© پیش نویس مجله علمی محاسبات نرم، برای داوری در مجله

گراف‌های تک دور فرینال نسب به مجموع توان k –ام درجات گراف‌ها

علی قلاوند[1*]، محقق پسا دکتری، مصطفی توکلی[2*]، دانشیار

[1] دانشکده علوم ریاضی ـ دانشگاه فردوسی مشهد ـ مشهد ـ ایران ـ ali.ghalavand.kh@gmail.com

[2] دانشکده علوم ریاضی ـ دانشگاه فردوسی مشهد ـ مشهد ـ ایران ـ m_tavakoli@um.ac.ir

چکیده: فرض کنیم G یک گراف و $d_G(v)$ درجه رأس v در گراف G است. دراین‌صورت مجموع توان k–ام گراف G به‌صورت $\sum_k(G) = \sum_{u\in V(G)} d_G(u)^k$ تعریف می‌شود. در این مقاله، یک رابطه را بین عدد استرلینگ، تعداد درختان زیرمجموعه‌ها و مجموع توان k–ام درجات گراف‌های شیمیایی بدست می‌آوریم. همچنین گراف‌های تک دور فرینال را براساس مجموع توان k–ام درجات گراف‌ها مشخص می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: گراف،مسئله اکسترمال، توان دجه، مجموع توان درجات، گراف‌های تک دور فرینال.

* مصطفی توکلی، **m_tavakoli@um.ac.ir**

Extremal unicyclic graphs relative to the sum of the k-power degrees of the graphs

Ali Ghalavand [1*], Postdoc, Mostafa Tavakoli [2], Associate Professor

[1]Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, ali.ghalavand.kh@gmail.com

[2] Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, m_tavakoli@um.ac.ir

Abstract: Let G be a graph and $d_G(v)$ be the degree of v in G. Then, the sum of the k-power degrees of G is defined as $\sum_k(G) = \sum_{u \in V(G)} d_d(u)^k$. In this paper, we obtain a relationship between Stirling number, number of trees of subsets and the sum of the k-power degrees of the chemical graphs. Also, we characterize the extremal unicyclic graphs based on the sum of the k-power degrees of the graphs.

Keywords: *Graph; Extremal problem; Power degree; Sum of the power degrees; Unicyclic graph.*

*** Mostafa Tavakoli, m_tavakoli@um.ac.ir**

۱. مقدمه

فرض کنیم G یک گراف با مجموعه راس‌های V(G) و مجموعه یال‌هـای E(G) اسـت. بـرای $v \in V(G)$, درجـه v برابـر تعـداد راس‌های از G است که با v مجاور هستند و از نماد $d_G(v)$ برای نمایش آن استفاده می‌کنیم. برای $i=0,1,2,\dots,|V(G)|-1$, از نمـاد $n_i(G)$ یا به‌طور خلاصـه n_i بـرای نشـان دادن تعـداد راس‌هـا از درجه i در گراف G استفاده می‌کنیم. به زبان ریاضی

$$n_i(G)=n_i=|\{v : v \in V(G),\ d_G(v)=i\}|.$$

فرض کنیم k یک عدد حقیقی است. دراین‌صورت مجموع توان k–ام گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Sigma_k(G) = \sum_{u \in V(G)} d_G(u)^k.$$

برای آشنایی بیشـتر بـا ایـن مفهـوم، مطالعـه مراجـع [۲, ۳, ۴] پیشنهاد می‌شود.

در ریاضیات، به ویژه در ترکیبیات، یک عـدد اسـترلینگ از نـوع دوم (یا عدد پارتیشن اسـترلینگ) تعـداد روش‌هـایی اسـت کـه می‌توان مجموعه‌ای از n شیء را به k زیر مجموعه افراز کـرد و با S(n,k) نشان داده می‌شود. ایـن عـدد بـا فرمـول صـریح زیـر بدست می آید:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

با استفاده از معادله بالا داریم:

$$S(n,3) = \frac{1}{2}3^{n-1} - 2^{n-1} + \frac{1}{2},$$

$$S(n,4) = \frac{4^n}{24} + \frac{2^n}{4} - \frac{3^n}{6} - \frac{1}{6}.$$

فرض کنیم $H=\{1,2,\dots,n\}$. یک درخت از زیرمجموعه‌های H, یک خانواده مانند Γ از زیرمجموعه‌های نـاتهی H اسـت به‌طوری‌که (الـف) H∈Γ و (ب) اگـر A,B∈Γ و $\emptyset \neq A \cap B$, آن‌گـاه A⊆B یـا B⊆A. حـال فـرض کنـیم t(n,r) تعـداد درخت‌ها r عضوی از زیرمجموعه‌هـای یـک مجموعـه n–عضوی مانند H است. همچنین فرض کنیم t(n) تعـداد کـل درخت‌ها از زیرمجموعه‌های H است. دراین‌صورت می‌توان دید که

$$t(n) = \sum_{r=1}^{2n-1} t(n,r).$$

مک‌موریس و زاسلاوسکی در [۸] ثابت کردند:

$$t(n,3) = \frac{3}{2}3^n - 4 \times 2^n + \frac{7}{2}.$$

مطالعه مراجع [۹, ۱۰, ۱۱] پیشنهاد می‌شود.

