum_i\pi(i)z_i^2\ge\tfrac{\Phi^2m}{8}\end{aligned}$$

با تقسیم دو طرف نامساوی بالا به m نامساوی (۳,۶) و در پی آن برهان کامل می‌شود.

رسانایی به‌صورت عکس در نامعادله اخیر وارد می‌شود که به معنی نسخه ℓ_1 از (۳,۶) است.

هر برداری را که در (۱,۶) صدق کند، $\mathbf{x}$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم $x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n$. همچنین $1\le k\le n$ یک شاخص باشد که برای آن $\pi\left(\{1,\ldots,k-1\}\right)\le 1/2$ و $\pi\left(\{k+1,\ldots,n\}\right)<1/2$.

با قرار دادن $z_i=\max\{0,x_i-x_k\}$ و انتخاب علامت $\mathbf{x}$ مناسب، می‌توانیم فرض کنیم

$$\begin{aligned}\sum_i\pi(i)z_i^2&\ge\tfrac{1}{2}\sum_i\pi(i)(x_i-x_k)^2\\&=\tfrac{1}{2}\sum_i\pi(i)x_i^2-x_k\sum_i\pi(i)x_i+\tfrac{1}{2}x_k^2\\&=\tfrac{1}{2m}+\tfrac{1}{2}x_k^2\ge\tfrac{1}{2m}.\end{aligned}$$

حال لم ۲,۶ را برای مقادیر $y_i=z_i^2/\sum_i\pi(i)z_i^2$ به کار برده و به دست می‌آوریم

$$\sum_{(i,j)\in E}\left|z_i^2-z_j^2\right|\ge m\Phi\sum_i\pi(i)z_i^2.$$

از طرف دیگر با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز [۴۳]:

$$\sum_{(i,j)\in E}\left|z_i^2-z_j^2\right|\le\left(\sum_{(i,j)\in E}(z_i-z_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\sum_{(i,j)\in E}(z_i+z_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

عامل دوم را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in E}(z_i+z_j)^2&\le 2\sum_{(i,j)\in E}(z_i^2+z_j^2)\\&=4m\sum_i\pi(i)z_i^2\end{aligned}$$

براورد کرد. با ترکیب این نامساوی‌ها داریم

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in E}(z_i-z_j)^2&\ge\frac{\left(\sum_{(i,j)\in E}\left|z_i^2-z_j^2\right|\right)^2}{\sum_{(i,j)\in E}(z_i+z_j)^2}\\&\ge\frac{\Phi^2m^2\left(\sum_i\pi(i)z_i^2\right)^2}{4m\sum_i\pi(i)z_i^2}\\&=\tfrac{\Phi^2m}{4}\sum_i\pi(i)z_i^2\ge\tfrac{\Phi^2}{8}.\end{aligned}$$

بدیهی است که

$$\sum_{(i,j)\in E}(x_i-x_j)^2\ge\sum_{(i,j)\in E}(z_i-z_j)^2$$

و در پی آن حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ۱,۶ برای هر رأس آغازین i و هر رأس j و $t\ge 0$، $\left|p^t(j)-\pi(j)\right|\le\sqrt{\frac{d(j)}{d(i)}}\left(1-\frac{\Phi^2}{8}\right)^t$ [۳۶].

در [۱۲] نامعادله مشابهی برای اثبات کران‌های زمان آمیختگی به کار برده شده است، به خصوص بخش اول آن که توزیع دارای بالاترین میزان رسانایی است. قضیه ۲٫۶ حالت گسسته نامعادله چیگر[۱۳۵] از هندسه دیفرانسیل[۱۳۶] است که به معادله حرارت[۱۳۷] معروف است و در واقع چنین نتایجی نشانگر اولین قدم‌ها برای مطالعه وسیع معادلات تفاضلی[۱۳۸] در گراف به عنوان معادلات گسسته ابتدایی از معادلات تفاضلی است.

۴٫۶. رسانایی و جریان‌های چندمنظوره

رسانایی پارامتری نیست که بتوان آن را به تنهایی و به راحتی به کار برد. محاسبه آن برای هر گراف مشخص، دشوار است. اما روش‌هایی برای یافتن براوردهای خوب وجود دارد. یکی از مهم‌ترین روش‌ها ساختار جریان‌های چندمنظوره[۱۳۹] است. به کمک نتایجی از [۵] به شرح موضوع می‌پردازیم.

قضیه ۳٫۶ گراف هم‌بند G را با یک گروه خودریختی رأس- انتقالی با قطر D در نظر بگیرید. پس رسانایی G حداقل $1/(dD)$ است. اگر گراف یال-انتقالی باشد، این مقدار حداقل $1/D$ است.

اثبات. برای هر زوج نقطه i و j، کوتاه‌ترین مسیر P_{ij} بین این دو نقطه را انتخاب می‌کنیم (که آن را فاصله[۱۴۰] بین i و j نیز نامند [۴۴]). خانواده این مسیرها و تصویر آن‌ها تحت خودریختی G را با $\wp$ نشان می‌دهیم. تعداد کل مسیرها در $\wp$ (شمارش تعداد) برابر با $\binom{n}{2}g$ است، به‌طوری که g تعداد خودریختی‌های G است. علاوه‌بر آن g شامل همه مسیرهایی است که هر دو نقطه را به یکدیگر وصل می‌کند. ادعا می‌کنیم که در هر مسیر $\wp$ حداکثر $Dg(n-1)$ یال وجود دارد. در حقیقت اگر یال e در p مسیر وجود داشته باشد پس در هر تصویر از e تحت خودریختی‌ها و حداقل در $n/2$ تصاویر متمایز توسط رأس-انتقالی وجود دارد. این عمل منجر به $pn/2$ یال می‌شود. تعداد یال‌های مسیرها در $\wp$، حداکثر $Dg\binom{n}{2}$ است که این ادعا را ثابت می‌کند.

حال قرار دهید $S \subseteq V(G)$ و $|S| = s \le |V(G)|/2$. تعداد مسیرها در $\wp$ که S را به $V(G)\setminus S$ متصل می‌کند دقیقاً برابر با $gs(n-s)$ است. از طرف دیگر این تعداد حداکثر $|\nabla(S)|.Dg(n-1)$ است، ازاین‌رو

$$|\nabla(S)| \ge \frac{gs(n-s)}{Dg(n-1)} = \frac{s}{D}\cdot\frac{n-s}{n-1}.$$

بنابراین رسانایی S برابر

$$\frac{n|\nabla(S)|}{ds(n-s)} \ge \frac{n}{n-1}\frac{1}{dD} > \frac{1}{dD}$$

است. ابتدا این ادعا را ثابت می‌کنیم. برهان بعدی مشابه است.

از قضیه ۳٫۶ به منظور براورد نرخ آمیختگی C_n^k (که n فرد است) استفاده می‌کنیم. این گراف یک گروه خودریختی یال-انتقالی دارد و قطر آن $k(n-1)/2$ است. پس رسانایی آن از $2/(kn)$ بیشتر است و بنابراین نرخ آمیختگی آن حداکثر $1-\frac{1}{2k^2n^2}$ است.

مشاهده می‌کنیم که این کران از کران‌های مقادیر ویژه و جفت‌سازی بدتر هستند؛ در واقع بسته به مقدار نسبی k و n،

---

[135] Cheeger’s inequality

[136] differential geometry

[137] heat equation

[138] difference equations

[139] multicommodity flows

[140] distance

نرخ آمیختگی به کران بالا یا کران پایین در قضیه ۲٫۶ نزدیک می‌شود.

