



دانشگاه کاشان
University of Kashan

مجله محاسبات نرم SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



گراف‌های تک دور فرینال نسب به مجموع توان k -ام درجات گراف‌ها[✧]

علی قلاوند^۱، محقق پسا دکتری، مصطفی توکلی^{۱*}، دانشیار

^۱ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

چکیده

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۰۷ شهریور ماه ۱۴۰۱

پذیرش ۱۱ تیر ماه ۱۴۰۲

کلمات کلیدی:

گراف

مساله اکسترمال

توان درجه

مجموع توان درجات

گراف‌های تک دور فرینال

فرض کنید G یک گراف و $d_G(v)$ درجه راس v در گراف G باشد. در این صورت مجموع توان k -ام گراف G به صورت $\sum_k(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u)^k$ تعریف می‌شود. در این مقاله، یک رابطه بین عدد استرلینگ، تعداد درختان زیرمجموعه‌ها و مجموع توان k -ام درجات گراف‌های شیمیایی به دست خواهد آمد. همچنین گراف‌های تک دور فرینال براساس مجموع توان k -ام درجات گراف‌ها مشخص می‌شوند.

© ۱۴۰۲ نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

۱. مقدمه

فرض کنید G یک گراف با مجموعه راس $V(G)$ و مجموعه یال $E(G)$ است. برای هر راس $v \in V(G)$ ، درجه v برابر تعداد راس‌های از G است که با v مجاور بوده و از نماد $d_G(v)$ برای نمایش آن استفاده می‌شود. برای $i = 0, 1, 2, \dots, |V(G)| - 1$ ، از نماد $n_i(G)$ یا به‌طور خلاصه n_i برای نشان دادن تعداد راس‌ها از درجه i در گراف G استفاده می‌کنیم. به زبان ریاضی داریم:

$$n_i(G) = n_i = |\{v: v \in V(G), d_G(v) = i\}| \quad (۱)$$

فرض کنید k یک عدد حقیقی است. در این صورت مجموع

توان k -ام گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_k(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u)^k. \quad (۲)$$

برای آشنایی بیشتر با این مفهوم، مطالعه مراجع [۱]-[۳] پیشنهاد می‌شود.

در ریاضیات، به ویژه در ترکیبات، یک عدد استرلینگ از نوع دوم (یا عدد پارتیشن استرلینگ) تعداد روش‌هایی است که می‌توان مجموعه‌ای از n شیء را به k زیرمجموعه افراز کرد و با $S(n, k)$ نشان داده می‌شود. این عدد با فرمول صریح زیر به دست می‌آید:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i k_i (k-i)^n. \quad (۳)$$

با استفاده از معادله رابطه (۳) داریم:

✧ نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: ali.ghalavand.kh@gmail.com (قلاوند)

m_tavakoli@um.ac.ir (توکلی)

بنابراین با یک جایگذاری ساده می‌توان دید که حکم برقرار است. $\square$

قضیه ۲-۲. فرض کنید k یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی چهار است. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Sigma_k(G) = & S(k, 3)\Sigma_3(G) + 24S(k, 4)n_4(G) \\ & + 12S(k-1, 3)m \\ & - (12S(k, 3) \\ & - t(k, 3))\Sigma_2(G). \end{aligned} \quad (۹)$$

برهان. حکم به طور مستقیم از لم ۱-۲ به دست می‌آید. $\square$

نتیجه ۳-۲. فرض کنید k یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی چهار است. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Sigma_k(G) \geq & S(k, 3)\Sigma_3(G) + 12S(k-1, 3)m \\ & - (12S(k, 3) \\ & - t(k, 3))\Sigma_2(G) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\Delta(G) \leq 3$ باشد.

قضیه ۴-۲ [۸]. اگر G یک گراف با n راس و m یال باشد، آنگاه

$$\Sigma_2(G) \leq m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right). \quad (۱۱)$$

قضیه ۵-۲. اگر G یک گراف شیمیایی با n راس و m یال باشد، آنگاه

$$\Sigma_3(G) \leq 6m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right) - 22m + 6n_4 + 6n. \quad (۱۲)$$

برهان. فرض کنید G یک گراف شیمیایی و $v \in V(G)$ باشد. در این صورت اگر $d_G(v) \leq 3$ باشد، آنگاه

$$d_G(v) - 1)(d_G(v) - 2)(d_G(v) - 3) = 0 \quad (۱۳)$$

و اگر $d_G(v) = 4$ باشد، آنگاه

$$(d_G(v) - 1)(d_G(v) - 2)(d_G(v) - 3) = 6. \quad (۱۴)$$

بنابراین با انجام برخی محاسبات ساده می‌توان دید که

$$\Sigma_3(G) = 6\Sigma_2(G) - 22m + 6n_4 + 6n. \quad (۱۵)$$

پس با به کار بردن قضیه ۴-۲ داریم:

$$\Sigma_3(G) \leq 6m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right) - 22m + 6n_4 + 6n. \quad (۱۶)$$