۲. نتایج اصلی

در این بخش یک رابطه را بین عـدد اسـترلینک، تعـداد درختـان زیرمجموعه‌ها و مجموع توان k–ام درجات گراف‌های شـیمیایی

بدست می‌آوریم. همچنین گراف‌های تک دور فرینال را براساس مجموع توان k–ام درجات گراف‌ها مشخص می‌کنیم.

لم ۱,۲. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آن‌گاه

$$\Sigma_2(G) \leq m(\frac{2m}{n-1}+n-2).$$

$$\Sigma_3(G) \leq 6m(\frac{2m}{n-1}+n-2)-22m+6n_4+6n.$$

برهان. فرض کنیم G یک گراف شیمیایی با m یال است. درایـن‌صورت طبق تعاریف می‌توان دید

$$d_G(v)-1)(d_G(v)-2)(d_G(v)-3)=0$$

$$(d_G(v)-1)(d_G(v)-2)(d_G(v)-3)=6.$$

$$\Sigma_3(G)=6\Sigma_2(G)-22m+6n_4+6n.$$

بنابراین با یک جایگذاری ساده می‌توان دید که حکم برقرار است. □

$$\Sigma_3(G) \leq 6m\left(\frac{2m}{n-1}+n-2\right)-22m+6n_4+6n. \square$$

قضیه ۲,۲. فرض کنیم k یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی چهار است. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آن‌گاه

برهان. حکم به‌طور مستقیم از لم ۲,۱ و معادله‌های ۱ و ۲ بدست می‌آید. □

نتیجه ۳,۲. فرض کنیم k یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی چهار است. اگر G یک گراف شیمیایی با m یال باشد، آن‌گاه

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\Delta(G)\leq۳$.

قضیه ۴,۲ [۱]. اگر G یک گراف با n راس و m یال باشد،

$$\Sigma_k(G)=(\frac{1}{2}3^{k-1}-2^{k-1}+\frac{1}{2})\Sigma_3(G)+(4^k+6\times 2^k-4\times 3^k-4)n_4(G)+(6\times 3^{k-2}-12\times 2^{k-2}+6)m-(\frac{1}{2}3^k-2^{k+1}+\frac{5}{2})\Sigma_2(G).$$

قضیه ۲,۵. اگر G یک گراف شیمیایی با n راس و m یال باشد،

برهان. فرض کنیم G یک گراف شیمیایی و $v\in V(G)$. دراین‌صورت اگر $d_G(v)\leq 3$, آن‌گاه

و اگر $d_G(v)=4$ آن‌گاه

$$m=\frac{1}{2}[n_1+2n_2+3n_3+4n_4],$$

$$\Sigma_2(G)=n_1+2^2n_2+3^2n_3+4^2n_4,$$

بنابراین با انجام برخی محاسبات ساده می‌توان دید که

$$\Sigma_3(G)=n_1+2^3n_2+3^3n_3+4^3n_4$$

$$\Sigma_k(G)=n_1+2^kn_2+3^kn_3+4^kn_4$$

پس با به‌کار بردن قضیه ۲,۴ داریم:

نتیجه ۶,۲. اگر G یک گراف شیمیایی با n راس و m یال باشد، آن‌گاه $\Sigma_3(G) \leq 6m(\frac{2m}{n-1}+n-2)-22m+12n$.

$$\Sigma_k(G)=S(k,3)\Sigma_3(G)+24S(k,4)n_4(G)+12S(k-1,3)m-(12S(k,3)-t(k,3))\Sigma_2(G).$$

برهان. با استفاده از تعریف، $n_4(G)\leq n$. بنابراین حکم از قضیه ۵,۲ بدست می‌آید. □

در ادامه با به‌کار بردن رابطه مجوریزیشن، گراف‌های تک‌دور فرینال را بر اساس مجموع توان k–ام درجات گراف‌ها مشخص می‌کنیم.

$$\Sigma_k(G) \geq S(k,3)\Sigma_3(G)+12S(k-1,3)m-(12S(k,3)-t(k,3))\Sigma_2(G)$$

فرض کنیم G یک گراف با مجموعه راس‌های $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$ است. همچنین برای $i\in\{1,2,\dots,n\}$, فرض کنیم d_i درجه راس v_i است. بعلاوه فرض کنیم $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$.

