مجله محاسبات نرم، جلد ۱۱، شماره ۲ (پاییز و زمستان ۱۴۰۱)، صفحه ۱۶ـ۲۳
https://doi.org/10.22052/scj.2023.248230.1092

مجله محاسبات نرم
SOFT COMPUTING JOURNAL
تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir
University of Kashan

گراف‌های تک دور فرینال نسب به مجموع توان k–ام درجات گراف‌ها✧

علی قلاوند[1]، محقق پسا دکتری، مصطفی توکلی[1*]، دانشیار
[1] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت ۰۷ شهریور ماه ۱۴۰۱
پذیرش ۱۱ تیر ماه ۱۴۰۲

کلمات کلیدی:
گراف
مساله اکسترمال
توان درجه
مجموع توان درجات
گراف‌های تک دور فرینال

چکیده

فرض کنید G یک گراف و $d_G(v)$ درجه راس v در گراف G باشد. در این صورت مجموع توان k–ام گراف G به صورت $\sum_k(G) = \sum_{u\in V(G)} d_G(u)^k$ تعریف می‌شود. در این مقاله، یک رابطه بین عدد استرلینگ، تعداد درختان زیرمجموعه‌ها و مجموع توان k–ام درجات گراف‌های شیمیایی به دست خواهد آمد. همچنین گراف‌های تک دور فرینال براساس مجموع توان k–ام درجات گراف‌ها مشخص می‌شوند.

۱. مقدمه

فرض کنید G یک گراف با مجموعه راس $V(G)$ و مجموعه یال $E(G)$ است. برای هر راس $v \in V(G)$، درجه v برابر تعداد راس‌های از G است که با v مجاور بوده و از نماد $d_G(v)$ برای نمایش آن استفاده می‌شود. برای $i = 0,1,2,\ldots,|V(G)|-1$، از نماد $n_i(G)$ یا به‌طور خلاصه n_i برای نشان دادن تعداد راس‌ها از درجه i در گراف G استفاده می‌کنیم. به زبان ریاضی داریم:

$$n_i(G) = n_i = |\{v: v \in V(G), d_G(v) = i\}| \qquad (۱)$$

فرض کنید k یک عدد حقیقی است. در این صورت مجموع توان k–ام گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Sigma_k(G) = \sum_{u\in V(G)} d_G(u)^k. \qquad (۲)$$

برای آشنایی بیشتر با این مفهوم، مطالعه مراجع [۱]–[۳] پیشنهاد می‌شود.

در ریاضیات، به ویژه در ترکیبات، یک عدد استرلینگ از نوع دوم (یا عدد پارتیشن استرلینگ) تعداد روش‌هایی است که می‌توان مجموعه‌ای از n شیء را به k زیرمجموعه افراز کرد و با $S(n,k)$ نشان داده می‌شود. این عدد با فرمول صریح زیر به دست می‌آید:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n. \qquad (۳)$$

با استفاده از معادله رابطه (۳) داریم:

✧ نوع مقاله: پژوهشی
* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: ali.ghalavand.kh@gmail.com (قلاوند)
m_tavakoli@um.ac.ir (توکلی)

نحوه ارجاع به مقاله: علی قلاوند و مصطفی توکلی، «گراف‌های تک دور فرینال نسب به مجموع توان k–ام درجات گراف‌ها»، مجله محاسبات نرم، جلد ۱۱، شماره ۲، صفحات ۱۶ـ۲۳، پاییز و زمستان ۱۴۰۱.

$$S(n,3) = \frac{1}{2}3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2},$$
$$S(n,4) = \frac{4^n}{24} + \frac{2^n}{4} - \frac{3^n}{6} - \frac{1}{6}. \quad (۴)$$

فرض کنید $H = \{1,2,\dots,n\}$ باشد. حال، یک درخت از زیرمجموعه‌های H، یک خانواده مانند Γ از زیرمجموعه‌های ناتهی H است به‌طوری‌که (الف) $H \in \Gamma$ و (ب) اگر $A, B \in \Gamma$ و $A \cap B \neq \emptyset$، آنگاه $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ است. فرض کنید $t(n,r)$ تعداد درخت‌های r عضوی از زیرمجموعه‌های یک مجموعه n–عضوی مانند H است. همچنین فرض کنید $t(n)$ تعداد کل درخت‌ها از زیرمجموعه‌های H است. در این صورت می‌توان دید که:

$$t(n) = \sum_{r=1}^{2n-1} t(n,r). \quad (۵)$$

مک‌موریس و زاسلاوسکی در مرجع [۴] ثابت کردند:

$$t(n,3) = \frac{3}{2}3^n - 4 \times 2^n + \frac{7}{2}. \quad (۶)$$

مطالعه مراجع [۵]- [۷] پیشنهاد می‌شود.