اگر در برهان قضیه ۳٫۶ همه مسیرهای متصل‌کننده جفت رأس $\{u,v\}$ را در نظر بگیریم به گونه‌ای که وزن هر مسیر $1/n^2g$ است، یک جریان از u به v با مقدار $1/n^2$ به دست می‌آوریم. استدلالی کوتاه نشان می‌دهد این $\binom{n}{2}$ جریان، هر یال را با حداکثر $D(n-1)/n^2$ بارگیری می‌کند. ادامه استدلال را برای هر گرافی می‌توان به کار برد و گزاره زیر نتیجه گرفته می‌شود.

گزاره ۱٫۶ اگر بتوانیم در G جریان f_{uv} مقادیر $\pi(u)\pi(v)$ از u به v را برای هر $u \neq v$ بسازیم و ماکسیمم کل بار این $\binom{n}{2}$ جریان در هر یال حداکثر γ باشد، رسانایی G حداقل $1/(2m\gamma)$ است [۵].

اکنون این سوال مطرح می‌شود که محدودیت‌های آن چیست، یعنی تا چه اندازه می‌توان به رسانایی صحیح نزدیک شد؟

قضیه ۴٫۶ گراف G با رسانایی Φ در نظر بگیرید. سامانه‌ای از جریان‌های f_{uv} با مقدار $\pi(u)\pi(v)$ از u به v برای هر $u \neq v$، هر یال را حداکثر $O(\log n)/m\Phi$ بارگیری[141] می‌کند [۵].

۵٫۶. میانبرها

در این بخش قصد داریم راه‌هایی برای نرخ آمیختگی طرح کنیم:

نرخ آمیختگی ← رخنه مقادیر ویژه ← رسانایی ← جریان‌های چندمنظوره.

در اینجا می‌توان برای کران‌هایی که واضح‌تر و دارای انعطاف‌پذیری بیشتری هستند، میانبر[142] ساخت. مقدار جریان f را به‌صورت $\sum_e f(e)$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۵٫۶ فرض کنید جریان f_{uv} با مقدار $\pi(u)\pi(v)$ از u به v برای هر $u \neq v$ وجود دارد، به‌طوری که ماکسیمم همه بارگیری‌ها این $\binom{n}{2}$ جریان بر هر یال، حداکثر γ است و مقدار هر جریان f_{uv} حداکثر $\beta\pi(u)\pi(v)$ است. پس $\lambda_2 \le 1-\frac{1}{2m\beta\gamma}$ [۳۰].

یکی از کاربردهایی که به‌طور ضمنی در این مقاله وجود دارد را فرمول‌نویسی می‌کنیم:

قضیه ۶٫۶ قرار دهید $t \in \mathbb{R}_+$ و فرض کنید برای هر $0 \le s \le t$ و $0 \le x \le 1$، هر سطح مجموعه $A=\{v \in V : P^s(v) \ge x\}$ حداقل رسانایی ψ را دارا است. پس برای هر $S \subseteq V$ [۳۶]،

$$\left|P^t(S)-\pi(S)\right| \le \sqrt{|V|}\left(1-\frac{\psi^2}{4}\right)^t.$$

به‌عبارت دیگر اگر همگرایی $P^t \to \pi$ کند باشد، در میان سطح‌های مجموعه P^t رسانایی کوچکی وجود دارد. کاربرد دیگر این روش شامل نتایجی است که مجموعه‌های S با اندازه کوچک $\pi(S)$، مجازاند که رسانایی کوچکی داشته باشند.

۷. نمونه‌گیری[143] با پرسه زدن تصادفی

شاید مهم‌ترین کاربرد پرسه زدن تصادفی در طراحی الگوریتم، استفاده ازاین حقیقت باشد که (برای گراف‌های هم‌بند و نادوبخشی) وقتی $t \to \infty$، توزیع v_t به توزیع ایستای π میل

[141] loading

[142] shortcut

[143] sampling

می‌کند. در اغب موارد (نه همیشه) که G گرافی منتظم با درجه‌ای مانند d است، توزیع π یکنواخت است. هر رأس در پرسه زدن تصادفی، بعد از تعدادی گام، سرانجام توزیع یکنواخت خواهد داشت.

راه‌های نابدیهی برای تولید عناصر، از توزیعی ساده مثل توزیع یکنواخت وجود دارد. اما به اولین کاربرد تکنیک‌های پرسه زدن تصادفی در دنیای واقعی بیندیشید. برای مثال بُر زدن کارت‌ها، مانند تولید ۵۲ عنصر از توزیع یکنواخت، در میان همه جایگشت‌ها است. مسئله این است که به مجموعه‌ای نیاز داریم که عناصر تصادفی آن به‌صورت نمایی بزرگ شوند (با توجه به اندازه طبیعی مسئله). این مجموعه در بسیاری از کاربردها ساختار پیچیده‌ای دارد، برای مثال مجموعه‌ای از نقاط مشبک[۱۴۴] در یک جسم محدب[۱۴۵] یا مجموعه‌ای از گستره خطی[۱۴۶] یک ترتیب جزئی[۱۴۷].

۱,۷. شمارش و حجم محاسبات

طرح کلی زیر برای حل تقریبی مسائل شمارشی که حاصل‌ضرب براوردگر نامیده می‌شود در مواردی که نیاز به یافتن اندازه گروه‌ها است در [۴] مطرح شده است.

قصد داریم عناصر مجموعه V را بشماریم. اندازه V برحسب اندازه واقعی مسئله که k است، به‌صورت نمایی بزرگ می‌شود. فرض کنید زنجیری از زیرمجموعه‌های $V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = V$ را می‌یابیم به‌طوری که برای هر i:

[۱۴۴]lattice points

[۱۴۵]convex body

[۱۴۶]linear extensions

[۱۴۷]partial order

الف) $|V_0|$ معلوم باشد (معمولاً $|V_0| = 1$ است).

ب) کران‌های $\frac{|V_{i+1}|}{|V_i|}$ چندجمله‌ای در k باشد.

ج) m دارای کران چندجمله‌ای باشد.

د) یک زیربرنامه[۱۴۸] برای تولید عناصر تصادفی با توزیع یکنواخت از مجموعه V_i برای هر $1 \le i \le m$ داشته باشیم.

براورد نسبت $\frac{|V_{i+1}|}{|V_i|}$ را می‌توان با تولید تعدادی عناصر چندجمله‌ای از V_{i+1} و محاسبه تعداد اصابت‌ها به V_i، به دست آورد. حاصل‌ضرب این براوردگرها و $|V_0|$، براورد $|V|$ را به دست می‌دهد. این طرح منجر به الگوریتم تقریبی زمان چندجمله‌ای تصادفی می‌شود، (مشروط بر این‌که در (الف)، (ب)، (ج) و (د) صدق کند و زیربرنامه در (د)، چندجمله‌ای باشد).

مسئله اصلی چگونگی تولید این عناصر تصادفی از V_i در زمان چندجمله‌ای است. این مسئله را برای $V_m = V$ بررسی می‌کنیم. تقریباً در تمام کاربردهای این روش هر V_i مانند V خواهد بود و لذا استدلال یکسانی به کار برده می‌شود. (این پدیده خودتغییرپذیری[۱۴۹] نامیده می‌شود.)