دراین‌صورت $D(G)=(d_1,d_2,\dots,d_n)$ را دنباله درجه G گوییم. فرض کنیم $\{x,y\}\subseteq V(G)$، $uv\in E(G)$ و $xy \notin E(G)$ دراین‌صورت G-uv گرافی است که از گراف G با حذف یال uv بدست می‌آید و G+xy گرافی است که از گراف G با اضافه کردن یال xy بدست می‌آید.

فرض کنیم G یک گراف همبند با تعداد راس‌های n و تعداد یال‌های m است. دراین‌صورت G را یک درخت گوییم هرگاه m=n-1 و آن را یک گراف تک دور گوییم هرگاه m=n. از نمادهای $\mathcal{T}(n)$ و $\mathcal{U}(n)$ به‌ترتیب برای نمایش خانواده‌های درخت‌ها و گراف‌های تک دور همبند روی n راس استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ دو دنباله‌ی غیرافزایشی از اعداد حقیقی هستند. اگر برای $k=1,2,\dots,n-1$، $\sum_{i=1}^{k} x_i \le \sum_{i=1}^{k} y_i$ و $\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} y_i$ آنگاه می‌گوییم x بوسیله y مجورایز شده است و می‌نویسم $x \preccurlyeq y$. اگر $x \preccurlyeq y$ و $x\neq y$، آنگاه از نماد $x \prec y$ به‌جای $x\preccurlyeq y$ استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $x_1,\dots,x_m$ و $y_1,\dots,y_m$ اعداد طبیعی هستند. دراین‌صورت از نمادهای $T(x_1^{(y_1)},\dots,x_m^{(y_m)})$ و $C(x_1^{(y_1)},\dots,x_m^{(y_m)})$ به‌ترتیب برای نمایش مجموعه‌های درخت‌ها و گراف‌های تک دور همبند که برای $i=1,2,\dots,m$ x_i راس از درجه y_i دارند استفاده می‌کنیم. توجه کنید که این مجموعه‌ها ممکن است تهی باشند.

در زیر چند قضیه که در ادامه از آن‌ها استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم.

قضیه ۷،۲ [۷]. فرض کنیم G و G′ دو گراف با دنباله درجه‌های به‌ترتیب D(G) و D(G′) هستند. دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) اگر $D(G)\preccurlyeq D(G')$ و $k\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$، آنگاه $\Sigma_k(G)\le\Sigma_k(G')$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر D(G)=D(G').

ب) اگر $D(G)\preccurlyeq D(G')$ و $k\in(0,1)$، آنگاه $\Sigma_k(G')\le\Sigma_k(G)$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر D(G)=D(G').

قضیه ۸،۲ [۵]. فرض کنیم T' یک درخت از مرتبه n≥12 است به‌طوری‌که Δ(T')=3 و n3(T')≥6. اگر $T\in T(5^{(3)},(n-12)^{(2)},7^{(1)})$، آنگاه $D(T)\prec D(T')$.

فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. دراین‌صورت تعریف می‌کنیم: F(n)={T∈T(n)|Δ(T)=4}.

قضیه ۹،۲ [۵]. فرض کنیم $T\in T(1^{(4)},2^{(3)},(n-9)^{(2)},6^{(1)})$ و T'∈F(n). اگر $n_4(T')=1$ و $n_3(T')\ge 3$، آنگاه $D(T)\prec D(T')$.

قضیه ۱۰،۲ [۵]. فرض کنیم $T\in T(2^{(4)},(n-8)^{(2)},6^{(1)})$ و T'∈F(n). اگر $T'\notin T(2^{(4)},(n-8)^{(2)},6^{(1)})$ و $n_4(T')\ge 2$، آنگاه $D(T)\prec D(T')$.

قضیه ۱۱،۲ [۵]. فرض کنیم T' یک درخت از مرتبه n است به‌طوری‌که n≥12 و Δ(T')≥5. اگر $T'\notin T(1^{(5)},(n-6)^{(2)},5^{(1)})$ و $T\in T(1^{(5)},(n-6)^{(2)},5^{(1)})$، آنگاه $D(T)\prec D(T')$.

لم ۱۲،۲. اگر n≥3 یک عدد طبیعی باشد، آنگاه خانواده $C(x_1^{(y_1)},\dots,x_m^{(y_m)})$ شامل یک گراف تک دور همبند از مرتبه n است اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{m} x_i y_i=2n$.

