



دانشگاه کاشان  
University of Kashan

مجله محاسبات نرم

## SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: [sci.kashanu.ac.ir](http://sci.kashanu.ac.ir)



### یک روش بلوکی هیبریدی شبکه تطبیقی برای حل معادلات دیفرانسیل آشفته تکین غیرخطی\*

مرتضی بیشه‌نیاسر<sup>1\*</sup>، استادیار، علیرضا مهدی‌پور<sup>۱</sup>، دانشجوی دکتری

<sup>۱</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.

#### چکیده

در این مقاله، یک روش عددی موثر برای معادلات دیفرانسیل آشفته تکین غیرخطی مرتبه اول ارائه می‌کنیم. اساس این روش یک روش بلوکی هیبریدی با چهار نقطه بین گامی روی یک شبکه غیریکنواخت است. خواص اصلی روش بلوکی، شامل سازگاری و صفراپایداری و ناحیه پایداری بررسی می‌شوند. به منظور بهینه‌سازی نقاط شبکه از درونیایی و تابع نشانگر طول منحنی استفاده خواهیم کرد. بعد از یافتن شبکه جدید، می‌توان روش بلوکی هیبریدی پیشنهادی را روی شبکه جدید به کار گرفت تا جواب عددی نیز بهینه گردد. نتایج عددی بیانگر دقت و کارایی روش ارائه شده خواهد بود.

#### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۲۰ مهر ماه ۱۴۰۱

پذیرش ۱۲ دی ماه ۱۴۰۱

کلمات کلیدی:

معادلات دیفرانسیل آشفته تکین غیرخطی

روش بلوکی هیبریدی

سازگاری

صفراپایداری

شبکه تطبیقی

تابع نشانگر

© ۱۴۰۱ نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

$$\begin{cases} \epsilon u'(t) = g(t, u(t)), & t \in [0, T] \\ u(0) = A \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $g$  تابعی پیوسته و  $1 \gg \epsilon > 0$  متغیری کوچک است. فرض می‌کنیم که تمام شرایط وجود جواب منحصر بفرد برای معادله (۱) فراهم است. معادله آشفته تکین فوق در بسیاری از شاخه‌های مهندسی همانند دینامیک سیالات و معادله انتقال حرارت کاربرد فراوان دارد. به دلیل وجود متغیر  $\epsilon$  به عنوان ضریب  $u'(t)$ ، جواب معادله تغییرات شدیدی در نزدیکی مرز  $t = 0$  خواهد داشت.

برای تقریب جواب معادله (۱)، دو روش کلی وجود دارد. در روش اول در ابتدا از تکنیک خطی‌سازی مساله استفاده می‌شود. به عنوان مثال در [۳] بعد از خطی‌سازی مساله به کمک تکنیک خطی‌سازی نیوتن، جواب به وسیله تفاضل برازش شده نمایی

#### ۱. مقدمه

با پیدایش رایانه‌های دیجیتال با توانایی محاسباتی بالا، پیاده‌سازی الگوریتم‌ها به منظور بررسی جواب مساله، هموارتر شده است. این الگوریتم‌ها گاهی برای یک مساله پزشکی است [۱] و گاهی برای یک مساله مهندسی [۲] ارائه می‌شود. در این مقاله قصد داریم یک الگوریتم، برای حل عددی معادله دیفرانسیل آشفته تکین که دارای جوابی با تغییرات شدید اولیه است، ارائه کنیم. برای این منظور معادله دیفرانسیل آشفته تکین غیرخطی که در معادله (۱)، بیان شده است را در نظر بگیرید.

\* نوع مقاله: پژوهشی

\* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: [mbisheh@kashanu.ac.ir](mailto:mbisheh@kashanu.ac.ir) (بیشه‌نیاسر)

[mahdipour@grad.kashanu.ac.ir](mailto:mahdipour@grad.kashanu.ac.ir) (مهدی‌پور)

در بخش ۲ این مقاله، به معرفی یک روش بلوکی هیبریدی با چهار نقطه بین گامی پرداخته می‌شود. در بخش ۳ خصوصیات سازگاری، صفر پایداری و ناحیه پایداری روش بررسی شده و در بخش ۴، به کمک یک شبکه غیریکنواخت، یک الگوریتم برای تقریب جواب و بهینه‌سازی نقاط ارائه می‌شود. بخش ۵، به چندین مثال عددی به منظور بررسی کارایی روش بیان شده اختصاص یافته است. در نهایت، در بخش ۶ نتیجه‌گیری حاصل از این کار پژوهشی ارائه شده است.