۲. نتایج اصلی

در این بخش یک رابطه را بین عدد استرلینک، تعداد درختان زیرمجموعه‌ها و مجموع توان k–ام درجات گراف‌های شیمیایی به دست می‌آوریم. همچنین گراف‌های تک دور فرینال را بر اساس مجموع توان k–ام درجات گراف‌ها مشخص می‌کنیم.

لم ۲-۱. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آنگاه

$$\Sigma_k(G) = (\frac{1}{2}3^{k-1} - 2^{k-1} + \frac{1}{2})\Sigma_3(G) + (4^k + 6 \times 2^k - 4 \times 3^k - 4)n_4(G) + (6 \times 3^{k-2} - 12 \times 2^{k-2} + 6)m - (\frac{1}{2}3^k - 2^{k+1} + \frac{5}{2})\Sigma_2(G). \quad (۷)$$

برهان. فرض کنید G یک گراف شیمیایی با m یال است. در این صورت طبق تعاریف می‌توان دید:

$$m = \frac{1}{2}[n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4],$$
$$\Sigma_2(G) = n_1 + 2^2n_2 + 3^2n_3 + 4^2n_4, \quad (۸)$$
$$\Sigma_3(G) = n_1 + 2^3n_2 + 3^3n_3 + 4^3n_4,$$
$$\Sigma_k(G) = n_1 + 2^kn_2 + 3^kn_3 + 4^kn_4$$

بنابراین با یک جایگذاری ساده می‌توان دید که حکم برقرار است. □

قضیه ۲-۲. فرض کنید k یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی چهار است. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آنگاه

$$\Sigma_k(G) = S(k,3)\Sigma_3(G) + 24S(k,4)n_4(G) + 12S(k-1,3)m - \big(12S(k,3) - t(k,3)\big)\Sigma_2(G). \quad (۹)$$

برهان. حکم به طور مستقیم از لم ۲-۱ به دست می‌آید. □

نتیجه ۲-۳. فرض کنید k یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی چهار است. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آنگاه

$$\Sigma_k(G) \geq S(k,3)\Sigma_3(G) + 12S(k-1,3)m - (12S(k,3) - t(k,3))\Sigma_2(G) \quad (۱۰)$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\Delta(G) \leq 3$ باشد.

قضیه ۲-۴ [۸]. اگر G یک گراف با n راس و m یال باشد، آنگاه

$$\Sigma_2(G) \leq m(\frac{2m}{n-1} + n - 2). \quad (۱۱)$$

قضیه ۲-۵. اگر G یک گراف شیمیایی با n راس و m یال باشد، آنگاه

$$\Sigma_3(G) \leq 6m(\frac{2m}{n-1} + n - 2) - 22m + 6n_4 + 6n. \quad (۱۲)$$

برهان. فرض کنید G یک گراف شیمیایی و $v \in V(G)$ باشد. در این صورت اگر $d_G(v) \leq 3$ باشد، آنگاه

$$d_G(v) - 1)(d_G(v) - 2)(d_G(v) - 3) = 0 \quad (۱۳)$$

و اگر $d_G(v) = 4$ باشد، آنگاه

$$(d_G(v) - 1)(d_G(v) - 2)(d_G(v) - 3) = 6. \quad (۱۴)$$

بنابراین با انجام برخی محاسبات ساده می‌توان دید که

$$\Sigma_3(G) = 6\Sigma_2(G) - 22m + 6n_4 + 6n. \quad (۱۵)$$

پس با به کار بردن قضیه ۲-۴ داریم:

$$\Sigma_3(G) \leq 6m\left(\frac{2m}{n-1} + n - 2\right) - 22m + 6n_4 + 6n. \quad (۱۶)$$

و حکم ثابت است. □

نتیجه ۲-۶. اگر G یک گراف شیمیایی با n راس و m یال باشد، آنگاه $\Sigma_3(G) \le 6m(\frac{2m}{n-1}+n-2)-22m+12n$ است.

برهان. با استفاده از تعریف، $n_4(G) \le n$ است. بنابراین حکم از قضیه ۲-۵ به دست می‌آید. □

در ادامه با به کار بردن رابطه مجوریزیشن، گراف‌های تک‌دور فرینال را بر اساس مجموع توان k-ام درجات گراف‌ها مشخص می‌کنیم.