و حکم ثابت است. $\square$

$$\begin{aligned} S(n, 3) &= \frac{1}{2}3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}, \\ S(n, 4) &= \frac{4^n}{24} + \frac{2^n}{4} - \frac{3^n}{6} - \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad (۴)$$

فرض کنید $H = \{1, 2, \dots, n\}$ باشد. حال، یک درخت از زیرمجموعه‌های H ، یک خانواده مانند Γ از زیرمجموعه‌های ناتهی H است به‌طوری‌که (الف) $H \in \Gamma$ و (ب) اگر $A, B \in \Gamma$ و $A \cap B \neq \emptyset$ ، آنگاه $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ است. فرض کنید $t(n, r)$ تعداد درخت‌های r عضوی از زیرمجموعه‌های یک مجموعه n -عضوی مانند H است. همچنین فرض کنید $t(n)$ تعداد کل درخت‌ها از زیرمجموعه‌های H است. در این صورت می‌توان دید که:

$$t(n) = \sum_{r=1}^{2n-1} t(n, r). \quad (۵)$$

مک‌موریس و زاسلاوسکی در مرجع [۴] ثابت کردند:

$$t(n, 3) = \frac{3}{2}3^n - 4 \times 2^n + \frac{7}{2}. \quad (۶)$$

مطالعه مراجع [۵]–[۷] پیشنهاد می‌شود.

۲. نتایج اصلی

در این بخش یک رابطه را بین عدد استرلینک، تعداد درختان زیرمجموعه‌ها و مجموع توان k -ام درجات گراف‌های شیمیایی به دست می‌آوریم. همچنین گراف‌های تک دور فرینال را بر اساس مجموع توان k -ام درجات گراف‌ها مشخص می‌کنیم.

لم ۱-۲. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Sigma_k(G) = & \left(\frac{1}{2}3^{k-1} - 2^{k-1} + \frac{1}{2}\right)\Sigma_3(G) + (4^k \\ & + 6 \times 2^k - 4 \times 3^k \\ & - 4)n_4(G) + (6 \times 3^{k-2} \\ & - 12 \times 2^{k-2} + 6)m - \left(\frac{1}{2}3^k \right. \\ & \left. - 2^{k+1} + \frac{5}{2}\right)\Sigma_2(G). \end{aligned} \quad (۷)$$

برهان. فرض کنید G یک گراف شیمیایی با m یال است. در این صورت طبق تعاریف می‌توان دید:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2}[n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4], \\ \Sigma_2(G) &= n_1 + 2^2n_2 + 3^2n_3 + 4^2n_4, \\ \Sigma_3(G) &= n_1 + 2^3n_2 + 3^3n_3 + 4^3n_4, \\ \Sigma_k(G) &= n_1 + 2^kn_2 + 3^kn_3 + 4^kn_4 \end{aligned} \quad (۸)$$

نتیجه ۶-۲. اگر G یک گراف شیمیایی با n راس و m یال باشد، آنگاه $\Sigma_3(G) \leq 6m(\frac{2m}{n-1} + n - 2) - 22m + 12n$ است.

برهان. با استفاده از تعریف، $n_4(G) \leq n$ است. بنابراین حکم از قضیه ۵-۲ به دست می‌آید. $\square$

در ادامه با به کار بردن رابطه مجوریزیشن، گراف‌های تک‌دور فرینال را بر اساس مجموع توان k -ام درجات گراف‌ها مشخص می‌کنیم.

فرض کنید G گرافی با مجموعه راس $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ است. همچنین برای $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ فرض کنید d_i درجه راس v_i است. به‌علاوه فرض کنید $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ باشد. در این صورت $D(G) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ را دنباله درجه G گوییم. فرض کنید $uv \in E(G)$ و $\{x, y\} \subseteq V(G)$ و $xy \notin E(G)$ در این صورت $G - uv$ گرافی است که از گراف G با حذف یال uv به دست می‌آید و $G + xy$ گرافی است که از گراف G با اضافه کردن یال xy به دست می‌آید.