## ۲. معرفی یک روش بلوکی هیبریدی

روش‌های بلوکی نخستین بار در مرجع [۹] معرفی شد و اخیراً توسط محققان زیادی برای مساله‌های گوناگون بسط و گسترش یافته است. در این رده از روش‌ها، بر خلاف روش‌های چندگامی محدودیت دالکوئیست<sup>۱</sup> حاکم نیست و می‌توان در هر تکرار از این روش‌ها، جواب عددی را در بیش از یک نقطه به دست آورد. برای آشنایی با این روش‌ها در حل مساله‌های مقدار اولیه مراجع [۱۰]، [۱۱] را ببینید. قابل ذکر است که از این روش‌ها می‌توان در مساله‌های مقدار مرزی [۱۲] و معادله دیفرانسیل تاخیری [۱۳] نیز استفاده کرد.

برای شروع، معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر با شرط اولیه داده شده را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [t_0, T] \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \quad (۴)$$

فرض کنید  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  یک افراز دلخواه از بازه  $[t_0, T]$  باشد و  $h_{k+1} = t_{k+1} - t_k$  در سراسر مقاله از  $f_k$  و  $u_k$  به ترتیب به عنوان تقریبی از  $f(t_k, u(t_k))$  و  $u(t_k)$  استفاده خواهیم کرد. روی بازه  $[t_i, t_{i+1}]$  جواب معادله را به صورت

$$u(t) \approx P(t) = \sum_{j=0}^6 a_j t^j. \quad (۵)$$

در نظر می‌گیریم. لذا با مشتق‌گیری از رابطه (۵)، رابطه (۶) حاصل می‌گردد.

تقریب زده شده است. روش دومی که برای حل معادله فوق می‌توان به کار گرفت، استفاده از طرح‌های تفاضل متناهی روی شبکه‌های غیریکنواخت است. به عنوان مثال در [۴] از یک طرح تفاضل متناهی غیراستاندارد بر روی دو شبکه غیریکنواخت برای تقریب معادله (۱) استفاده شده است. در روش‌های مبتنی بر شبکه غیریکنواخت و تطبیقی سعی می‌شود در نواحی که تغییرات جواب شدید است، نقاط شبکه متمرکز شوند. این فرآیند تطبیق، توسط تابع نشانگر و اصل هم‌توزیعی صورت می‌گیرد. وظیفه تابع نشانگر این است که نواحی که تغییرات جواب در آن نواحی شدید و ناگهانی است را شناسایی کند. توابع نشانگری که بدین منظور مورد استفاده قرار می‌گیرند به طور معمول بر اساس خواص فیزیکی و هندسی تعریف می‌شوند، به همین دلیل می‌توان توابع بسیاری را به عنوان تابع نشانگر مورد استفاده قرار داد. از مهم‌ترین و پرکاربردترین توابع نشانگر می‌توان به توابع زیر اشاره کرد:

- تابع نشانگر طول منحنی  $M(t) = \sqrt{1 + (u'(t))^2}$

- تابع نشانگر انحنا

- $M(t) = \sqrt[4]{1 + (u''(t))^2}$

نویسندگان در [۵] برای مساله آشفته تکین با شرایط مرزی انتگرالی از تابع نشانگر طول منحنی استفاده کردند، اما در مرجع [۶]، برای همین مساله از تابع نشانگر جدیدی بر اساس پارامتر  $\varepsilon$  استفاده شده است.

به طور کلی برای یافتن شبکه متناسب با رفتار جواب معادله، کافی است نقاط شبکه  $\Omega = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$  طوری انتخاب شوند که رابطه زیر

$$\int_{t_0}^{t_1} M(t) dt = \dots = \int_{t_{N-1}}^{t_N} M(t) dt \quad (۲)$$

یا به عبارتی

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} M(t) dt = \frac{1}{N} \int_{t_0}^T M(t) dt \quad (۳)$$

برقرار باشد. ما در این مقاله از تابع نشانگر طول منحنی استفاده خواهیم کرد. به منظور آشنایی بیشتر با کاربرد شبکه‌های تطبیقی در مساله‌های مهندسی و پزشکی مراجع [۷]، [۸] را مطالعه نمایید.