برهان. برای n≥3، فرض کنیم $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$ اعداد طبیعی هستند. به عنوان یک نتیجه معروف از نظریه گراف می‌توان گفت که یک گراف تک دور همبند با دنباله درجه $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ وجود دارد اگر و تنها $\sum_{i=1}^{n} a_i=2n$. بنابراین خانواده

$C(x_1^{(y_1)},\dots,x_m^{(y_m)})$ شامل یک گراف تک دور همبند از مرتبه n است اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{m} x_i y_i = 2n$. □

توجه ۱۳،۲. فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. با به‌کار بردن لم ۱۲،۲ می‌توان دید که همه کلاس‌های گراف‌های تک دور همبند تعریف شده در این مقاله ناتهی هستند.

لم ۱۴،۲ [۶]. فرض کنیم G یک گراف همبند با تعداد راس‌های n و تعداد یال‌های m است. اگر c=m-n+1، آنگاه

$$n_1(G) = 2 - 2c + \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i-2)n_i,$$

$$n_2(G) + 2c + n = 2 + \sum_{i=3}^{\Delta(G)} (i-1)n_i.$$

لم ۱۵،۲. فرض کنیم G و G′ دو گراف از مرتبه n هستند به طوری‌که $\{u,v\} \subseteq V(G)$، $\{x,y\} \subseteq V(G')$، $d_G(u) = d_G(v) = 1$ و $d_{G'}(x) \geq d_{G'}(y) \geq 1$. دراین‌صورت اگر $D(G) \preccurlyeq D(G')$ آنگاه

$$D(G+uv) \preccurlyeq D(G'+xy).$$

برهان. فرض کنیم $D(G) = (d_1,\dots,d_m,\overbrace{1,1,\dots,1}^{n-m})$ و $D(G) \preccurlyeq D(G')$. طبق تعریف داریم $\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = \sum_{v\in V(G')} d_{G'}(v)$. بنابراین یک عدد طبیعی مانند k(≤m) وجود دارد به‌طوری‌که

$$D(G') = (d'_1,\dots,d'_k,\overbrace{1,1,\dots,1}^{n-k}).$$

پس داریم:

$$D(G+uv) = \left(d_1,\dots,d_m,2,2,\overbrace{1,\dots,1}^{n-m-2}\right) \preccurlyeq \left(d'_1,\dots,d'_k,2,2,\overbrace{1,\dots,1}^{n-k-2}\right) = D(G'+xy).$$

فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی سه است. همچنین فرض کنیم T∈T(n) دراین‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(T) = \{T+uv : \{u,v\} \subseteq V(T),\ uv \notin E(T)\}.$$

به آسانی میتوان دید که $\bigcup_{T\in\mathcal{T}(n)} \varphi(T) = \mathcal{U}(n)$.

قضیه ۱۶،۲. فرض کنیم T' یک درخت از مرتبه n≥12 است به‌طوری‌که Δ(T')=3 و n_3 (T')≥5. اگر $G \in C(5^{(3)},(n-10)^{(2)},5^{(1)})$ و $G' \in (\varphi(T')\backslash C(5^{(3)},(n-10)^{(2)},5^{(1)}))$، آنگاه $D(G) \prec D(G')$.

برهان. اگر $n_3(T') = 5$، آنگاه $T' \in T(5^{(3)},(n-12)^{(2)},7^{(1)})$ و و با به‌کار بردن لم ۱۵،۲، $D(G) \prec D(G')$. فرض کنیم $n_3(T') > 5$. در این حالت با به‌کار بردن قضیه ۸،۲ و لم ۱۵،۲ می‌توان دید که $D(G) \prec D(G')$. بنابراین حکم در حالت کلی برقرار است. □

قضیه ۱۷،۲. فرض کنیم $n_4(T') = 1$، $T' \in F(n)$ و $n_3(T') \geq 2$. اگر $G' \in (\varphi(T')\backslash C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)}))$ و $G \in C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$، آنگاه $D(G) \prec D(G')$.

برهان. اگر $n_3(T') = 2$، آنگاه

$$T' \in T(1^{(4)},2^{(3)},(n-9)^{(2)},6^{(1)}).$$

با به‌کار بردن لم ۱۵،۲، $D(G) \prec D(G')$. حال فرض کنیم $n_3(T') > 2$ دراین‌صورت با استفاده از قضیه ۹،۲ و لم ۱۵،۲، $D(G) \prec D(G')$. بنابراین حکم در حالت کلی برقرار است. □

قضیه ۱۸،۲. فرض کنیم $T' \in F(n)$ و $n_4(T') \geq 2$. اگر

$$G' \in (\varphi(T')\backslash C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)}))$$

و $G \in C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$، آنگاه $D(G) \prec D(G')$.