همان‌طور که در بالا ذکر شد، پرسه زدن تصادفی در این امر یک طرح کلی را ارائه می‌دهد. فرض کنید پرسه زدن تصادفی روی گراف همبند $G = (V, E)$ انجام می‌شود، یعنی می‌توان برای هر رأس مشخص یک همسایگی تصادفی یافت. (در اغلب موارد رأس‌ها دارای ماکسیمم درجه (چندجمله‌ای) کوچک هستند. با افزودن حلقه می‌توان گرافی منتظم و نادوبخشی ساخت. پس می‌دانیم اگر بعد از تعداد زیادی قدم توقف کنیم،

[۱۴۸]subroutine

[۱۴۹]Self-reducibility

توزیع آخرین رأس بسیار به توزیع یکنواخت نزدیک است. نتایج به دست آمده از نرخ آمیختگی مشخص می‌کند که چه مدت باید پرسه زدن را ادامه دهیم؛ اما معمولاً یافتن یک براوردگر خوب برای نرخ آمیختگی (روی رخنه‌های طیفی یا رسانایی) سخت‌ترین بخش کار است.

گراف G که دارای n رأس با حداقل درجه $n/2$ است را در نظر بگیرید. قصد داریم یک جورسازی کامل تصادفی روی گراف G با n رأس (n فرد) به‌طور تقریباً یکنواخت تولید کنیم. بنابراین می‌خواهیم گرافی تعریف کنیم که رأس‌های آن به‌طور کامل جورسازی شده‌اند و سپس روی این گراف به‌صورت تصادفی پرسه بزنیم. از آن‌جا که هیچ روش ساده‌ای برای گام برداشتن از یک جورسازی کامل به سمت دیگری، وجود ندارد؛ پس مجموعه مورد نظر را به مجموعه تمام جورسازی‌های کامل نزدیک، گسترش می‌دهیم (یعنی جورسازی‌ها با $n/2-1$ یال). اگر جورسازی‌های کامل نزدیک دارای $n/2-2$ یال مشترک باشند، آن‌ها را با یک یال به هم وصل می‌کنیم و یک جورسازی کامل را به همه جورسازی‌های کامل نزدیک وصل می‌کنیم، تا گراف H به دست آید. درجه‌های H دارای کران $3n$ هستند. جهت منتظم‌سازی گراف H با درجه $3n$، حلقه‌هایی به رأس‌ها اضافه می‌کنیم.

حال می‌توانیم یک جریان چند منظوره بسازیم (بر اساس تبدیل اخیر، یک جورسازی دیگر مسیرهای متناوب) تا نشان دهیم $1/\Phi(H)$ دارای کران چندجمله‌ای n است. ازاین‌رو با تعداد چندجمله‌ای گام، می‌توانیم رأس تصادفی از H با توزیع یکنواخت را ایجاد کنیم. اگر این رأس، متناظر با جورسازی کامل باشد، توقف می‌کنیم، در غیر این صورت دوباره شروع می‌کنیم. با استفاده از فرضیه راجع به رأس‌ها، می‌توان نشان داد تعداد جورسازی‌های کامل حداقل یک چندجمله‌ای کسری از تعداد جورسازی‌های کامل نزدیک است و بنابراین متوسط تعداد تکرارها، قبل از یک جورسازی کامل به دست آمده دارای کران چندجمله‌ای است.

از کاربردهای دیگر این روش می‌توان به شمارش تعداد گستره‌های خطی در یک ترتیب جزئی [۲۷] و جنگل‌ها[۱۵۰] در گراف‌های متراکم[۱۵۱] [۲] اشاره کرد. برای جزئیات بیشتر، طرح‌های تصادفی چندجمله‌ای کامل تقریبی برای مسائل عددی [۴۸] را ببینید.

به عنوان مثالی دیگر مسئله اساسی یافتن حجم یک جسم محدب را در نظر بگیرید. این حجم را می‌توان به‌صورت شهودی یا در بعضی موارد، با برهان ریاضی به دست آورد با این حال یافتن آن مشکل است. در [۱۵،۴۵] ثابت شده که محاسبه یک چندبر[۱۵۲] $n-$ بُعدی بسیار پیچیده است. نتایج دیگر موجود در [۱۶] نشان می‌دهد برای جسم‌های محدب کلی (اوراکل تفکیک شده[۱۵۳]) حتی در محاسبه یک براورد با کران خطای نسبی[۱۵۴]، زمان آن نمایی است و خطای نسبی هر براورد قابل محاسبه زمان چندجمله‌ای با هر بُعد، به‌صورت نمایی رشد می‌کند [۲۲].

در ادامه تعمیم‌هایی از الگوریتم اصلی را بیان می‌کنیم؛ در اینجا برخی سهام‌ها و زمان اجرای آنها را براورد می‌کنیم (تعداد نام‌های اوراکل‌های مختلف را شمارش کرده‌ایم؛ نماد O^* عامل‌های $\log n$ را فرونشانده‌ایم که عامل‌ها وابسته به کران‌های خطا هستند).

---

[150]forests

[151]dense graphs

[152]polytope

[153]separation oracle

[154]relative error

در این قسمت ایده اصلی را شرح می‌دهیم. جسم محدب K در $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیرید. با استفاده از تکنیک‌های معروف بهینه‌سازی[۱۵۵]، می‌توانیم فرض کنیم K شامل یک گوی واحد[۱۵۶] و یک گوی با شعاع[۱۵۷] $R \le n^{3/2}$ در درون آن است. K_i را اشتراک[۱۵۸] K و یک گوی تقریباً 0، با درجه $2^{i/n} (i = 0,1,...,m, m = [2n \log n])$ در نظر بگیرید. پس $K_0 \subseteq K_1 \subseteq ... \subseteq K_m$ و $vol(K_{i+1})/vol(K_i) \le$ و $vol(K_0)$ معلوم است. بنابراین طرح کلی شمارش که در بالا شرح داده شده را می‌توان در اینجا تطبیق داد، مشروط بر آن که چگونگی تولید نقطه تصادفی با توزیع یکنواخت در یک جسم محدب را بدانیم [۳۳].

به این منظور، از تکنیک‌های پرسه زدن تصادفی استفاده می‌کنیم. در اینجا برخی اشکال‌های تکنیکی وجود دارد، زیرا مجموعه نقاط در جسم محدب، بی‌نهایت است. یا می‌توان یک فضای به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته و یک نقطه تصادفی از آن فضا در K تولید کرد، یا مفاهیم و روش‌های بحث شده در بالا را برای مواردی که مجموعه‌های زیربنایی آنها بی‌نهایت هستند، گسترش داد. هر دو پیشنهاد معقول‌اند، پیشنهاد دوم پیچیده‌تر است، اما منجر به استدلال‌های واضح در رابطه با نرخ آمیختگی می‌شود.

پرسه زدن تصادفی را به این صورت تعریف می‌کنیم: اولین نقطه به‌صورت یکنواخت از گوی واحد B انتخاب می‌شود. برای v_t معلوم، نقطه تصادفی u به‌طور یکنواخت از گوی $v_t + B'$ به مرکز[۱۵۹] v_t و شعاع δ انتخاب می‌شود (در اینجا پارامتر δ وابسته به سطح الگوریتم است، اما معمولاً برابر با مقدار تقریبی $\varepsilon/\sqrt{n}$ است که ε مقدار ثابت مثبت کوچک است $(B' = \varepsilon B)$. اگر $u \in K$ باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $v_{t+1} = u$، در غیر این صورت نقطه جدید u را تولید و دوباره امتحان می‌کنیم. این روش متناظر با پرسه زدن تصادفی روی گرافی است که مجموعه رأس‌های آن K است، با دو نقطه $x, y \in K$ که با یک یال به یکدیگر متصل‌اند، اگر و تنها اگر عبارت $|x - y| \le \delta$ برقرار باشد.