<sup>1</sup> Dahlquist Barrier

برای ادامه فرآیند در زیربازه بعدی نیاز است. بنابراین با به کارگیری عملگر تفاضل خطی روی رابطه متناظر با  $u_{i+1}$  نتیجه می شود که

$$\mathcal{L}[u(t_{i+1}), h_{i+1}] = \frac{m_1}{m_2} h_{i+1}^7 u^{(7)}(t_i) + O(h_{i+1}^8). \quad (11)$$

که در آن

$$m_1 = 70pqr - 35pqr - 35pqs - 35prs - 35qrxs + 21pq + 21pr + 21ps + 21qr + 21qs + 21rs - 14p - 14q - 14r - 14s + 10, \quad (12)$$

$$m_2 = -302400.$$

برای یافتن یک روش با دقت بهینه، کافی است ضریب  $h_{i+1}^7 u^{(7)}(t_i)$  را برابر صفر قرار دهیم، در نتیجه رابطه زیر حاصل می گردد:

$$s = \frac{35pqr - 21pq - 21pr - 21qr + 14p + 14q + 14r - 10}{70pqr - 35pq - 35pr - 35qr + 21p + 21q + 21r - 14}. \quad (13)$$

با توجه به اینکه بی شمار انتخاب برای  $q, p, r$  و  $s$  وجود دارد، ما جواب  $q = \frac{3}{5}, p = \frac{1}{5}, r = \frac{4}{5}$  و  $s = \frac{5}{7}$  را انتخاب می کنیم. با این انتخاب، خطای برشی موضعی زیر نتیجه می شود:

$$\mathcal{L}[u(t_{i+1}), h_{i+1}] = \frac{11}{123480000} h_{i+1}^8 u^{(8)}(t_n) + O(h_{i+1}^9). \quad (14)$$

با جایگذاری مقادیر  $q, p, r$  و  $s$  در روش بلوکی هیبریدی بیان شده در رابطه (۱۰)، می توان روش بلوکی هیبریدی بهینه مورد نظر را به دست آورد (رابطه (۱۵) را مشاهده کنید).

$$\begin{pmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 & t_i^4 & t_i^5 & t_i^6 \\ 0 & 1 & 2t_i & 3t_i^2 & 4t_i^3 & 5t_i^4 & 6t_i^5 \\ 0 & 1 & 2t_{i+p} & 3t_{i+p}^2 & 4t_{i+p}^3 & 5t_{i+p}^4 & 6t_{i+p}^5 \\ 0 & 1 & 2t_{i+q} & 3t_{i+q}^2 & 4t_{i+q}^3 & 5t_{i+q}^4 & 6t_{i+q}^5 \\ 0 & 1 & 2t_{i+r} & 3t_{i+r}^2 & 4t_{i+r}^3 & 5t_{i+r}^4 & 6t_{i+r}^5 \\ 0 & 1 & 2t_{i+s} & 3t_{i+s}^2 & 4t_{i+s}^3 & 5t_{i+s}^4 & 6t_{i+s}^5 \\ 0 & 1 & 2t_{i+1} & 3t_{i+1}^2 & 4t_{i+1}^3 & 5t_{i+1}^4 & 6t_{i+1}^5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_i \\ f_i \\ f_{i+p} \\ f_{i+q} \\ f_{i+r} \\ f_{i+s} \\ f_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u_{i+p} &= u_i + h_{i+1}(\beta_{11}f_i + \beta_{12}f_{i+p} + \beta_{13}f_{i+q} + \beta_{14}f_{i+r} + \beta_{15}f_{i+s} + \beta_{16}f_{i+1}), \\ u_{i+q} &= u_i + h_{i+1}(\beta_{21}f_i + \beta_{22}f_{i+p} + \beta_{23}f_{i+q} + \beta_{24}f_{i+r} + \beta_{25}f_{i+s} + \beta_{26}f_{i+1}), \\ u_{i+r} &= u_i + h_{i+1}(\beta_{31}f_i + \beta_{32}f_{i+p} + \beta_{33}f_{i+q} + \beta_{34}f_{i+r} + \beta_{35}f_{i+s} + \beta_{36}f_{i+1}), \\ u_{i+s} &= u_i + h_{i+1}(\beta_{41}f_i + \beta_{42}f_{i+p} + \beta_{43}f_{i+q} + \beta_{44}f_{i+r} + \beta_{45}f_{i+s} + \beta_{46}f_{i+1}), \\ u_{i+1} &= u_i + h_{i+1}(\beta_{51}f_i + \beta_{52}f_{i+p} + \beta_{53}f_{i+q} + \beta_{54}f_{i+r} + \beta_{55}f_{i+s} + \beta_{56}f_{i+1}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$u'(t) \approx P'(t) = \sum_{j=0}^6 ja_j t^{j-1}. \quad (6)$$