برهان. حکم به‌طور مستقیم از قضیه ۱۰،۲ و لم ۱۵،۲ بدست می‌آید.□

قضیه ۱۹،۲. فرض کنیم T' یک درخت از مرتبه n≥12 است به‌طوری‌که Δ(T')≥5. اگر $G \in C(1^{(5)},(n-4)^{(2)},3^{(1)})$ و $G' \in (\varphi(T')\backslash C(1^{(5)},(n-4)^{(2)},3^{(1)}))$، آنگاه $D(G) \prec D(G')$.

برهان. حکم به‌طور مستقیم از قضیه ۱۱،۲ و لم ۱۵،۲ بدست می‌آید. □

توجه ۲۰،۲. فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. دراین‌صورت برای $i\in\{1,2,\ldots,n\}$، G_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_1 \cong C_n,\qquad G_2 \in C(1^{(3)},(n-2)^{(2)},1^{(1)}),\qquad G_3 \in C(2^{(3)},(n-4)^{(2)},2^{(1)}),$$

$$G_4 \in C(3^{(3)},(n-6)^{(2)},3^{(1)}),\qquad G_5 \in C(1^{(4)},(n-3)^{(2)},2^{(1)}),$$

$$G_6 \in C(4^{(3)},(n-8)^{(2)},4^{(1)}),\qquad G_7 \in C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)}),$$

$$G_8 \in C(5^{(3)},(n-10)^{(2)},5^{(1)}),\qquad G_9 \in C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)}),$$

$$G_{10} \in C(6^{(3)},(n-12)^{(2)},6^{(1)}),\qquad G_{11} \in C(1^{(4)},3^{(3)},(n-9)^{(2)},5^{(1)}),$$

$$G_{12} \in C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)}),\qquad G_{13} \in C(1^{(4)},4^{(3)},(n-11)^{(2)},6^{(1)}),$$

$$G_{14} \in C(2^{(4)},1^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)}),\quad G_{15} \in C(1^{(5)},(n-4)^{(2)},3^{(1)}),$$

$$G_{16} \in C(2^{(4)},2^{(3)},(n-10)^{(2)},6^{(1)}),\quad G_{17} \in C(1^{(5)},1^{(3)},(n-6)^{(2)},4^{(1)}),$$

$$G_{18} \in C(1^{(5)},2^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)}),\quad G_{19} \in C(1^{(5)},1^{(4)},(n-7)^{(2)},5^{(1)}).$$

قضیه ۲۱،۲. فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. همچنین برای $i \in \{1,2,\ldots,n\}$، فرض کنیم G_i گراف تعریف شده در توجه ۲۰،۲ است. دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف)

$$\Sigma_2(G_1) < \Sigma_2(G_2) < \Sigma_2(G_3) < \Sigma_2(G_4) = \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6) = \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8) = \Sigma_2(G_9) < \Sigma_2(G_{10}) = \Sigma_2(G_{11}) = \Sigma_2(G_{12}) = \Sigma_2(G_{15}) < \Sigma_2(G_{13}) = \Sigma_2(G_{14}) = \Sigma_2(G_{17}) < \Sigma_2(G_{16}) = \Sigma_2(G_{18}) < \Sigma_2(G_{19}).$$

ب)

$$\Sigma_3(G_1) < \Sigma_3(G_2) < \Sigma_3(G_3) < \Sigma_3(G_4) < \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6) < \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8) < \Sigma_3(G_9) < \Sigma_3(G_{10}) < \Sigma_3(G_{11}) < \Sigma_3(G_{12}) < \Sigma_3(G_{13}) < \Sigma_3(G_{14}) = \Sigma_3(G_{15}) < \Sigma_3(G_{16}) = \Sigma_3(G_{17}) < \Sigma_3(G_{18}) < \Sigma_3(G_{19}).$$

پ) اگر $k \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$، آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3) < \min\{\Sigma_k(G_4),\Sigma_k(G_5),\Sigma_k(G_6),\Sigma_k(G_7),\Sigma_k(G_8),\Sigma_k(G_9),\Sigma_k(G_{10}),\Sigma_k(G_{11}),\Sigma_k(G_{12}),\Sigma_k(G_{13}),\Sigma_k(G_{14}),\Sigma_k(G_{15}),\Sigma_k(G_{16}),\Sigma_k(G_{17}),\Sigma_k(G_{18}),\Sigma_k(G_{19})\}.$$