فرض کنید G یک گراف همبند با تعداد راس‌های n و تعداد یال‌های m است. در این صورت G را یک درخت گوییم هرگاه $m = n - 1$ باشد و آن را یک گراف تک دور گوییم هرگاه $m = n$ باشد. از نمادهای $\mathcal{U}(n)$ و $\mathcal{T}(n)$ به‌ترتیب برای نمایش خانواده‌های درخت‌ها و گراف‌های تک دور همبند روی n راس استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ دنباله‌ی غیرافزایشی از اعداد حقیقی هستند. اگر برای $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$ و $k = 1, \dots, n - 1$ ، $\sum_{i=1}^k x_i \leq \sum_{i=1}^k y_i$ آنگاه می‌گوییم x به وسیله y مجورایز شده است و می‌نویسیم $x \preceq y$ اگر $x \preceq y$ و $x \neq y$ باشد، آنگاه از نماد $x < y$ به‌جای $x \preceq y$ استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $x_1, \dots, x_m$ و $y_1, \dots, y_m$ اعداد طبیعی هستند. در این صورت از نمادهای $(x_1^{(y_1)}, \dots, x_m^{(y_m)})$ و $(x_1^{(y_1)}, \dots, x_m^{(y_m)})$ به‌ترتیب برای نمایش مجموعه‌های درخت‌ها و گراف‌های تک دور همبند که برای x_i راس از درجه y_i دارند، استفاده می‌کنیم (وقتی $i = 1, 2, \dots, m$). توجه

کنید که این مجموعه‌ها ممکن است تهی باشند.

در زیر چند قضیه که در ادامه از آنها استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم.

قضیه ۷-۲ [۹]. فرض کنید G و G' دو گراف با دنباله درجه‌های به‌ترتیب $D(G)$ و $D(G')$ هستند. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) اگر $D(G) \preceq D(G')$ و $k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ باشد، آنگاه $\Sigma_k(G) \leq \Sigma_k(G')$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $D(G) = D(G')$ باشد.

ب) اگر $D(G) \preceq D(G')$ و $k \in (0, 1)$ باشد، آنگاه داریم $\Sigma_k(G') \leq \Sigma_k(G)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $D(G) = D(G')$ باشد.

قضیه ۸-۲ [۱۰]. فرض کنید T' یک درخت از مرتبه $n \geq 12$ است به طوری که $\Delta(T') = 3$ و $n_3(T') \geq 6$ باشد. اگر $D(T) < D(T')$ ، آنگاه $T \in \mathcal{T}(5^{(3)}, (n-12)^{(2)}, 7^{(1)})$ است.

فرض کنید n عددی طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. در این صورت تعریف می‌کنیم $F(n) = \{T \in \mathcal{T}(n) | \Delta(T) = 4\}$. **قضیه ۹-۲ [۱۰].** فرض کنید $T \in \mathcal{T}(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-9)^{(2)}, 6^{(1)})$ و $T' \in F(n)$ باشد. اگر $n_3(T') \geq 3$ و $n_4(T') = 1$ باشد، آنگاه $D(T) < D(T')$ است.

قضیه ۱۰-۲ [۱۰]. فرض کنید $T \in \mathcal{T}(2^{(4)}, (n-8)^{(2)}, 6^{(1)})$ و $T' \in F(n)$ باشد. اگر $n_4(T') \geq 2$ و $T' \notin \mathcal{T}(2^{(4)}, (n-8)^{(2)}, 6^{(1)})$ باشد، آنگاه $D(T) < D(T')$ است.

قضیه ۱۱-۲ [۱۰]. فرض کنید T' یک درخت از مرتبه n است به طوری که $n \geq 12$ و $\Delta(T') \geq 5$ باشد. اگر $T' \notin \mathcal{T}(1^{(5)}, (n-6)^{(2)}, 5^{(1)})$

و

$$T \in \mathcal{T}(1^{(5)}, (n-6)^{(2)}, 5^{(1)})$$

باشد، آنگاه $D(T) < D(T')$ است.

لم ۱۲-۲. اگر $n \geq 3$ یک عدد طبیعی باشد، آنگاه خانواده

پس داریم:

$$D(G + uv) = \left(d_1, \dots, d_m, 2, 2, \overbrace{1, \dots, 1}^{n-m-2} \right) \\ \leq \left(d'_1, \dots, d'_k, 2, 2, \overbrace{1, \dots, 1}^{n-k-2} \right) \quad (20) \\ \leq D(G' + xy).$$

و حکم ثابت است. $\square$

حال فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی سه است. همچنین فرض کنید $T \in T(n)$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(T) = \{T + uv : \{u, v\} \subseteq V(T), uv \notin E(T)\}. \quad (21)$$

به آسانی می‌توان دید که $\bigcup_{T \in T(n)} \varphi(T) = \mathcal{U}(n)$ است.

قضیه ۲-۱۶. فرض کنید T' یک درخت از مرتبه $n \geq 12$

است به طوری که $\Delta(T') = 3$ و $n_3(T') \geq 5$ باشد. اگر

$$G \in \mathcal{C}(5^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 5^{(1)})$$

و

$$G' \in (\varphi(T') \setminus \mathcal{C}(5^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 5^{(1)}))$$

باشد، آنگاه $D(G) < D(G')$ است.