فرض کنید G گرافی با مجموعه راس $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$ است. همچنین برای $i\in\{1,2,\dots,n\}$، فرض کنید d_i درجه راس v_i است. به‌علاوه فرض کنید $d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n$ باشد. در این صورت $D(G)=(d_1,d_2,\dots,d_n)$ را دنباله درجه G گوییم. فرض کنید $uv\in E(G)$، $\{x,y\}\subseteq V(G)$ و $xy\not\in E(G)$ در این صورت $G-uv$ گرافی است که از گراف G با حذف یال uv به دست می‌آید و $G+xy$ گرافی است که از گراف G با اضافه کردن یال xy به دست می‌آید.

فرض کنید G یک گراف همبند با تعداد راس‌های n و تعداد یال‌های m است. در این صورت G را یک درخت گوییم هرگاه $m=n-1$ باشد و آن را یک گراف تک دور گوییم هرگاه $m=n$ باشد. از نمادهای $\mathcal{T}(n)$ و $\mathcal{U}(n)$ به‌ترتیب برای نمایش خانواده‌های درخت‌ها و گراف‌های تک دور همبند روی n راس استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ دو دنباله‌ی غیرافزایشی از اعداد حقیقی هستند. اگر برای $k=1,\dots,n-1$، $\sum_{i=1}^k x_i\le\sum_{i=1}^k y_i$ و $\sum_{i=1}^n x_i=\sum_{i=1}^n y_i$ آنگاه می‌گوییم x به وسیله y مجورایز شده است و می‌نویسم $x\preccurlyeq y$. اگر $x\preccurlyeq y$ و $x\ne y$ باشد، آنگاه از نماد $x\prec y$ به‌جای $x\preccurlyeq y$ استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $x_1,\dots,x_m$ و $y_1,\dots,y_m$ اعداد طبیعی هستند. در این صورت از نمادهای $T(x_1^{(y_1)},\dots,x_m^{(y_m)})$ و $C(x_1^{(y_1)},\dots,x_m^{(y_m)})$ به‌ترتیب برای نمایش مجموعه‌های درخت‌ها و گراف‌های تک دور همبند که برای x_i راس از درجه y_i دارند، استفاده می‌کنیم (وقتی $i=1,2,\dots,m$). توجه کنید که این مجموعه‌ها ممکن است تهی باشند.

در زیر چند قضیه که در ادامه از آنها استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۷ [۹]. فرض کنید G و G' دو گراف با دنباله درجه‌های به‌ترتیب $D(G)$ و $D(G')$ هستند. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) اگر $D(G)\preccurlyeq D(G')$ و $k\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ باشد، آنگاه $\Sigma_k(G)\le\Sigma_k(G')$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $D(G)=D(G')$ باشد.

ب) اگر $D(G)\preccurlyeq D(G')$ و $k\in(0,1)$ باشد، آنگاه داریم $\Sigma_k(G')\le\Sigma_k(G)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $D(G)=D(G')$ باشد.

قضیه ۲-۸ [۱۰]. فرض کنید T' یک درخت از مرتبه $n\ge 12$ است به طوری که $\Delta(T')=3$ و $n_3(T')\ge 6$ باشد. اگر $T\in T(5^{(3)},(n-12)^{(2)},7^{(1)})$، آنگاه $D(T)\prec D(T')$ است.

فرض کنید n عددی طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. در این صورت تعریف می‌کنیم $F(n)=\{T\in T(n)|\Delta(T)=4\}$.

قضیه ۲-۹ [۱۰]. فرض کنید $T\in T(1^{(4)},2^{(3)},(n-9)^{(2)},6^{(1)})$ و $T'\in F(n)$ باشد. اگر $n_4(T')=1$ و $n_3(T')\ge 3$ باشد، آنگاه $D(T)\prec D(T')$ است.

قضیه ۲-۱۰ [۱۰]. فرض کنید $T\in T(2^{(4)},(n-8)^{(2)},6^{(1)})$ و $T'\in F(n)$ باشد. اگر $T'\notin T(2^{(4)},(n-8)^{(2)},6^{(1)})$ و $n_4(T')\ge 2$ باشد، آنگاه $D(T)\prec D(T')$ است.

قضیه ۲-۱۱ [۱۰]. فرض کنید T' یک درخت از مرتبه n است به طوری که $n\ge 12$ و $\Delta(T')\ge 5$ باشد. اگر

$$T'\notin T(1^{(5)},(n-6)^{(2)},5^{(1)})$$

و

$$T\in T(1^{(5)},(n-6)^{(2)},5^{(1)})$$

باشد، آنگاه $D(T)\prec D(T')$ است.

لم ۲-۱۲. اگر $n\ge 3$ یک عدد طبیعی باشد، آنگاه خانواده

$C(x_1^{(y_1)},\dots,x_m^{(y_m)})$ شامل یک گراف تک دور همبند از مرتبه n است اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{m} x_i y_i = 2n$ باشد.