ت) اگر $k \in (0,1)$، آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) > \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3) > \max\{\Sigma_k(G_4),\Sigma_k(G_5),\Sigma_k(G_6),\Sigma_k(G_7),\Sigma_k(G_8),\Sigma_k(G_9),\Sigma_k(G_{10}),\Sigma_k(G_{11}),\Sigma_k(G_{12}),\Sigma_k(G_{13}),\Sigma_k(G_{14}),\Sigma_k(G_{15}),\Sigma_k(G_{16}),\Sigma_k(G_{17}),\Sigma_k(G_{18}),\Sigma_k(G_{19})\}.$$

برهان. اگر مقدار k در جداول ۱ تا ۷ را به‌ترتیب دو و سه در نظر بگیریم، آن‌گاه با برخی محاسبات ساده می‌توان چک کرد که حالت‌های (الف) و (ب) برقرار هستند.

پ) با استفاده از جدول ۱ داریم:

$$\Sigma_k(G_1) - \Sigma_k(G_2) = (2 \times 2^k) - (3^k + 1). \qquad (۱،۲)$$

حال اگر فرض کنیم $x = (2,2)$ و $y = (3,1)$، آن‌گاه واضح است که $x \prec y$. بنابراین با به‌کار بردن قسمت (الف) قضیه ۷،۲ داریم: $(۲ \times ۲^k) < (3^k + 1)$. پس با استفاده از معادله (۱،۲) می‌توان دید که $\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2)$. ثبات سایر حالت‌ها باقیمانده از (پ)، مشابه با این حالت است و لذا از بیان آن‌ها در اینجا صرف‌نظر می‌کنیم.

ت) با استفاده از قسمت (ب) قضیه ۷،۲ و یک روش مشابه با قسمت (پ) می‌توان دید که حکم در این حالت برقرار است. □

قضیه ۲۲،۲. فرض کنیم n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی دوازده است. همچنین برای $i\in\{1,2,\ldots,n\}$، فرض کنیم G_i گراف تعریف شده در توجه ۲۰،۲ است. دراین‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

الف) اگر $G \in \mathcal{U}(n)\setminus\{G_1, G_2, \ldots, G_9\}$، آنگاه

$$\Sigma_2(G_1) < \Sigma_2(G_2) < \Sigma_2(G_3) < \Sigma_2(G_4) = \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6) = \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8) = \Sigma_2(G_9) < \Sigma_2(G).$$

ب) اگر $G \in \mathcal{U}(n)\setminus\{G_1, G_2, \ldots, G_8\}$، آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) \geq \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3).$$

پ) اگر $k \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ و $G \in \mathcal{U}(n)\setminus\{G_1, G_2, G_3\}$، آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3) < \Sigma_k(G).$$

ت) اگر $k \in (0,1)$ و $G \in \mathcal{U}(n)\setminus\{G_1, G_2, G_3\}$، آنگاه

$$\Sigma_k(G_1) > \Sigma_k(G_2) > \Sigma_k(G_3) > \Sigma_k(G).$$

برهان. با استفاده از قسمت (الف) قضیه ۲۱،۲،

$$\Sigma_2(G_1) < \Sigma_2(G_2) < \Sigma_2(G_3) < \Sigma_2(G_4) = \Sigma_2(G_5) < \Sigma_2(G_6) = \Sigma_2(G_7) < \Sigma_2(G_8) = \Sigma_2(G_9).$$

همچنین اگر $G \in \{G_{10}, G_{11}, \ldots, G_{19}\}$، آنگاه آن‌گاه دوباره با استفاده از قسمت (الف) قضیه ۲،۲۱ می‌توان دید که حکم برقرار است. درغیراین‌صورت حکم از قضیه‌های ۱۶،۲، ۱۷،۲، ۱۸،۲، ۱۹،۲ و قسمت (الف) ۷،۲ بدست می‌آید.

ب) با به‌کار بردن قسمت (ب) قضیه ۲۱،۲،

$$\Sigma_3(G_1) < \Sigma_3(G_2) < \Sigma_3(G_3) < \Sigma_3(G_4) < \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6) < \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8).$$

همچنین اگر $G \in \{G_9, G_{10}, \ldots, G_{19}\}$، آنگاه دوباره قسمت (ب) قضیه ۲۱،۲ حکم را به ما می‌دهد. درغیراین‌صورت حکم از قضیه‌های ۱۶،۲، ۱۷،۲، ۱۸،۲، ۱۹،۲ و قسمت (الف) ۲،۷ نتیجه می‌شود.