توزیع ایستای این پرسه زدن تصادفی، یکنواخت نیست، اما دارای توزیعی است که تابع چگالی[۱۶۰] آن متناسب با درجه‌های $\ell(x) = vol(K \cap (x + B'))/vol(B')$ است. کمیت $\ell(x)$ که اغلب رسانایی موضعی[۱۶۱] در x نامیده می‌شود، احتمال حرکت، بعد از یک تک آزمایش است. اگر گام‌ها به اندازه کافی کوچک باشد، این کمیت در اغلب موارد K، ثابت خواهد بود و خطای باقی‌مانده ناچیز است. (در بعضی از سطوح الگوریتم به منظور منتظم‌سازی، گراف با حلقه پر شده است. دقیقاً به این معنی است که اگر u به‌صورت یکنواخت از $v_t + B'$ انتخاب شود و $u \notin K$، قرار می‌دهیم $v_{t+1} = v_t$، بنابراین دو پرسه زدن تصادفی، مجموعه نقاط یکسانی را تولید می‌کنند، اما در یک مورد، در شمارش، تکرار خواهند شد. مشخص است برای توضیحی که در بالا آورده شده است، رسانایی می‌تواند با روشی زیبا به گونه‌ای که در قضیه ۱,۷ در زیر بیان شده است براورد شود، در حالی که در نمونه‌های دیگر، نقاط با رسانایی موضعی کوچک پیچیدگی بیشتری دارند.)

با کنار هم قرار دادن تمام این مباحث، یک طرح کلی از الگوریتم حجم[۱۶۲] خواهیم داشت که به تجزیه و تحلیل آن

[155]optimization

[156]unit ball

[157]radius

[158]intersection

[159]center

[160]density function

[161]local conductance

[162]volume algorithm

می‌پردازیم. مهم‌ترین بخش تحلیل، براورد رسانایی پرسه زدن تصادفی در K است. اثبات قضیه زیر شامل استدلال‌های هندسی قابل ملاحظه، به خصوص نامساوی‌های هم‌محیطی[۱۶۳] است.

قضیه ۱,۷ رسانایی پرسه زدن تصادفی در یک جسم محدب K، با قطر D، حداقل مقدار ثابت $\delta/(\sqrt{nD})$ است [۳۳].

این موضوع نتیجه می‌دهد که فقط $O^*(nR^2/\delta^2)$ گام، برای تولید یک نقطه تصادفی در K لازم است.

قضیه ۱,۷ پیشنهاد می‌دهد که باید اندازه گام را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم. در واقع با انتخاب $\delta=R$ با یک قدم، یک نقطه تصادفی در K به دست می‌آید. مسئله این است که اگر δ بزرگ باشد، قبل ازاین‌که به نقطه بعدی برویم باید آزمایش‌های بسیار زیادی انجام دهیم. به راحتی می‌توانیم زمان انتظار را در یک پرسه زدن ایستا، محاسبه کنیم. یعنی متوسط تعداد نقاط u قبل ازاین‌که نقطه‌ای در K بیابیم برابر $vol(K)/\int_K \ell(x)dx$ است. می‌توان ثابت کرد که این کمیت دارای کران بالای $1/(1-\delta\sqrt{n})$ است و ازاین‌رو اگر δ کمتر از $1/(2\sqrt{n})$ انتخاب شود، این مقدار برابر با $O(1)$ است. به این معنی که تعداد آزمایش‌های ناموفق به اندازه یک عامل ثابت، از تعداد قدم‌ها در پرسه زدن تصادفی بیشتر است که این مقدار بسته به اندازه هر قدم، $O^*(R^2n^2)$ است.

دستیابی به یک R به اندازه کافی کوچک، مسئله‌ای مهم است اما در این مقال نمی‌گنجد. با ترفندهایی می‌توان $R=O\left(\sqrt{n}\right)$ را به دست آورد و بنابراین تعداد نقاط تصادفی تولید شده در K برابر با $O^*(n^3)$ است. می‌توان $O^*(n)$ نقطه را به منظور براورد نسبت $vol(K_i)/vol(K_{i+1})$، با دقت کافی تولید کرد. $O^*(n)$ نقطه برای هر نسبت وجود دارد. در مجموع $O^*(n^5)$ گام به دست می‌دهد (که آن را اوراکل می‌نامند).

تقریباً در تمام کاربردهای این روش، کلید حل مسئله براورد رسانایی گراف مناسب است. معمولاً مسئله سختی است و مسئله‌های حل نشده بسیاری در این زمینه وجود دارد. برای مثال طبق آن‌چه که در ادامه بیان شده، آیا رسانایی گراف پایه‌ای ماترویید[۱۶۴] دارای کران چندجمله‌ای است؟ (یک گراف پایه‌ای ماترویید همه پایه‌های یک ماترویید (E,M) را به عنوان رأس دارا است که دو به دو متصل‌اند اگر و تنها اگر تفاوت تقارن آن‌ها دارای ۲ عضو باشد.) یکی از ویژگی‌های ماترویدهای گرافیکی[۱۶۵] این است که نامساوی (۱,۵) را برای تعداد درخت‌های فراگیر ثابت می‌کنند.

۲,۷. صافی متروپلیس

در بسیاری از کاربردهای پرسه زدن تصادفی، نیاز به توزیعی داریم که عناصر تصادفی غیر یکنواخت تولید کند. برای مثال ممکن است الگوریتم بهینه‌سازی تصادفی شده، روش تولید راه حل عملی تصادفی از توزیع احتمال Q را طرح کند که بسیار روی مسئله بهینه یا نزدیک-بهینه[۱۶۶]، متمرکز است. به‌طور خاص تابع معین $f:V\to \mathbb{R}_+$ را در نظر بگیرید، وقتی می‌خواهیم عناصر تصادفی را از توزیع متمرکز بر مسائل بهینه تولید کنیم، نیازی به ماکسیمم‌سازی f روی V نیست. اگر به جای آن نقطه تصادفی w را از توزیع Q که $Q(v)$ متناسب با $\exp\left(f(v)/T\right)$ و T عدد مثبت بسیار کوچک است تولید کنیم؛ آن‌گاه با احتمال زیاد، w، f را ماکسیمم می‌کند.

[163]isoperimetric inequalities

[164]matroid basis graph

[165]graphic matroid

[166]near-optimal

روش زیبای پرسه زدن تصادفی با صافی متروپلیس[۱۶۷] [۳۸]، راهی ساده برای اصلاح پرسه زدن تصادفی ارائه می‌دهد، به‌طوری که به هر توزیع احتمال معین همگرا است.

گراف $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید. برای سادگی فرض کنید گراف G، d-منتظم است. همچنین $F:V\to \mathbb{R}_+$ و v_0 هر نقطه آغازین برای پرسه زدن تصادفی است. v_t رأسی است که بعد از t قدم به آن می‌رسیم. یک همسایگی تصادفی u برای v_t انتخاب می‌کنیم. اگر $F(u)\ge F(v_t)$، به u می‌رویم، در غیر این صورت یک سکه اریب[۱۶۸] پرتاب کرده، با احتمال $F(u)/F(v_t)$ به u رفته و با احتمال $1-F(u)/F(v_t)$ در v می‌مانیم.

واضح است که این شکل پرسه زدن تصادفی باز یک زنجیر مارکوف است، در واقع به راحتی می‌توان بررسی کرد که این زنجیر، زمان-برگشت‌پذیر نیز هست (و بنابراین می‌توان آن را یک پرسه زدن تصادفی روی گراف با یال وزن‌دار دانست). ویژگی جالبی را در ادامه شرح می‌دهیم.