برهان. برای $n \geq 3$، فرض کنید $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ اعداد طبیعی هستند. به عنوان یک نتیجه معروف از نظریه گراف می‌توان گفت که یک گراف تک دور همبند با دنباله درجه $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ وجود دارد اگر و تنها $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n$ باشد. بنابراین خانواده $C(x_1^{(y_1)},\dots,x_m^{(y_m)})$ شامل یک گراف تک دور همبند از مرتبه n است اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{m} x_i y_i = 2n$ باشد. □

توجه ۲-۱۳. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. با به کار بردن لم ۲-۱۲ می‌توان دید که همه کلاس‌های گراف‌های تک دور همبند تعریف شده در این مقاله ناتهی هستند.

لم ۲-۱۴ [۱۱]. فرض کنید G یک گراف همبند با تعداد راس‌های n و تعداد یال‌های m است. اگر $c = m - n + 1$ باشد، آنگاه

$$n_1(G) = 2 - 2c + \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i-2)n_i, \qquad (۱۷)$$
$$n_2(G) = 2c + n - 2 - \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i-1)n_i.$$

لم ۲-۱۵. فرض کنید G و G' دو گراف از مرتبه n هستند به طوری که $\{u,v\} \subseteq V(G)$، $\{x,y\} \subseteq V(G')$، $d_G(u) = d_G(v) = 1$ و $d_{G'}(x) \geq d_{G'}(y) \geq 1$ باشد. در این صورت اگر $D(G) \preccurlyeq D(G')$ باشد، آنگاه

$$D(G+uv) \preccurlyeq D(G'+xy). \qquad (۱۸)$$

برهان. فرض کنید $D(G) = (d_1,\dots,d_m,\overbrace{1,1,\dots,1}^{n-m})$ و $D(G) \preccurlyeq D(G')$ باشد. حال طبق تعریف داریم $\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = \sum_{v\in V(G')} d_{G'}(v)$. بنابراین یک عدد طبیعی مانند $k(\leq m)$ وجود دارد به طوری که

$$D(G') = (d'_1,\dots,d'_k,\overbrace{1,1,\dots,1}^{n-k}). \qquad (۱۹)$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} D(G+uv) &= \left(d_1,\dots,d_m,2,2,\overbrace{1,\dots,1}^{n-m-2}\right) \\ &\preccurlyeq \left(d'_1,\dots,d'_k,2,2,\overbrace{1,\dots,1}^{n-k-2}\right) \\ &\preccurlyeq D(G'+xy). \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

و حکم ثابت است. □

حال فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی سه است. همچنین فرض کنید $T \in T(n)$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(T) = \{T + uv : \{u,v\} \subseteq V(T), uv \notin E(T)\}. \qquad (۲۱)$$

به آسانی می‌توان دید که $\bigcup_{T\in\mathcal{T}(n)} \varphi(T) = \mathcal{U}(n)$ است.

قضیه ۲-۱۶. فرض کنید T' یک درخت از مرتبه $n \geq 12$ است به طوری که $\Delta(T') = 3$ و $n_3(T') \geq 5$ باشد. اگر

$$G \in C(5^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 5^{(1)})$$

و

$$G' \in \left(\varphi(T') \backslash C(5^{(3)}, (n-10)^{(2)}, 5^{(1)})\right)$$

باشد، آنگاه $D(G) \prec D(G')$ است.

برهان. اگر $n_3(T') = 5$ باشد، آنگاه $T' \in T(5^{(3)}, (n-12)^{(2)}, 7^{(1)})$ و با به کار بردن لم ۲-۱۵، $D(G) \prec D(G')$ است. فرض کنید $n_3(T') > 5$ باشد. در این حالت با به کار بردن قضیه ۲-۸ و لم ۲-۱۵ می‌توان دید که $D(G) \prec D(G')$ است. بنابراین حکم در حالت کلی برقرار است. □

قضیه ۲-۱۷. فرض کنید $n_4(T') = 1$، $T' \in F(n)$ و $n_3(T') \geq 2$ باشد. اگر

$$G' \in \left(\varphi(T') \backslash C(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)})\right)$$

و

$$G \in C(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-7)^{(2)}, 4^{(1)})$$

باشد، آنگاه $D(G) \prec D(G')$ است.

برهان. اگر $n_3(T') = 2$ باشد، آنگاه

$$T' \in T(1^{(4)}, 2^{(3)}, (n-9)^{(2)}, 6^{(1)}). \qquad (۲۲)$$

با به کار بردن لم ۲-۱۵، $D(G) \prec D(G')$ است. حال فرض کنید $n_3(T') > 2$، در این صورت با استفاده از قضیه ۲-۹ و

لم ۲–۱۵، $D(G) \prec D(G')$ است. بنابراین حکم در حالت کلی برقرار است. □

قضیه ۲–۱۸. فرض کنید $T' \in F(n)$ و $n_4(T') \geq 2$ باشد. اگر

$$G' \in \left(\varphi(T')\backslash C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})\right)$$

و

$$G \in C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$$

باشد، آنگاه $D(G) \prec D(G')$ است.