برهان. اگر $n_3(T') = 5$ باشد، آنگاه

$$T' \in T(5^{(3)}, (n-12)^{(2)}, 7^{(1)})$$

در این حالت با به کار بردن قضیه ۲-۸ و لم ۲-۱۵ می‌توان دید که

$D(G) < D(G')$ است. بنابراین حکم در حالت کلی برقرار

است. $\square$

قضیه ۲-۱۷. فرض کنید $n_4(T') = 1$ و $T' \in F(n)$

اگر $n_3(T') \geq 2$ باشد.

$$G' \in (\varphi(T') \setminus \mathcal{C}(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)}))$$

و

$$G \in \mathcal{C}(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)})$$

باشد، آنگاه $D(G) < D(G')$ است.

برهان. اگر $n_3(T') = 2$ باشد، آنگاه

$$T' \in T(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-9)^{(2)}, 6^{(1)}). \quad (22)$$

با به کار بردن لم ۲-۱۵، $D(G) < D(G')$ است. حال فرض

کنید $n_3(T') > 2$ در این صورت با استفاده از قضیه ۲-۹ و

$C(x_1^{(y_1)}, \dots, x_m^{(y_m)})$ شامل یک گراف تک دور همبند از

مرتبه n است اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^m x_i y_i = 2n$ باشد.

برهان. برای $n \geq 3$ فرض کنید $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ اعداد

طبیعی هستند. به عنوان یک نتیجه معروف از نظریه گراف

می‌توان گفت که یک گراف تک دور همبند با دنباله درجه

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ وجود دارد اگر و تنها $\sum_{i=1}^n a_i = 2n$ باشد.

بنابراین خانواده $C(x_1^{(y_1)}, \dots, x_m^{(y_m)})$ شامل یک گراف تک

دور همبند از مرتبه n است اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^m x_i y_i = 2n$

باشد. $\square$

توجه ۲-۱۳. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی

دوازده است. با به کار بردن لم ۲-۱۲ می‌توان دید که همه

کلاس‌های گراف‌های تک دور همبند تعریف شده در این مقاله

نا تهی هستند.

لم ۲-۱۴ [۱۱]. فرض کنید G یک گراف همبند با تعداد

راس‌های n و تعداد یال‌های m است. اگر $c = m - n + 1$

باشد، آنگاه

$$n_1(G) = 2 - 2c + \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i-2)n_i, \quad (17) \\ n_2(G) = 2c + n - 2 - \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i-1)n_i.$$

لم ۲-۱۵. فرض کنید G و G' دو گراف از مرتبه n هستند به

طوری که $\{x, y\} \subseteq V(G')$ ، $\{u, v\} \subseteq V(G)$ و

$d_G(u) = d_G(v) = 1$ و $d_{G'}(x) \geq d_{G'}(y) \geq 1$ باشد. در

این صورت اگر $D(G) \leq D(G')$ باشد، آنگاه

$$D(G + uv) \leq D(G' + xy). \quad (18)$$

برهان. فرض کنید $D(G) = (d_1, \dots, d_m, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n-m})$ و

$D(G') \leq D(G)$ باشد. حال طبق تعریف داریم

$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V(G')} d_{G'}(v)$ بنابراین یک عدد

طبیعی مانند $k (\leq m)$ وجود دارد به طوری که

$$D(G') = (d'_1, \dots, d'_k, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{n-k}). \quad (19)$$

قضیه ۲-۲۱. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. همچنین برای $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ فرض کنید G_i گراف تعریف شده در توجه ۲-۲۰ است. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(الف)

$$\begin{aligned} \Sigma_2(G_1) &< \Sigma_2(G_2) < \Sigma_2(G_3) < \Sigma_2(G_4) \\ &= \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6) \\ &= \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8) \\ &= \Sigma_2(G_9) < \Sigma_2(G_{10}) \\ &= \Sigma_2(G_{11}) = \Sigma_2(G_{12}) \\ &= \Sigma_2(G_{15}) < \Sigma_2(G_{13}) \\ &= \Sigma_2(G_{14}) = \Sigma_2(G_{17}) \\ &< \Sigma_2(G_{16}) = \Sigma_2(G_{18}) \\ &< \Sigma_2(G_{19}). \end{aligned} \quad (24)$$