قضیه ۲,۷ توزیع ایستای Q_F از پرسه زدن تصادفی روی گراف G، با فرمول $Q_F(v)=\frac{F(v)}{\sum_{w\in V}F(w)}$، توسط تابع F صافی می‌شود [۳۸].

یکی از ویژگی‌های مهم دیگر این الگوریتم این است که برای انجام آن حتی نیاز به محاسبه احتمال‌های $Q_F(v)$ نداریم، کافی است نسبت $F(u)/F(v_t)=Q_F(u)/Q_F(v_t)$ را محاسبه کنیم. این ویژگی صافی متروپلیس در کاربردها نقش اساسی دارد.

۳,۷. قوانین توقف دقیق[۱۶۹]

این بحث را با یک موضوع جالب شروع می‌کنیم.

قاعده ۱,۷ مدار G به طول n با نقطه آغازین u را در نظر بگیرید. در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از u، احتمال ملاقات همه رأس‌ها قبل از اصابت به v، برای هر $v\neq u$ یکسان است.

به‌وضوح اگر مدار را با یک گراف کامل جای‌گزین کنیم، نتیجه مشابهی به دست می‌آوریم و هیچ گراف دیگری این ویژگی را ندارد [۳۴]. این موضوع، ازاین نتیجه پیروی می‌کند که به‌صورت شهودی، آخرین رأس ملاقات شده، با احتمال زیاد دورتر است تا این‌که نزدیک باشد. در یک پرسه زدن تصادفی با شروع از u، احتمال ملاقات تمام رأس‌ها، قبل از ملاقات رأس v را با $p(u,v)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳,۷ در گراف هم‌بند G، اگر u و v دو نقطه غیرمجاور باشند و $\{u,v\}$ مجموعه برشی نباشد، آن‌گاه یک همسایگی w برای u وجود دارد، به گونه‌ای که $p(w,v)<p(u,v)$ [۳۰].

لذا اگر G، ۳-هم‌بند باشد، برای هر v که $p(u,v)$ مینیمال[۱۷۰] باشد، رأس‌های u در همسایگی v هستند.

اکنون روش به دست آمده بر مبنای تولید درخت تصادفی فراگیر در یگ گراف را شرح می‌دهیم، به‌طوری که هر درخت فراگیر دقیقاً با احتمال یکسان برگردانده شده است.

قضیه ۴,۷ پرسه زدن تصادفی روی گراف G با نقطه آغازین u را در نظر بگیرید. برای هر رأس متفاوت از u، یالی

[۱۶۷] Metropolis filter

[۱۶۸] biased coin

[۱۶۹] exact stopping

[۱۷۰] minimal

را که برای اولین بار از آن وارد رأس شده‌ایم، علامت بزنید. مجموعه یال‌های علامت‌گذاری شده[171] را T می‌نامیم. با احتمال ۱، T یک درخت فراگیر است و هر درخت فراگیر با احتمال یکسان ایجاد می‌شود [۲۱].

البته فقط ادعای دوم نیاز به اثبات دارد، اما اهمیت زیادی ندارد. در ادامه برهانی بر حسب ایده اصلی جفت‌سازی آورده شده است، برای بررسی بیشتر [۳۱] را ببینید.

درخت فراگیر T با ریشه u را در نظر بگیرید. اگر $uv \in E(G)$ باشد، یک یال (جهت‌دار) به هر درخت فراگیر T' با ریشه v رسم می‌کنیم که T' از T با حذف اولین یال روی مسیر v به u و افزودن یک یال uv به دست آمده است. گراف جهت‌دار حاصل را H می‌نامیم. به‌وضوح هر درخت با ریشه v دارای درجه ورودی و خروجی $d(v)$ در H است و ازاین‌رو در توزیع ایستای پرسه زدن تصادفی روی H، احتمال وجود درخت فراگیر با ریشه معین، متناسب با درجه ریشه است (در G). اگر یک درخت فراگیر ازاین توزیع رسم کنیم و ریشه آن را ندانیم، می‌توانیم آن ریشه را از هر درخت فراگیر با احتمال یکسان، به دست آوریم.

مشاهداتی که پرسه زدن تصادفی روی G را به پرسه زدن تصادفی روی H القا می‌کند، به‌صورت زیر است. فرض کنید در رأس v از گراف G و در رأس (T,v) در H (که T یک درخت است) قرار داریم. اگر روی گراف G در طول یال vw حرکت کنیم، می‌توانیم با حذف اولین یال مسیر از w به v و افزودن یال vw به درخت فراگیر اخیر، به رأس (T',w) در H منتقل شویم.

همچنین مشاهده می‌کنیم در مدت زمانی که در پرسه زدن تصادفی روی G، همه رأس‌ها را ملاقات کردیم (یا هر مدت زمان بعد از آن) درخت فراگیر حاضر روی H درختی به‌صورت آخرین رأسی که در آن بوده‌ایم خواهد بود و ریشه آن نیز برابر با آخرین رأس ملاقات شده خواهد بود. برای مرتبط‌سازی این شیوه با قضیه ۴،۷، پرسه زدن تصادفی روی گراف G با N قدم را در نظر بگیرید (به‌طوری که N خیلی بزرگتر از زمان پوشش G است). تا زمانی که G گراف بدون جهت باشد، برگشت به عقب در پرسه زدن تصادفی مورد قبول است. اگر پرسه زدن تصادفی متناظری روی H انجام دهیم، با درخت ریشه‌دار[172] (T,v_N) به پایان می‌رسد که این درخت، همان درختی است که برای اولین بار با پرسه زدن معکوس وارد آن شده‌ایم، مگر این‌که بدون ملاقات همه رأس‌های G در N قدم، به v_0 برگردیم. قرار دهید $N \to \infty$، آن‌گاه متوسط احتمال به صفر میل کرده و توزیع (T,v_N) به توزیع ایستا روی H، که برای v_N ثابت روی هر درخت فراگیر یکنواخت است، میل می‌کند. این موضوع، قضیه ۴،۷ را ثابت می‌کند.

با مشاهده این قضیه، بدیهی است که بپرسیم آیا می‌توان خطای ناشی از عدم امکان ملاقات همه رأس‌ها در N قدم را نادیده گرفت؟ این موضوع به راحتی قابل تشخیص است. ازاین‌رو شاید در بعضی موارد لازم است که پرسه زدن کمی طولانی‌تر باشد. به‌طور کلی، می‌توان در یک پرسه زدن تصادفی روی گراف مشخص (یا زنجیر مارکوف)، قاعده توقف را تعریف کرد. در هر پرسه زدن تصادفی روی یک گراف (با رأس آغازین معلوم u)، قاعده توقف، "ایستادن" یا "حرکت" را تعیین می‌کند. بنابراین (الف) در نهایت با احتمال ۱ هر پرسه زدن تصادفی می‌ایستد و (ب) توزیع رأسی که پرسه زدن تصادفی در آن توقف کرده، ایستا است. همچنین قاعده‌های توقف تصادفی که پرتاب سکه چگونگی توقف را تعیین می‌کند را نیز شرح خواهیم داد.

[171]marked edges

[172]rooted tree

اولین مثال بالا نشان می‌دهد که در مدارها و گراف‌های کامل قاعده "آخرین رأس ملاقات شده[۱۷۳]" پاسخی برای حل مسئله ارائه می‌دهد (اگر بخواهیم شامل رأس آغازین نیز باشد، باید در آن تغییراتی ایجاد کنیم). در مواردی شبیه مثال دوم قصد داریم زمان توقف[۱۷۴] N را از موارد قبلی مستقل سازیم: صرفاً قصد داریم بعد از ملاقات تمام رأس‌های گراف G توقف کنیم، اما می‌خواهیم برگشت به عقب از آخرین رأس را نیز به عنوان یک پرسه زدن تصادفی حفظ کنیم. در ادامه یک طرح کلی در رابطه با این مسئله ارائه خواهیم داد.