برهان. حکم به طور مستقیم از قضیه ۲–۱۰ و لم ۲–۱۵ به دست می‌آید. □

قضیه ۲–۱۹. فرض کنید T' یک درخت از مرتبه $n \geq 12$ است به طوری که $\Delta(T') \geq 5$ باشد. اگر

$$G \in C(1^{(5)},(n-4)^{(2)},3^{(1)})$$

و

$$G' \in \left(\varphi(T')\backslash C(1^{(5)},(n-4)^{(2)},3^{(1)})\right)$$

باشد آنگاه $D(G) \prec D(G')$ است.

برهان. حکم به طور مستقیم از قضیه ۲–۱۱ و لم ۲–۱۵ به دست می‌آید. □

توجه ۲–۲۰. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. در این صورت برای $i \in \{1,2,\dots,n\}$، G_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&G_1 \cong C_n,\\
&G_2 \in C(1^{(3)},(n-2)^{(2)},1^{(1)}),\\
&G_3 \in C(2^{(3)},(n-4)^{(2)},2^{(1)}),\\
&G_4 \in C(3^{(3)},(n-6)^{(2)},3^{(1)}),\\
&G_5 \in C(1^{(4)},(n-3)^{(2)},2^{(1)}),\\
&G_6 \in C(4^{(3)},(n-8)^{(2)},4^{(1)}),\\
&G_7 \in C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)}),\\
&G_8 \in C(5^{(3)},(n-10)^{(2)},5^{(1)}),\\
&G_9 \in C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)}),\\
&G_{10} \in C(6^{(3)},(n-12)^{(2)},6^{(1)}),\\
&G_{11} \in C(1^{(4)},3^{(3)},(n-9)^{(2)},5^{(1)}),\\
&G_{12} \in C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)}),\\
&G_{13} \in C(1^{(4)},4^{(3)},(n-11)^{(2)},6^{(1)}),\\
&G_{14} \in C(2^{(4)},1^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)}),\\
&G_{15} \in C(1^{(5)},(n-4)^{(2)},3^{(1)}),\\
&G_{16} \in C(2^{(4)},2^{(3)},(n-10)^{(2)},6^{(1)}),\\
&G_{17} \in C(1^{(5)},1^{(3)},(n-6)^{(2)},4^{(1)}),\\
&G_{18} \in C(1^{(5)},2^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)}),\\
&G_{19} \in C(1^{(5)},1^{(4)},(n-7)^{(2)},5^{(1)}).
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

قضیه ۲–۲۱. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. همچنین برای $i \in \{1,2,\dots,n\}$، فرض کنید G_i گراف تعریف شده در توجه ۲–۲۰ است. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف)

$$\begin{aligned}
\Sigma_2(G_1) < \Sigma_2(G_2) < \Sigma_2(G_3) &< \Sigma_2(G_4)\\
&= \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6)\\
&= \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8)\\
&= \Sigma_2(G_9) < \Sigma_2(G_{10})\\
&= \Sigma_2(G_{11}) = \Sigma_2(G_{12})\\
&= \Sigma_2(G_{15}) < \Sigma_2(G_{13})\\
&= \Sigma_2(G_{14}) = \Sigma_2(G_{17})\\
&< \Sigma_2(G_{16}) = \Sigma_2(G_{18})\\
&< \Sigma_2(G_{19}).
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

ب)

$$\begin{aligned}
\Sigma_3(G_1) < \Sigma_3(G_2) < \Sigma_3(G_3) &< \Sigma_3(G_4)\\
&< \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6)\\
&< \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8)\\
&< \Sigma_3(G_9) < \Sigma_3(G_{10})\\
&< \Sigma_3(G_{11}) < \Sigma_3(G_{12})\\
&< \Sigma_3(G_{13}) < \Sigma_3(G_{14})\\
&= \Sigma_3(G_{15}) < \Sigma_3(G_{16})\\
&= \Sigma_3(G_{17}) < \Sigma_3(G_{18})\\
&< \Sigma_3(G_{19}).
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