(ب)

$$\begin{aligned} \Sigma_3(G_1) &< \Sigma_3(G_2) < \Sigma_3(G_3) < \Sigma_3(G_4) \\ &< \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6) \\ &< \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8) \\ &< \Sigma_3(G_9) < \Sigma_3(G_{10}) \\ &< \Sigma_3(G_{11}) < \Sigma_3(G_{12}) \\ &< \Sigma_3(G_{13}) < \Sigma_3(G_{14}) \\ &= \Sigma_3(G_{15}) < \Sigma_3(G_{16}) \\ &= \Sigma_3(G_{17}) < \Sigma_3(G_{18}) \\ &< \Sigma_3(G_{19}). \end{aligned} \quad (25)$$

(پ) اگر $k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Sigma_k(G_1) &< \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3) \\ &< \min\{\Sigma_k(G_4), \Sigma_k(G_5), \Sigma_k(G_6), \Sigma_k(G_7), \\ &\Sigma_k(G_8), \Sigma_k(G_9), \Sigma_k(G_{10}), \Sigma_k(G_{11}), \\ &\Sigma_k(G_{12}), \Sigma_k(G_{13}), \Sigma_k(G_{14}), \Sigma_k(G_{15}), \\ &\Sigma_k(G_{16}), \Sigma_k(G_{17}), \Sigma_k(G_{18}), \Sigma_k(G_{19})\}. \end{aligned} \quad (26)$$

(ت) اگر $k \in (0, 1)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Sigma_k(G_1) &> \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3) \\ &> \max\{\Sigma_k(G_4), \Sigma_k(G_5), \Sigma_k(G_6), \Sigma_k(G_7), \\ &\Sigma_k(G_8), \Sigma_k(G_9), \Sigma_k(G_{10}), \Sigma_k(G_{11}), \\ &\Sigma_k(G_{12}), \Sigma_k(G_{13}), \Sigma_k(G_{14}), \Sigma_k(G_{15}), \\ &\Sigma_k(G_{16}), \Sigma_k(G_{17}), \Sigma_k(G_{18}), \Sigma_k(G_{19})\}. \end{aligned} \quad (27)$$

برهان. اگر مقدار k در جداول (۱) تا (۷) را به ترتیب دو و سه در نظر بگیریم، آنگاه با برخی محاسبات ساده می‌توان بررسی کرد که حالت‌های (الف) و (ب) برقرار هستند.

(پ) با استفاده از جدول (۱) داریم:

$$\Sigma_k(G_1) - \Sigma_k(G_2) = (2 \times 2^k) - (3^k + 1). \quad (28)$$

حال اگر فرض کنید $x = (2, 2)$ و $y = (3, 1)$ باشد، آنگاه

لم ۲-۱۵، $D(G) < D(G')$ است. بنابراین حکم در حالت کلی برقرار است. □

قضیه ۲-۱۸. فرض کنید $T' \in F(n)$ و $n_4(T') \geq 2$ باشد. اگر $G' \in (\varphi(T') \setminus C(2^{(4)}, (n-6)^{(2)}, 4^{(1)}))$

و

$$G \in C(2^{(4)}, (n-6)^{(2)}, 4^{(1)})$$

باشد، آنگاه $D(G) < D(G')$ است.

برهان. حکم به طور مستقیم از قضیه ۲-۱۰ و لم ۲-۱۵ به دست می‌آید. □

قضیه ۲-۱۹. فرض کنید T' یک درخت از مرتبه $n \geq 12$ است به طوری که $\Delta(T') \geq 5$ باشد. اگر

$$G \in C(1^{(5)}, (n-4)^{(2)}, 3^{(1)})$$

و

$$G' \in (\varphi(T') \setminus C(1^{(5)}, (n-4)^{(2)}, 3^{(1)}))$$

باشد آنگاه $D(G) < D(G')$ است.

برهان. حکم به طور مستقیم از قضیه ۲-۱۱ و لم ۲-۱۵ به دست می‌آید. □

توجه ۲-۲۰. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. در این صورت برای $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} G_1 &\cong C_n, \\ G_2 &\in C(1^{(3)}, (n-2)^{(2)}, 1^{(1)}), \\ G_3 &\in C(2^{(3)}, (n-4)^{(2)}, 2^{(1)}), \\ G_4 &\in C(3^{(3)}, (n-6)^{(2)}, 3^{(1)}), \\ G_5 &\in C(1^{(4)}, (n-3)^{(2)}, 2^{(1)}), \\ G_6 &\in C(4^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 4^{(1)}), \\ G_7 &\in C(1^{(4)}, 1^{(3)}, (n-5)^{(2)}, 3^{(1)}), \\ G_8 &\in C(5^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 5^{(1)}), \\ G_9 &\in C(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)}), \\ G_{10} &\in C(6^{(3)}, (n-12)^{(2)}, 6^{(1)}), \\ G_{11} &\in C(1^{(4)}, 3^{(3)}, (n-9)^{(2)}, 5^{(1)}), \\ G_{12} &\in C(2^{(4)}, (n-6)^{(2)}, 4^{(1)}), \\ G_{13} &\in C(1^{(4)}, 4^{(3)}, (n-11)^{(2)}, 6^{(1)}), \\ G_{14} &\in C(2^{(4)}, 1^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 5^{(1)}), \\ G_{15} &\in C(1^{(5)}, (n-4)^{(2)}, 3^{(1)}), \\ G_{16} &\in C(2^{(4)}, 2^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 6^{(1)}), \\ G_{17} &\in C(1^{(5)}, 1^{(3)}, (n-6)^{(2)}, 4^{(1)}), \\ G_{18} &\in C(1^{(5)}, 2^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 5^{(1)}), \\ G_{19} &\in C(1^{(5)}, 1^{(4)}, (n-7)^{(2)}, 5^{(1)}). \end{aligned} \quad (29)$$