البته باید مراقب باشیم و از قواعد بی‌اهمیت مثل تولید رأس v از توزیع ایستا و یا توقف بعد از مشاهده رأس v در بار اول پرهیز کنیم. هیچ شهودی برای رد این راه حل‌های بدیهی وجود ندارد اما باید قواعدی را که مورد استفاده کلی نیستند هدف گرفت، به خصوص از دانش پیشین[۱۷۵] در مورد توزیع ایستا استفاده نشود.

قواعد توقف تقریباً برای همه زنجیرهای مارکوف کلی وجود دارند. در [۳] یک الگوریتم تصادفی طرح می‌شود که یک عنصر از توزیع ایستا از زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر متناهی تولید می‌کند که فقط به یک وضعیت نیاز دارد و یک "جعبه سیاه[۱۷۶]" که وضعیت را به عنوان ورودی پذیرفته و یک گام ازاین وضعیت شبیه‌سازی[۱۷۷] کند. در [۳۵] یک قاعده توقف تصادفی ارائه می‌شود که تنها با دانستن تعداد وضعیت‌ها، یک عنصر از توزیع ایستا در هر زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر را تولید می‌کند. تحت فرض نادوره‌ای بودن زنجیر، این قاعده قطعی است.

173 last node visited

174 stopping time

175 priori knowledge

176 black box

177 simulate

برای آشنایی بیشتر با این نتیجه به بررسی مواردی که زنجیر مارکوف دو وضعیت دارد، می‌پردازیم. حالت‌های کلی (نه همه حالت‌ها) که ساختار بازگشتی دارد (شبیه به [۳]) به شرح زیر است:

$$v_0, v_1, v_2, \ldots \qquad (۱,۷)$$

را یک زنجیر مارکوف نادوره‌ای برگشت‌پذیر با وضعیت‌های $\{u,v\}$ در نظر می‌گیریم. برگشت‌پذیری یعنی احتمال‌های انتقال p_{uv} و p_{vu} مثبت هستند. نادوره‌ای بودن یعنی حداقل یکی از احتمال‌های p_{uu} و p_{vv} همیشه مثبت است. به راحتی می‌توان ایستایی توزیع‌های داده شده را بررسی کرد:

$$\pi(u) = \frac{p_{vu}}{p_{uv}+p_{vu}}, \ \ \pi(v) = \frac{p_{uv}}{p_{uv}+p_{vu}}.$$

قاعده توقف تصادفی که در ادامه بیان می‌کنیم می‌تواند بدون دانستن مقدار p_{ij} یا $\pi(i)$ و فقط با مشاهده دنباله (۱,۷) یک عنصر تصادفی از π تولید می‌کند:

قاعده ۱ پرتاب سکه اگر شیر آمد قرار می‌دهیم $i = 0$؛ در غیر این صورت i را اولین اندیس برای هر $v_i \neq v_0$ قرار می‌دهیم. اگر $v_{i+1} \neq v_i$ بود خروجی v_{i+1} است؛ وگرنه $i+1$ عنصر اول را نادیده گرفته و دوباره تکرار می‌کنیم.

اگر پرتاب سکه را دوست ندارید، می‌توانید برای شبیه‌سازی از خود زنجیر مارکوف استفاده کنید، این قاعده کاملاً قطعی است.

قاعده ۲ اولین جفت $i < j$ با ویژگی‌های زیر را مشخص می‌کنیم:

$$v_j = v_i,$$

$$v_{j+1} \neq v_{i+1},$$

$v_{j+2} \neq v_{j+1}$.

وضعیت v_i از تعداد دفعات فرد قبل از v_i رخ دهد

بین v_i و v_j هیچ عنصری نباشد.

خروجی v_{j+2} است.

اگر این روش مبهم به نظر می‌رسد، به بخش‌های اول و دوم و... توجه داشته باشید؛ با وقوع یک جفت با شاخص‌های اول تا چهارم، v_{j+1} با احتمال $1/2$ می‌تواند هر یک از وضعیت‌ها باشد.

طراحی قاعده توقف بالا زمان زیادی می‌برد. حتی نمی‌دانیم متوسط تعداد قدم‌ها در پرسه زدن تصادفی چندجمله‌ای در حداکثر زمان دسترسی چقدر است، چه رسد به زمان آمیختگی (که می‌دانیم ممکن است در n به‌صورت لگاریتمی باشد). از طرف دیگر اگر اجازه داشته باشیم از محاسبات کلی استفاده کنیم، می‌توان به قاعده توقفی دست یافت که به‌طور متوسط تعداد قدم‌ها دو برابر زمان آمیختگی τ باشد. قصد داریم یک پرسه زدن تصادفی با τ گام شروع کنیم، به این منظور یک سکه اریب پرتاب می‌کنیم، با احتمال $\pi(v_\tau)/2P_\tau(v_\tau)$ توقف کرده و با احتمال $1-\pi(v_\tau)/2P_\tau(v_\tau)$ وضعیت‌های قبل را فراموش کرده و از v_τ یک پرسه زدن تصادفی به طول τ شروع می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید احتمال این‌که بعد از k دوره در v توقف کنیم برابر $2^{-k}\pi(v)$ است که به $\pi(v)$ اضافه می‌شود. همچنین متوسط تعداد قدم‌ها 2τ است.

قاعده آستانه[178] یک نوع (نسبتاً) ساده از قاعده توقف است. این قاعده با تابع $t: V \to \mathbb{R}_+$ مشخص می‌شود که وابسته به نقطه آغازین v_0 است و به‌صورت زیر عمل می‌کند:

اگر $t(v_k) \le k$ توقف می‌کنیم؛

اگر $t(v_k) \ge k+1$ حرکت می‌کنیم؛

اگر $k < t(v_k) < k+1$ باشد یک سکه اریب پرتاب کرده و با احتمال $t(v_k)-k$ حرکت می‌کنیم اما با احتمال $k+1-t(v_k)$ می‌ایستیم.

متوسط تعداد قدم‌ها برای قاعده آستانه بهینه با نقطه آغازین v برابر با

$$\tau^* = \max_u H(u,v) - \sum_u \pi(u) H(u,v)$$

است. طبق شرح قاعده توقف با استفاده از زمان آمیختگی نتیجه می‌شود که $\tau^* \le 2\tau$. زیرا در تعریف زمان آمیختگی τ، مقدار ثابت انتخابی دلخواه $1/2$ وجود دارد در حالی که تعریف τ^* "متعارف" است، بهتر است که کمیت τ^* را زمان آمیختگی بنامیم.

از آن‌جا که قاعده توقف بهینه دارای خواص خوبی است، انتظار می‌رود که اجرایی کارآمد داشته باشد. تابع آستانه به‌صورت چندجمله‌ای محاسبه می‌شود، اما به اندازه کافی خوب نیست، زیرا قصد داریم این قوانین را روی گراف‌هایی که به‌صورت نمایی بزرگ می‌شوند، اعمال کنیم. با این وجود شرح قوانین توقف ساده و قابل اجرا با متوسط زمان قابل قیاس که آمیختگی تقریبی روی گراف‌هایی که به‌صورت نمایی بزرگ می‌شوند را به دست می‌دهد، مورد توجه است.