پ) اگر $k \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
&\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3)\\
&< \min\{\Sigma_k(G_4),\Sigma_k(G_5),\Sigma_k(G_6),\Sigma_k(G_7),\\
&\Sigma_k(G_8),\Sigma_k(G_9),\Sigma_k(G_{10}),\Sigma_k(G_{11}),\\
&\Sigma_k(G_{12}),\Sigma_k(G_{13}),\Sigma_k(G_{14}),\Sigma_k(G_{15}),\\
&\Sigma_k(G_{16}),\Sigma_k(G_{17}),\Sigma_k(G_{18}),\Sigma_k(G_{19})\}.
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

ت) اگر $k \in (0,1)$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}
&\Sigma_k(G_1) > \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3)\\
&> \max\{\Sigma_k(G_4),\Sigma_k(G_5),\Sigma_k(G_6),\Sigma_k(G_7),\\
&\Sigma_k(G_8),\Sigma_k(G_9),\Sigma_k(G_{10}),\Sigma_k(G_{11}),\\
&\Sigma_k(G_{12}),\Sigma_k(G_{13}),\Sigma_k(G_{14}),\Sigma_k(G_{15}),\\
&\Sigma_k(G_{16}),\Sigma_k(G_{17}),\Sigma_k(G_{18}),\Sigma_k(G_{19})\}.
\end{aligned} \tag{۲۷}$$

برهان. اگر مقدار k در جداول (۱) تا (۷) را به‌ترتیب دو و سه در نظر بگیریم، آنگاه با برخی محاسبات ساده می‌توان بررسی کرد که حالت‌های (الف) و (ب) برقرار هستند.

پ) با استفاده از جدول (۱) داریم:

$$\Sigma_k(G_1) - \Sigma_k(G_2) = (2 \times 2^k) - (3^k + 1). \tag{۲۸}$$

حال اگر فرض کنید $x = (2,2)$ و $y = (3,1)$ باشد، آنگاه

واضح است که $x < y$ است. بنابراین با به کار بردن قسمت (الف) قضیه ۲–۷ داریم $(2\times 2^k) < (3^k+1)$. پس با استفاده از معادله (۲۸) می‌توان دید که $\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2)$ برقرار است. اثبات سایر حالت‌ها باقیمانده از (پ)، مشابه با این حالت است و لذا از بیان آنها در اینجا صرف‌نظر می‌شود.

ت) با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۲–۷ و یک روش مشابه با قسمت (پ) می‌توان دید که حکم در این حالت برقرار است. □

جدول (۱): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T((n-2)^{(2)},2^{(1)})$ و مجموع توان K–ام درجات آنها

Σ_k	خانواده
$n2^k$	$C(n^{(2)})$
$3^k+(n-2)2^k+1$	$C(1^{(3)},(n-2)^{(2)},1^{(1)})$
$2\times 3^k+(n-4)2^k+2$	$C(2^{(3)},(n-4)^{(2)},2^{(1)})$

جدول (۲): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(3)},(n-4)^{(2)},3^{(1)})$ و مجموع توان K–ام درجات آنها

Σ_k	خانواده
$3^k+(n-2)2^k+1$	$C(1^{(3)},(n-2)^{(2)},1^{(1)})$
$2\times 3^k+(n-4)2^k+2$	$C(2^{(3)},(n-4)^{(2)},2^{(1)})$
$4^k+(n-3)2^k+2$	$C(1^{(4)},(n-3)^{(2)},2^{(1)})$
$3\times 3^k+(n-6)2^k+3$	$C(3^{(3)},(n-6)^{(2)},3^{(1)})$
$4^k+3^k+(n-5)2^k+3$	$C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)})$

جدول (۳): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(2^{(3)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$ و مجموع توان K–ام درجات آنها

Σ_k	خانواده
$2\times 3^k+(n-4)2^k+2$	$C(2^{(3)},(n-4)^{(2)},2^{(1)})$
$3\times 3^k+(n-6)2^k+3$	$C(3^{(3)},(n-6)^{(2)},3^{(1)})$
$4^k+3^k+(n-5)2^k+3$	$C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)})$
$4\times 3^k+(n-8)2^k+4$	$C(4^{(3)},(n-8)^{(2)},4^{(1)})$
$4^k+2\times 3^k+(n-7)2^k+4$	$C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$
$2\times 4^k+(n-6)2^k+4$	$C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$

جدول (۴): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(3^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)})$ و مجموع توان K–ام درجات آنها

Σ_k	خانواده
$3\times 3^k+(n-6)2^k+3$	$C(3^{(3)},(n-6)^{(2)},3^{(1)})$
$4\times 3^k+(n-8)2^k+4$	$C(4^{(3)},(n-8)^{(2)},4^{(1)})$
$4^k+2\times 3^k+(n-7)2^k+4$	$C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$
$5\times 3^k+(n-10)2^k+5$	$C(5^{(3)},(n-10)^{(2)},5^{(1)})$
$4^k+3\times 3^k+(n-9)2^k+5$	$C(1^{(4)},3^{(3)},(n-9)^{(2)},5^{(1)})$
$2\times 4^k+3^k+(n-8)2^k+5$	$C(2^{(4)},1^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)})$