جدول (۴): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(3^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 5^{(1)})$ و مجموع توان k -ام درجات آنها

خانواده	Σ_k
$C(3^{(3)}, (n-6)^{(2)}, 3^{(1)})$	$3 \times 3^k + (n-6)2^k + 3$
$C(4^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 4^{(1)})$	$4 \times 3^k + (n-8)2^k + 4$
$C(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)})$	$4^k + 2 \times 3^k + (n-7)2^k + 4$
$C(5^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 5^{(1)})$	$5 \times 3^k + (n-10)2^k + 5$
$C(1^{(4)}, 3^{(3)}, (n-9)^{(2)}, 5^{(1)})$	$4^k + 3 \times 3^k + (n-9)2^k + 5$
$C(2^{(4)}, 1^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 5^{(1)})$	$2 \times 4^k + 3^k + (n-8)2^k + 5$

جدول (۵): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(4^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 6^{(1)})$ و مجموع توان k -ام درجات آنها

خانواده	Σ_k
$C(4^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 4^{(1)})$	$4 \times 3^k + (n-8)2^k + 4$
$C(5^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 5^{(1)})$	$5 \times 3^k + (n-10)2^k + 5$
$C(1^{(4)}, 3^{(3)}, (n-9)^{(2)}, 5^{(1)})$	$4^k + 3 \times 3^k + (n-9)2^k + 5$
$C(6^{(3)}, (n-12)^{(2)}, 6^{(1)})$	$6 \times 3^k + (n-12)2^k + 6$
$C(1^{(4)}, 4^{(3)}, (n-11)^{(2)}, 6^{(1)})$	$4^k + 4 \times 3^k + (n-11)2^k + 6$
$C(2^{(4)}, 2^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 6^{(1)})$	$2 \times 4^k + 2 \times 3^k + (n-10)2^k + 6$

جدول (۶): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(4)}, (n-5)^{(2)}, 4^{(1)})$ و مجموع توان k -ام درجات آنها

خانواده	Σ_k
$C(1^{(4)}, (n-3)^{(2)}, 2^{(1)})$	$4^k + (n-3)2^k + 2$
$C(1^{(4)}, 1^{(3)}, (n-5)^{(2)}, 3^{(1)})$	$4^k + 3^k + (n-5)2^k + 3$
$C(1^{(5)}, (n-4)^{(2)}, 3^{(1)})$	$5^k + (n-4)2^k + 3$
$C(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)})$	$4^k + 2 \times 3^k + (n-7)2^k + 4$
$C(1^{(5)}, 1^{(3)}, (n-6)^{(2)}, 4^{(1)})$	$5^k + 3^k + (n-6)2^k + 4$

جدول (۷): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(4)}, 1^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 5^{(1)})$ و مجموع توان k -ام درجات آنها

خانواده	Σ_k
$C(1^{(4)}, 1^{(3)}, (n-5)^{(2)}, 3^{(1)})$	$4^k + 3^k + (n-5)2^k + 3$
$C(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)})$	$4^k + 2 \times 3^k + (n-7)2^k + 4$
$C(2^{(4)}, (n-6)^{(2)}, 4^{(1)})$	$2 \times 4^k + (n-6)2^k + 4$
$C(1^{(4)}, 3^{(3)}, (n-9)^{(2)}, 5^{(1)})$	$4^k + 3 \times 3^k + (n-9)2^k + 5$
$C(2^{(4)}, 1^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 5^{(1)})$	$2 \times 4^k + 3^k + (n-8)2^k + 5$
$C(1^{(5)}, 2^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 5^{(1)})$	$5^k + 2 \times 3^k + (n-8)2^k + 5$
$C(1^{(5)}, 1^{(4)}, (n-7)^{(2)}, 5^{(1)})$	$5^k + 4^k + (n-7)2^k + 5$