پ) با استفاده از قسمت (پ) قضیه ۲،۲۱،

$$\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3)$$

بعلاوه اگر $\Sigma_k(G_1) < \Sigma_k(G_2) < \Sigma_k(G_3)$، آنگاه دوباره قسمت (پ) قضیه ۲۱،۲ حکم را نتیجه می‌دهد. درغیراین‌صورت قضیه‌های ۱۶،۲، ۱۷،۲، ۱۸،۲، ۱۹،۲ و قسمت (الف) ۲،۷ حکم را به ما می‌دهند.

ت) با به‌کار بردن قسمت (ت) قضیه۲۱،۲،

$$\Sigma_3(G_1) < \Sigma_3(G_2) < \Sigma_3(G_3) < \Sigma_3(G_4) < \Sigma_3(G_5) < \Sigma_3(G_6) < \Sigma_3(G_7) < \Sigma_3(G_8) < \Sigma_3(G).$$

همچنین اگر $G \in \{G_4, G_5, \ldots, G_{19}\}$، آنگاه دوباره قسمت (ت) قضیه ۲۱،۲ حکم را به ما می‌دهد. درغیراین‌صورت حکم از قضیه‌های ۱۶،۲، ۱۷،۲، ۱۸،۲، ۱۹،۲ و قسمت (ب) قضیه ۷،۲ بدست می‌آید.□

جدول (۱): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T((n-2)^{(2)}, 2^{(1)})$ و مجموع توان k-ام درجات آن‌ها

Σ_k	خانواده
$n2^k$	$C(n^{(2)})$
$3^k + (n-2)2^k + 1$	$C(1^{(3)}, (n-2)^{(2)}, 1^{(1)})$
$2 \times 3^k + (n-4)2^k + 2$	$C(2^{(3)}, (n-4)^{(2)}, 2^{(1)})$

جدول (۲): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(3)}, (n-4)^{(2)}, 3^{(1)})$ و مجموع توان k-ام درجات آن‌ها

Σ_k	خانواده
$3^k + (n-2)2^k + 1$	$C(1^{(3)}, (n-2)^{(2)}, 1^{(1)})$
$2 \times 3^k + (n-4)2^k + 2$	$C(2^{(3)}, (n-4)^{(2)}, 2^{(1)})$
$4^k + (n-3)2^k + 2$	$C(1^{(4)}, (n-3)^{(2)}, 2^{(1)})$
$3 \times 3^k + (n-6)2^k + 3$	$C(3^{(3)}, (n-6)^{(2)}, 3^{(1)})$
$4^k + 3^k + (n-5)2^k + 3$	$C(1^{(4)}, 1^{(3)}, (n-5)^{(2)}, 3^{(1)})$

جدول (۳): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(2^{(3)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$ و مجموع توان k-ام درجات آن‌ها

خانواده	Σ_k
$C(2^{(3)},(n-4)^{(2)},2^{(1)})$	$2\times 3^k+(n-4)2^k+2$
$C(3^{(3)},(n-6)^{(2)},3^{(1)})$	$3\times 3^k+(n-6)2^k+3$
$C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)})$	$4^k+3^k+(n-5)2^k+3$
$C(4^{(3)},(n-8)^{(2)},4^{(1)})$	$4\times 3^k+(n-8)2^k+4$
$C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$	$4^k+2\times 3^k+(n-7)2^k+4$
$C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$	$2\times 4^k+(n-6)2^k+4$

جدول (۴): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(3^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)})$ و مجموع توان k-ام درجات آن‌ها

خانواده	Σ_k
$C(3^{(3)},(n-6)^{(2)},3^{(1)})$	$3\times 3^k+(n-6)2^k+3$
$C(4^{(3)},(n-8)^{(2)},4^{(1)})$	$4\times 3^k+(n-8)2^k+4$
$C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$	$4^k+2\times 3^k+(n-7)2^k+4$
$C(5^{(3)},(n-10)^{(2)},5^{(1)})$	$5\times 3^k+(n-10)2^k+5$
$C(1^{(4)},3^{(3)},(n-9)^{(2)},5^{(1)})$	$4^k+3\times 3^k+(n-9)2^k+5$
$C(2^{(4)},1^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)})$	$2\times 4^k+3^k+(n-8)2^k+5$

جدول (۵): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(4^{(3)},(n-10)^{(2)},6^{(1)})$ و مجموع توان k-ام درجات آن‌ها

خانواده	Σ_k
$C(4^{(3)},(n-8)^{(2)},4^{(1)})$	$4\times 3^k+(n-8)2^k+4$
$C(5^{(3)},(n-10)^{(2)},5^{(1)})$	$5\times 3^k+(n-10)2^k+5$
$C(1^{(4)},3^{(3)},(n-9)^{(2)},5^{(1)})$	$4^k+3\times 3^k+(n-9)2^k+5$
$C(6^{(3)},(n-12)^{(2)},6^{(1)})$	$6\times 3^k+(n-12)2^k+6$
$C(1^{(4)},4^{(3)},(n-11)^{(2)},6^{(1)})$	$4^k+4\times 3^k+(n-11)2^k+6$
$C(2^{(4)},2^{(3)},(n-10)^{(2)},6^{(1)})$	$2\times 4^k+2\times 3^k+(n-10)2^k+6$