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله، پارامترهای پرسه زدن تصادفی از قبیل اولین زمان اصابت به یک رأس در گراف، اولین (آخرین) زمان اصابت به (از) زیرمجموعه‌ای از مجموعه رأس‌های گراف، میانگین زمان اصابت ماکسیمال، زمان دسترسی (زمان اصابت)، زمان

---

[178] threshold rule

رفت‌وآمد، زمان پوشش، زمان پوشش و بازگشت، نرخ آمیختگی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت و به کمک شاخه‌های نظریه گراف و فرایندهای تصادفی و همچنین ابزاری نظیر درخت فراگیر، مقادیر ویژه و ... کران‌های مناسب برای این پارامترها معرفی شد. مشاهده شد، در برخی پارامترهای پرسه زدن تصادفی و حتی محاسبه احتمال‌های متناظر، استفاده از تقارن می‌تواند کارساز باشد. اضافه کردن یک یال به گراف و تغییر در برخی پارامترهای پرسه زدن تصادفی از مطالب دیگری بود که مورد بررسی قرار گرفت. یکی از کابردهای کران زمان پوشش و زمان رفت‌وآمد در شاخه علوم کامپیوتر به ویژه مدیریت رمزگذاری برای شبکه محاسبات است. در این حالت، پس از شروع هم‌زمان دو پرسه زدن تصادفی روی یک گراف، مدت زمانی که طول می‌کشد تا آن دو پرسه زدن به یکدیگر برخورد کنند و همچنین ارائه روشی برای جلوگیری از تصادف تا حد ممکن، دو مقوله پژوهشی قابل توجه برای محققان هستند. طرح رمزگذاری مجوزی برای حمل پردازنده آن، برای انجام برخی از امور است و در هر زمان فقط یک پردازشگر آن را حمل می‌کند. در این جا، هدف یافتن متوسط زمان در حالتی است که دو پردازشگر با چند اختلاف، رمزگذاری را بر عهده داشته و به‌طور تصادفی از آن عبور کرده تا به دو رمز برخورد کنند و پس از آن سامانه به حالت نرمال باز خواهد گشت. نظر به این‌که ماتریس احتمال‌های انتقال به جز حالتی که گراف منتظم است، یک ماتریس متقارن نیست، می‌توان آن را با روش‌های موجود در شاخه جبر خطی، به یک ماتریس متقارن تبدیل کرد و با استفاده از نظریه طیفی ماتریس‌ها و قضیه فروبینیوس–پیرون نشان داد که توزیع حدی زنجیر مارکوف به مقدار آغازین وابسته نیست و همچنین حد ماتریس احتمال‌های انتقال چندمرحله‌ای برای تعداد مراحل زیاد به یک ماتریس تصادفی میل می‌کند که سطرهای آن توزیع ایستای زنجیر هستند. در ادامه، مطالعه عمیق‌تری در روابط بین پرسه زدن تصادفی و طیف‌ها با استخراج از تکنیک مقادیر ویژه و فرمول‌های طیفی برای محاسبه زمان دسترسی و زمان رفت‌وآمد و همچنین یافتن کران برای این پارامترها، آغاز گردیده و ثابت شد دسترسی به هدف‌های دورتر، سخت‌تر است. تکنیک مقادیر ویژه در نرخ آمیختگی نیز کاربرد دارد که در این مقاله به این مهم پرداخته شد. در ادامه، گراف به عنوان یک شبکه الکتریکی در نظر گرفته شد، به‌طوری که هر رأس، یک واحد مقاومت را نشان می‌دهد. اگر الکتریسیته در گراف جاری باشد، به گونه‌ای که از یک رأس وارد و از رأس دیگر خارج شود، با تعریف ولتاژ (به عنوان یک تابع هارمونیک) و یال‌های گراف (به‌صورت فنرهای متناسب با ثابت هوک واحد)، زمان رفت‌وآمد بین رأس‌ها محاسبه شدند. به جز روش استفاده از مقادیر ویژه برای محاسبه نرخ آمیختگی، روش‌های نظیر جفت‌سازی و میزان رسانایی معرفی شدند. در انتها به مهم‌ترین کاربرد پرسه زدن تصادفی در طراحی الگوریتم‌های کاربردی و نمونه‌گیری با پرسه زدن تصادفی به ویژه شمارش و حجم محاسبات، صافی متروپلیس و قوانین توقف اشاره شد. در پایان مشاهده شد، برای گراف‌های هم‌بند و نادوبخشی، توزیع زنجیر مارکوف به یک توزیع ایستا میل می‌کند. برای گراف‌های منتظم، این توزیع ایستا به‌صورت یکنواخت است و هر رأس در پرسه زدن تصادفی، بعد از تعدادی گام، سرانجام به توزیع یکنواخت میل خواهد کرد.

مراجع

[1] D. J. Aldous. and J. A. Fill. *Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs*. University of California. Berkeley. 2002.

[2] J. D. Annan. “A randomised approximation algorithm for counting the number of forests in dense graphs.” *Combin. Probab. Comput.* vol. 3. pp. 273-283. 1994. doi: 10.1017/S0963548300001188

[3] S. Asmussen. P. W. Glynn. and H. Thorisson. “Stationary detection in the initial transient problem.” *ACM T. Model. Comput. S.* vol. 2 pp. 130-157. 1992. doi: 10.1145/137926.137932

[4] L. Babai. “Monte Carlo algorithms in graph isomorphism testing.” *Universitè de Montè ral Tech. Rep.* vol. 79-10. pp. 1-33. 1979.

[23] J. L. Gross. J. Yellen. and M. Anderson. *Graph Theory and its Applications*. Chapman Hall/CRC. Third Edition. 2018.

[24] S. Hoory. N. Linial. and A. Wigderson. “Expander graphs and their applications". *B. Am. Math. Soc*. New Series. vol. 43(4): pp. 439–561. 2006. doi: 10.1090/S0273-0979-06-01126-8

[25] J. Huang and S. Li. “On the normalised Laplacian spectrum. degree-Kirchhoff index and spanning trees of graphs.” *B. Aust. Math. Soc*. vol. 91(3). pp. 353–367. 2015. doi: 10.1017/S0004972715000027

[26] P. E. T. Jorgensen. and E. P. J. Pearse. Resistance Boundaries of Infinite Networks, *Prog. Probab*. vol. 64. pp. 111-142. 2011. doi: 10.48550/arXiv.0909.1518

[27] A. Karzanov. and L. G. Khachiyan. On the conductance of order Markov chains. Order. vol. 8(1). pp. 7-15. 1991. doi: 10.1007/BF00385809

[28] J. Keilson. *Markov Chain Models-Rarity and Exponentiality*. Springer-Verlag. 1979.

[29] Kempton. M. “Non-Backtracking Random Walks and a Weighted Ihara's Theorem.” *Open J. Discrete Math.* 6. 207-226. 2016. doi: 10.48550/arXiv.1603.05553

[30] D. A. Levin. and Y. Peres. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Society. 2017.

[31] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises*. Akadèmiai Kiadó. Budapest-North Holland. Amsterdam. 1993.

[32] L. Lovász. *Graphs and geometry*. American Mathematical Soc. 2019.