واضح است که $x < y$ است. بنابراین با به کار بردن قسمت (الف) قضیه ۷-۲ داریم $(3^k + 1) < (2 \times 2^k)$. پس با استفاده از معادله (۲۸) می‌توان دید که $\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2)$ برقرار است. اثبات سایر حالت‌ها باقیمانده از (پ)، مشابه با این حالت است و لذا از بیان آنها در اینجا صرف‌نظر می‌شود. (ت) با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۷-۲ و یک روش مشابه با قسمت (پ) می‌توان دید که حکم در این حالت برقرار است. □

جدول (۱): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T((n-2)^{(2)}, 2^{(1)})$ و مجموع توان k -ام درجات آنها

خانواده	Σ_k
$C(n^{(2)})$	$n2^k$
$C(1^{(3)}, (n-2)^{(2)}, 1^{(1)})$	$3^k + (n-2)2^k + 1$
$C(2^{(3)}, (n-4)^{(2)}, 2^{(1)})$	$2 \times 3^k + (n-4)2^k + 2$

جدول (۲): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(3)}, (n-4)^{(2)}, 3^{(1)})$ و مجموع توان k -ام درجات آنها

خانواده	Σ_k
$C(1^{(3)}, (n-2)^{(2)}, 1^{(1)})$	$3^k + (n-2)2^k + 1$
$C(2^{(3)}, (n-4)^{(2)}, 2^{(1)})$	$2 \times 3^k + (n-4)2^k + 2$
$C(1^{(4)}, (n-3)^{(2)}, 2^{(1)})$	$4^k + (n-3)2^k + 2$
$C(3^{(3)}, (n-6)^{(2)}, 3^{(1)})$	$3 \times 3^k + (n-6)2^k + 3$
$C(1^{(4)}, 1^{(3)}, (n-5)^{(2)}, 3^{(1)})$	$4^k + 3^k + (n-5)2^k + 3$

جدول (۳): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(2^{(3)}, (n-6)^{(2)}, 4^{(1)})$ و مجموع توان k -ام درجات آنها

خانواده	Σ_k
$C(2^{(3)}, (n-4)^{(2)}, 2^{(1)})$	$2 \times 3^k + (n-4)2^k + 2$
$C(3^{(3)}, (n-6)^{(2)}, 3^{(1)})$	$3 \times 3^k + (n-6)2^k + 3$
$C(1^{(4)}, 1^{(3)}, (n-5)^{(2)}, 3^{(1)})$	$4^k + 3^k + (n-5)2^k + 3$
$C(4^{(3)}, (n-8)^{(2)}, 4^{(1)})$	$4 \times 3^k + (n-8)2^k + 4$
$C(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)})$	$4^k + 2 \times 3^k + (n-7)2^k + 4$
$C(2^{(4)}, (n-6)^{(2)}, 4^{(1)})$	$2 \times 4^k + (n-6)2^k + 4$

۱۷، ۱۸-۲، ۱۹-۲ و قسمت (الف) ۷-۲ به دست می‌آید.

(ب) با به کار بردن قسمت (ب) قضیه ۲۱-۲ داریم:

$$\begin{aligned} \Sigma_3(G_1) &< \Sigma_3(G_2) < \Sigma_3(G_3) < \Sigma_3(G_4) \\ &< \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6) \\ &< \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8). \end{aligned} \quad (34)$$

همچنین اگر $G \in \{G_9, G_{10}, \dots, G_{19}\}$ باشد، آنگاه دوباره

قسمت (ب) قضیه ۲۱-۲ حکم را به ما می‌دهد. در غیر این

صورت حکم از قضیه‌های ۱۶-۲، ۱۷-۲، ۱۸-۲، ۱۹-۲ و

قسمت (الف) ۷-۲ نتیجه می‌شود.

(پ) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۲۱-۲ داریم:

$$\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3). \quad (35)$$

به علاوه اگر $\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3)$ باشد، آنگاه

دوباره قسمت (پ) قضیه ۲۱-۲ حکم را نتیجه می‌دهد. در غیر

این صورت قضیه‌های ۱۶-۲، ۱۷-۲، ۱۸-۲، ۱۹-۲ و قسمت

(الف) ۷-۲ حکم را به ما می‌دهند.

(ت) با به کار بردن قسمت (ت) قضیه ۲۱-۲ داریم:

$$\Sigma_k(G_1) > \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3). \quad (36)$$

همچنین اگر $G \in \{G_4, G_5, \dots, G_{19}\}$ باشد، آنگاه دوباره

قسمت (ت) قضیه ۲۱-۲ حکم را به ما می‌دهد. در غیر این

صورت حکم از قضیه‌های ۱۶-۲، ۱۷-۲، ۱۸-۲، ۱۹-۲ و

قسمت (ب) قضیه ۷-۲ به دست می‌آید. $\square$

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافعی ندارند.