جدول (۵): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(4^{(3)},(n-10)^{(2)},6^{(1)})$ و مجموع توان K–ام درجات آنها

Σ_k	خانواده
$4\times 3^k+(n-8)2^k+4$	$C(4^{(3)},(n-8)^{(2)},4^{(1)})$
$5\times 3^k+(n-10)2^k+5$	$C(5^{(3)},(n-10)^{(2)},5^{(1)})$
$4^k+3\times 3^k+(n-9)2^k+5$	$C(1^{(4)},3^{(3)},(n-9)^{(2)},5^{(1)})$
$6\times 3^k+(n-12)2^k+6$	$C(6^{(3)},(n-12)^{(2)},6^{(1)})$
$4^k+4\times 3^k+(n-11)2^k+6$	$C(1^{(4)},4^{(3)},(n-11)^{(2)},6^{(1)})$
$2\times 4^k+2\times 3^k+(n-10)2^k+6$	$C(2^{(4)},2^{(3)},(n-10)^{(2)},6^{(1)})$

جدول (۶): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(4)},(n-5)^{(2)},4^{(1)})$ و مجموع توان K–ام درجات آنها

Σ_k	خانواده
$4^k+(n-3)2^k+2$	$C(1^{(4)},(n-3)^{(2)},2^{(1)})$
$4^k+3^k+(n-5)2^k+3$	$C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)})$
$5^k+(n-4)2^k+3$	$C(1^{(5)},(n-4)^{(2)},3^{(1)})$
$4^k+2\times 3^k+(n-7)2^k+4$	$C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$
$5^k+3^k+(n-6)2^k+4$	$C(1^{(5)},1^{(3)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$

جدول (۷): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(4)},1^{(3)},(n-7)^{(2)},5^{(1)})$ و مجموع توان K–ام درجات آنها

Σ_k	خانواده
$4^k+3^k+(n-5)2^k+3$	$C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)})$
$4^k+2\times 3^k+(n-7)2^k+4$	$C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$
$2\times 4^k+(n-6)2^k+4$	$C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$
$4^k+3\times 3^k+(n-9)2^k+5$	$C(1^{(4)},3^{(3)},(n-9)^{(2)},5^{(1)})$
$2\times 4^k+3^k+(n-8)2^k+5$	$C(2^{(4)},1^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)})$
$5^k+2\times 3^k+(n-8)2^k+5$	$C(1^{(5)},2^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)})$
$5^k+4^k+(n-7)2^k+5$	$C(1^{(5)},1^{(4)},(n-7)^{(2)},5^{(1)})$

قضیه ۲–۲۲. فرض کنید n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. همچنین برای $i \in \{1,2,\dots,n\}$، فرض کنید G_i گراف تعریف شده در توجه ۲–۲۰ است. در این صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) اگر $G \in \mathcal{U}(n)\backslash\{G_1, G_2, \dots, G_9\}$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\Sigma_2(G_1) < \Sigma_2(G_2) &< \Sigma_2(G_3) < \Sigma_2(G_4)\\ &= \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6)\\ &= \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8)\\ &= \Sigma_2(G_9) < \Sigma_2(G).\end{aligned} \tag{۲۹}$$

ب) اگر $G \in \mathcal{U}(n)\backslash\{G_1, G_2, \dots, G_8\}$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\Sigma_3(G_1) < \Sigma_3(G_2) &< \Sigma_3(G_3) < \Sigma_3(G_4)\\ &< \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6)\\ &< \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8)\\ &< \Sigma_3(G).\end{aligned} \tag{۳۰}$$

پ) اگر $k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ باشد و $G \in \mathcal{U}(n)\backslash\{G_1, G_2, G_3\}$، آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3) < \Sigma_k(G). \tag{۳۱}$$

ت) اگر $k \in (0,1)$ و $G \in \mathcal{U}(n)\backslash\{G_1, G_2, G_3\}$ باشد، آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) > \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3) > \Sigma_k(G). \tag{۳۲}$$

برهان. با استفاده از قسمت (الف) قضیه ۲–۲۱ داریم:

$$\begin{aligned}\Sigma_2(G_1) < \Sigma_2(G_2) &< \Sigma_2(G_3) < \Sigma_2(G_4)\\ &= \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6)\\ &= \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8)\\ &= \Sigma_2(G_9).\end{aligned} \tag{۳۳}$$

همچنین اگر $G \in \{G_{10}, G_{11}, \dots, G_{19}\}$ باشد، آنگاه دوباره با استفاده از قسمت (الف) قضیه ۲–۲۱ می‌توان دید که حکم برقرار است. در غیر این صورت حکم از قضیه‌های ۲–۱۶، ۲–۱۷، ۲–۱۸، ۲–۱۹ و قسمت (الف) ۲–۷ به دست می‌آید.