[33] L. Lovász. and M. Simonovits. "Random walks in a convex body and an improved volume algorithm." *Random Struct. Algor.* vol. 4. pp. 359-412. 1993. doi: 10.1002/rsa.3240040402

[34] L. Lovász. and P. Winkler. “A note on the last new vertex visited by a random walk.” *J. Graph Theor.* vol. 17. pp. 593-596. 1993. doi: 10.1002/jgt.3190170505

[35] L. Lovász. and P. Winkler. “Exact mixing in an unknown Markov chain.” *Electron. J. Comb.* vol. 2. paper R15. pp. 1-14. 1995. doi: 10.37236/1209

[36] L. Lovász. and P. Winkler. “Mixing of random walks and other diffusions on a graph. Surveys in Combinatorics.” *Lond. Math. S.* vol. 218. 119-154. 1995. doi: 10.1017/CBO9780511662096.007

[37] P. Matthews. “Covering problems for Brownian motion on spheres.” *Ann. Prob.* vol. 16. pp. 189-199. 1998. doi: 10.1214/aop/1176991894

[38] N. Metropolis. A. Rosenblut. M. Rosenbluth. A. Teller. and E. Teller. “Equation of state calculation by fast computing machines.” *J. Chem. Physics*. vol. 21. pp. 1087-1092. 1953. doi: 10.1063/1.1699114

[39] A. Nachmias. “*Random Walks and Electric Networks.*” Planar Maps, Random Walks and Circle Packing. vol. 2243. pp. 11-31. 2020. doi: 10.1007/978-3-030-27968-4_2

[40] R. D. Nussbaum and S. M. Verduyn Lunel. “Generalizations of the Perron-Frobenius Theorem for

[5] L. Babai. and M. Szegedy. “Local expansion of symmetrical graphs.” *Comb. Probab. Comput.* vol. 1. pp. 1-11. 1992. doi: 10.1017/S0963548300000031

[6] G. Brightwell. and P. Winkler. “Maximum hitting time for random walks on graphs.” *Random Struct. Algor.* vol. 1. pp. 263-276. 1990. doi: 10.1002/rsa.3240010303

[7] H. Chen. “Random walks and the effective resistance sum rules.” *Discrete Appl. Math*. vol. 158. pp. 1691-1700. 2010. Doi: 10.1016/j.dam.2010.05.020

[8] H. Chen. and F. Zhang. *The rapid mixing of random walks defined by an n-cube*. Advances in Applied Mathematics. Elsevier. 2004.

[9] D. Coppersmith. P. Tetali. and P. Winkler. “Collisions among random walks on a graph.” *SIAM J. Discr. Math.* vol. 6. pp. 363-374. 1993. doi: 10.1137/0406029

[10] P. Diaconis. *Group Representations in Probability and Statistics*. Inst. of Math Statistics. Hayward. Californis. 1988.

[11] P. Diaconis. R. L. Graham. J. A. Morrison. “Asymptotic analysis of a random walk on a hypercube with many dimensions.” *Random Struct. Algor.* vol. 1, pp. 51-72. 1990. doi: 10.1002/rsa.3240010105

[12] P. Diaconis. and L. Saloff-Coste. “Comparison theorems for random walk on finite groups.” *Ann. Prob.* vol. 21. pp. 2131-2156. 1993. doi: 10.1214/aop/1176989013

[13] R. P. Dobrow. *Introduction to Stochastic Processes with R*. John Wiley & Sons. 2016.

[14] P. G. Doyle. and J. L. Snell. *Random walks and Electric Networks*. MAA. 1984.

[15] M. Dyer. and A. Frieze. “On the complexity of computing the volume of a polytope.” *SIAM J. Comp.* vol. 17. pp. 967-974. 1998. doi: 10.1137/0217060

[16] G. Elekes. “A geometric inequality and the complexity of computing volume.” *Lect. Notes Comput. Sc.* vol. 1. pp. 289-292. 1986. doi: 10.1007/BF02187701

[17] U. Feige. “A Tight Upper Bound on the Cover Time for Random Walks on Graphs.” *Random Struct. Algor.* vol. 6. pp. 51-54. 1995. doi: 10.1002/rsa.3240060106

[18] U. Feige. “A Tight Lower Bound on the Cover Time for Random Walks on Graphs.” *Random Struct. Algor.* vol. 6. pp. 433-438. 1995. doi: 10.1002/rsa.3240060406

[19] U. Feige. *Collecting Coupons on Trees and the Analysis of Random Walks*. Technical report CS93-20 of the Weizmann Institute. 1993.

[20] A. Georgakopoulos. and S. Wagner. “Hitting times. cover cost. and the wiener index of a tree.” J. Graph Theory. vol. 84(3). pp. 311-326. 2017. doi: 10.1002/jgt.22029

[21] G. Grimmett. *Probability on graphs*. Cambridge University Press. 2010.

[22] M. Grötschel. L. Lovász. and A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag. 1988.

Nonlinear Maps.*"* *Mem. Amer. Math. Soc.* vol. 138. pp. 1-98. 1999. doi: 0.1090/memo/0659

[41] G. Polya. "über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz." *Math. Annalen*. vol. 84. pp. 149-160. 1921. doi: 10.1007/BF01458701

[42] D. Rasteiro. "Random *Walks in Electric Networks.*" Computational Intelligence and Decision Making. vol. 61. pp. 259-265. 2013. doi: 10.1007/978-94-007-4722-7_24

[43] S. M. Ross. *Introduction to Probability Models*. 12th Edition. Academic Press. 2019.

[44] S. Schmidt. "On the quantum symmetry of distance-transitive graphs." *Adv. Math*. vol. 368. Article ID 107150. pp. 1-50. 2020. doi: 10.1016/j.aim.2020.107150

[45] R. Schneider. On a Formula for the Volume of Polytopes. *Lect. Notes Math.* vol. 2266. pp. 335-345. 2021. doi: 10.1007/978-3-030-46762-3_16

[46] B. Sericola. F. Castella. "*Hitting times on the lollipop graph.*" Centre Inria de l'université de Rennes. pp.1-27. 2023. HAL Id: hal-04143403

[47] P. Tetali. "Random walks and effective resistance of networks." *J. Theor. Probab.* vol. 1. pp. 101-109. 1991. doi: 10.1007/BF01046996

[48] D. J. A. Welsh. *Complexity: Knots. Colourings and Counting.* London Math. Soc. Lecture Note Series 186. Cambridge University Press. 1993.

[49] F. Xia. J. Liu. H. Nie. Y. Fu. L. Wan and X. Kong. "Random Walks: A Review of Algorithms and Applications." *IEEE Trans. Emerg. Top. Comput. Intell.* vol. 4. pp. 95-107. 2020. doi: 10.1109/TETCI.2019.2952908

[50] J. Zhou. C. Bu. H.J. Lai. "Edge-disjoint spanning trees and forests of graphs." *Discrete Appl. Math.* vol. 299. pp. 74-81. 2021. doi: 10.1016/j.dam.2021.04.024

[۵۱] م. ص. محققی. "ارائه الگوریتمی جهت تسریع روش تکرار سیاست در راستی‌آزمایی فرایندهای تصمیم مارکوف با استفاده از یادگیری ماشین." مجله محاسبات نرم، انتشار آنلاین، ۱۴۰۲.

dor: 10.22052/scj.2023.243360.1029

[۵۲] س. مهرجو، ف. خون‌جوش، س. دهقانیان. "درخت تجمیع داده براساس الگوریتم پویای شکل‌گیری رودخانه در شبکه حسگر بی‌سیم." مجله محاسبات نرم، دوره ۳، شماره ۲ - شماره پیاپی ۶، ۱۳۹۳، ص ۵۴-۶۷.

dor: 20.1001.1.23223707.1393.3.2.58.1

[۵۳] ا. ح. یداللهی، ح. صباغیان بیدگلی. "ارائه مدلی برای شبیه‌سازی انتشار ویروس کووید-۱۹ بر اساس زنجیره مارکوف گسسته زمان." مجله محاسبات نرم، انتشار آنلاین، ۱۴۰۲.

dor: 10.22052/scj.2023.246527.1076