جدول (۶): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(4)},(n-5)^{(2)},4^{(1)})$ و مجموع توان k-ام درجات آن‌ها

خانواده	Σ_k
$C(1^{(4)},(n-3)^{(2)},2^{(1)})$	$4^k+(n-3)2^k+2$
$C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)})$	$4^k+3^k+(n-5)2^k+3$
$C(1^{(5)},(n-4)^{(2)},3^{(1)})$	$5^k+(n-4)2^k+3$
$C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$	$4^k+2\times 3^k+(n-7)2^k+4$
$C(1^{(5)},1^{(3)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$	$5^k+3^k+(n-6)2^k+4$

جدول (۷): اندازه و نوع قلم‌ها خانواده گراف‌های تک دور همبند تولید شده از $T(1^{(4)},1^{(3)},(n-7)^{(2)},5^{(1)})$ و مجموع توان k-ام درجات آن‌ها

خانواده	Σ_k
$C(1^{(4)},1^{(3)},(n-5)^{(2)},3^{(1)})$	$4^k+3^k+(n-5)2^k+3$
$C(1^{(4)},2^{(3)},(n-7)^{(2)},4^{(1)})$	$4^k+2\times 3^k+(n-7)2^k+4$
$C(2^{(4)},(n-6)^{(2)},4^{(1)})$	$2\times 4^k+(n-6)2^k+4$
$C(1^{(4)},3^{(3)},(n-9)^{(2)},5^{(1)})$	$4^k+3\times 3^k+(n-9)2^k+5$
$C(2^{(4)},1^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)})$	$2\times 4^k+3^k+(n-8)2^k+5$
$C(1^{(5)},2^{(3)},(n-8)^{(2)},5^{(1)})$	$5^k+2\times 3^k+(n-8)2^k+5$
$C(1^{(5)},1^{(4)},(n-7)^{(2)},5^{(1)})$	$5^k+4^k+(n-7)2^k+5$

سپاسگزاری

نویسندگان این مقاله از هم‌فکری اعضای هیئت تحریریه مجلـهٔ علمی ترویجی محاسبات نرم کمال سپاسگزاری را دارند.

مراجع

[1] De Caen, D., *"An upper bound on the sum of the squares of the degrees in a graph"*, Discrete Math. 185, 245-248 (1998).

[2] Das, K. Ch., *"Maximizing the sum of the squares of the degrees of a graph"*, Discrete Math. 285, 57-66 (2004).

[3] K Das, K. Ch., *"Sharp bounds for the sum of the squares of the degrees of a graph"*, Kragujevac J. Math. 25, 31-49 (2003).

[4] Yoon, Y. S., Kim, J. K., *"A relationship between bounds on the sum of squares of degrees of a graph"*, J. Appl. Math. Comput. 21, 233-238 (2006).

[5] Eliasi, M., Ghalavand, A., *"Extremal Trees with Respect to Some Versions of Zagreb Indices Via Majorization"*, Iranian J. Math. Chem. 8 (4) 391-401 (2017).

[6] Ghalavand, A., Ashrafi, A. R., Gutman, I., *"Extremal graphs for the second multiplicative Zagreb index"*, Bull. Int. Math. Virtual Inst. 8 (2) 369-383 (2018).

[7] Liu, M., Liu, B., *"Some properties of the first general Zagreb index"*, Australas. J. Combin. 47, 285-294 (2010).

[8] Mc Morris, F. R., Zaslavsky, T., *"The Number of Cladistic Characters"*, Mathematical Biosciences, 54,(1–2), 3-10 (1981).

[9] Rasouli, S., Khaksar Haghami, F., *"Maximal, Prime and Minimal prime filters in Residuated Lattices"*, Soft Computing Journal, doi.org/10.22052/scj.2023.243375.1032.

[10] Fathalikhani, Kh., Ashrafi, A.R., "Metric and Combinatorial Properties of Fibonacci and Lucas cubes", Soft Computing Journal, 5(1) 78-100 (2017).

[11] Khaleghi Tabar, A., Farazkhish, R., *"Routing Improvement for Vehicular Ad Hoc Networks (VANETs) Using Nature Inspired Algorithms"*, Soft Computing Journal, 6(2) 72-85 (2017).