ب) با به کار بردن قسمت (ب) قضیه ۲–۲۱ داریم:

$$\begin{aligned}\Sigma_3(G_1) < \Sigma_3(G_2) &< \Sigma_3(G_3) < \Sigma_3(G_4)\\ &< \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6)\\ &< \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8).\end{aligned} \tag{۳۴}$$

همچنین اگر $G \in \{G_9, G_{10}, \dots, G_{19}\}$ باشد، آنگاه دوباره قسمت (ب) قضیه ۲–۲۱ حکم را به ما می‌دهد. در غیر این صورت حکم از قضیه‌های ۲–۱۶، ۲–۱۷، ۲–۱۸، ۲–۱۹ و قسمت (الف) ۲–۷ نتیجه می‌شود.

پ) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۲–۲۱ داریم:

$$\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3). \tag{۳۵}$$

به علاوه اگر $\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3)$ باشد، آنگاه دوباره قسمت (پ) قضیه ۲–۲۱ حکم را نتیجه می‌دهد. در غیر این صورت قضیه‌های ۲–۱۶، ۲–۱۷، ۲–۱۸، ۲–۱۹ و قسمت (الف) ۲–۷ حکم را به ما می‌دهند.

ت) با به کار بردن قسمت (ت) قضیه ۲–۲۱ داریم:

$$\Sigma_k(G_1) > \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3). \tag{۳۶}$$

همچنین اگر $G \in \{G_4, G_5, \dots, G_{19}\}$ باشد، آنگاه دوباره قسمت (ت) قضیه ۲–۲۱ حکم را به ما می‌دهد. در غیر این صورت حکم از قضیه‌های ۲–۱۶، ۲–۱۷، ۲–۱۸، ۲–۱۹ و قسمت (ب) قضیه ۲–۷ به دست می‌آید. □

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافعی ندارند.

مراجع

[1] K.Ch. Das, “Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph,” Discrete Math., vol. 285, no. 1-3, pp. 57-66, 2004, doi: 10.1016/j.disc.2004.04.007.

[2] K.Ch. Das, “Sharp bounds for the sum of the squares of the degrees of a graph,” Kragujevac J. Math., vol. 25, no. 25, pp. 31-49, 2003.

[3] Y.S. Yoon and J.K. Kim, “A relationship between bounds on the sum of squares of degrees of a graph,” J. Appl. Math. Comput., vol. 21, pp. 233-238, 2006, doi: 10.1007/BF02896401.

[4] F.R. McMorris and T. Zaslavsky, “The number of cladistic characters,” Math. Biosci., vol. 54, no. 1–2, pp. 3-10, 1981, doi: 10.1016/0025-5564(81)90071-7.

[5] S. Rasouli and F. Khaksar Haghami, “Maximal, prime and minimal prime filters in residuated lattices,” Soft Comput. J., vol. 11, no. 1, pp. 106-119, 2022, doi: 10.22052/scj.2023.243375.1032 [In Persian].

[6] K. Fathalikhani and A.R. Ashrafi, “Metric and combinatorial properties of fibonacci and lucas cubes,” Soft Comput. J., vol. 5, no. 1, pp. 78-100, 2017 [In Persian].

[7] A. Khaleghi Tabar and R. Farazkhish, “Routing improvement for vehicular Ad Hoc networks (VANETs) using nature inspired algorithms,” Soft Comput. J., vol. 6, no. 2, pp. 72-85, 2018, dor: 20.1001.1.23223707.1396.6.2.6.0 [In Persian].

[8] D. de Caen, “An upper bound on the sum of the squares of the degrees in a graph,” Discrete Math., vol. 185, on. 1-3, pp. 245-248, 1998, doi: 10.1016/S0012-365X(97)00213-6.

[9] M. Liu and B. Liu, “Some properties of the first general Zagreb index,” Australas. J. Combin., vol. 47, pp. 285-294, 2010.

[10] M. Eliasi and A. Ghalavand, “Extremal trees with respect to some versions of zagreb indices via majorization,” Iranian J. Math. Chem., vol. 8, no. 4, pp. 391-401, 2017, doi: 10.22052/ijmc.2017.46693.1161.

[11] A. Ghalavand, A.R. Ashrafi, and I. Gutman, “Extremal graphs for the second multiplicative Zagreb index,” Bull. Int. Math. Virtual Inst., vol. 8, no. 2, pp. 369-383, 2018.