قضیه ۲۲-۲. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی

دوازده است. همچنین برای $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ فرض کنید G_i

گراف تعریف شده در توجه ۲۰-۲ است. در این صورت

گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(الف) اگر $G \in \mathcal{U}(n) \setminus \{G_1, G_2, \dots, G_9\}$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Sigma_2(G_1) &< \Sigma_2(G_2) < \Sigma_2(G_3) < \Sigma_2(G_4) \\ &= \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6) \\ &= \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8) \\ &= \Sigma_2(G_9) < \Sigma_2(G). \end{aligned} \quad (29)$$

(ب) اگر $G \in \mathcal{U}(n) \setminus \{G_1, G_2, \dots, G_8\}$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \Sigma_3(G_1) &< \Sigma_3(G_2) < \Sigma_3(G_3) < \Sigma_3(G_4) \\ &< \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6) \\ &< \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8) \\ &< \Sigma_3(G). \end{aligned} \quad (30)$$

(پ) اگر $k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ باشد و

$G \in \mathcal{U}(n) \setminus \{G_1, G_2, G_3\}$ آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3) < \Sigma_k(G). \quad (31)$$

(ت) اگر $k \in (0, 1)$ و $G \in \mathcal{U}(n) \setminus \{G_1, G_2, G_3\}$ باشد، آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) > \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3) > \Sigma_k(G). \quad (32)$$

برهان. با استفاده از قسمت (الف) قضیه ۲۱-۲ داریم:

$$\begin{aligned} \Sigma_2(G_1) &< \Sigma_2(G_2) < \Sigma_2(G_3) < \Sigma_2(G_4) \\ &= \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6) \\ &= \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8) \\ &= \Sigma_2(G_9). \end{aligned} \quad (33)$$

همچنین اگر $G \in \{G_{10}, G_{11}, \dots, G_{19}\}$ باشد، آنگاه دوباره با

استفاده از قسمت (الف) قضیه ۲۱-۲ می‌توان دید که حکم

برقرار است. در غیر این صورت حکم از قضیه‌های ۱۶-۲، ۱۷-۲،

مراجع

- [1] K.Ch. Das, "Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph," Discrete Math., vol. 285, no. 1-3, pp. 57-66, 2004, doi: 10.1016/j.disc.2004.04.007.
- [2] K.Ch. Das, "Sharp bounds for the sum of the squares of the degrees of a graph," Kragujevac J. Math., vol. 25, no. 25, pp. 31-49, 2003.
- [3] Y.S. Yoon and J.K. Kim, "A relationship between bounds on the sum of squares of degrees of a graph," J. Appl. Math. Comput., vol. 21, pp. 233-238, 2006, doi: 10.1007/BF02896401.
- [4] F.R. McMorris and T. Zaslavsky, "The number of cladistic characters," Math. Biosci., vol. 54, no. 1-2, pp. 3-10, 1981, doi: 10.1016/0025-5564(81)90071-7.
- [5] S. Rasouli and F. Khaksar Haghami, "Maximal, prime and minimal prime filters in residuated lattices," Soft Comput. J., vol. 11, no. 1, pp. 106-119, 2022, doi: 10.22052/scj.2023.243375.1032 [In Persian].
- [6] K. Fathalikhani and A.R. Ashrafi, "Metric and combinatorial properties of fibonacci and lucas cubes," Soft Comput. J., vol. 5, no. 1, pp. 78-100, 2017 [In Persian].

- [7] A. Khaleghi Tabar and R. Farazkhish, "Routing improvement for vehicular Ad Hoc networks (VANETs) using nature inspired algorithms," *Soft Comput. J.*, vol. 6, no. 2, pp. 72-85, 2018, doi: 20.1001.1.23223707.1396.6.2.6.0 [In Persian].
- [8] D. de Caen, "An upper bound on the sum of the squares of the degrees in a graph," *Discrete Math.*, vol. 185, on. 1-3, pp. 245-248, 1998, doi: 10.1016/S0012-365X(97)00213-6.
- [9] M. Liu and B. Liu, "Some properties of the first general Zagreb index," *Australas. J. Combin.*, vol. 47, pp. 285-294, 2010.
- [10] M. Eliasi and A. Ghalavand, "Extremal trees with respect to some versions of zagreb indices via majorization," *Iranian J. Math. Chem.*, vol. 8, no. 4, pp. 391-401, 2017, doi: 10.22052/ijmc.2017.46693.1161.
- [11] A. Ghalavand, A.R. Ashrafi, and I. Gutman, "Extremal graphs for the second multiplicative Zagreb index," *Bull. Int. Math. Virtual Inst.*, vol. 8, no. 2, pp. 369-383, 2018.