با درون یابی رابطه (۵) در نقطه  $t_i$  و درون یابی رابطه (۶) در نقاط  $t_i, t_{i+1}, t_{i+p}, t_{i+q}, t_{i+r}, t_{i+s}$  و  $t_{i+1}$  که  $0 < r, s, p, q < 1$  معادلات زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} P(t_i) &= u_i, \\ P'(t_{i+j}) &= f_{i+j}, \\ j &= 0, p, q, r, s, 1; \end{aligned} \quad (7)$$

که می توان معادلات حاصل شده را در شکل ماتریسی باز نویسی کرد (رابطه (۸) را ببینید).

با حل معادلات و یافتن ضرایب  $a_j$ ها و جایگذاری در رابطه (۵) و اعمال تغییر متغیر  $t = t_i + nh_{i+1}$  می توان روش ضمنی هیبریدی یک گامی را به شکل زیر به دست آورد.

$$P(t_i + nh_{i+1}) = u_i + h_{i+1}(\gamma_0 f_i + \gamma_p f_{i+p} + \gamma_q f_{i+q} + \gamma_r f_{i+r} + \gamma_s f_{i+s} + \gamma_1 f_{i+1}), \quad (9)$$

که در آن ضرایب  $\gamma_k$ ها به ازای  $k = 0, p, q, r, s, 1$  بر حسب  $p, q, r, s$  و  $n$  می باشند. اکنون با فرض  $n = p, q, r, s, 1$  در  $P(t_i + nh_{i-1})$  دستگامی شامل پنج معادله و پنج مجهول به دست می آید که همان روش هیبریدی مورد نظر است (رابطه (۱۰) را مشاهده کنید). در رابطه (۱۰)،  $\beta_{ij}$  به ازای  $1 \leq i \leq 5$  و  $1 \leq j \leq 6$  بر حسب  $q, p, r$  و  $s$  می باشند. برای به دست آوردن مقادیر مناسب  $q, p, r$  و  $s$ ، کفایت خطای برشی موضعی در  $u_{i+1}$  کمینه سازی شود؛ زیرا فقط به مقدار  $u_{i+1}$

$$\begin{aligned}
 u_{i+p} &= u_i + h_{i+1} \left( \frac{15941}{225000} f_i + \frac{7099}{43200} f_{i+p} - \frac{137}{576} f_{i+q} - \frac{409}{1800} f_{i+r} + \frac{2235331}{5400000} f_{i+s} + \frac{1913}{120000} f_{i+1} \right), \\
 u_{i+q} &= u_i + h_{i+1} \left( \frac{1437}{25000} f_i + \frac{1523}{4800} f_{i+p} + \frac{171}{320} f_{i+q} + \frac{47}{200} f_{i+r} - \frac{319333}{600000} f_{i+s} - \frac{477}{40000} f_{i+1} \right), \\
 u_{i+r} &= u_i + h_{i+1} \left( \frac{1618}{28125} f_i + \frac{214}{675} f_{i+p} + \frac{26}{45} f_{i+q} + \frac{58}{225} f_{i+r} - \frac{33614}{84375} f_{i+s} - \frac{22}{1875} f_{i+1} \right), \\
 u_{i+s} &= u_i + h_{i+1} \left( \frac{69655}{1210104} f_i + \frac{9203125}{29042496} f_{i+p} + \frac{5640625}{9680832} f_{i+q} + \frac{265625}{1210104} f_{i+r} - \frac{5455}{12096} f_{i+s} - \frac{36625}{3226944} f_{i+1} \right), \\
 u_{i+1} &= u_i + h_{i+1} \left( \frac{7}{120} f_i + \frac{1625}{5184} f_{i+p} + \frac{125}{192} f_{i+q} + \frac{125}{216} f_{i+r} - \frac{16807}{25920} f_{i+s} + \frac{3}{64} f_{i+1} \right).
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

بکار گیریم پس از ساده‌سازی، ضرایب  $C_i$  به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 C_0 = C_1 = \dots = C_6 = 0, \\
 C_7 = \left( -\frac{136}{369140625}, \frac{1}{13671875}, \frac{26}{369140625}, \frac{53}{778248135}, 0 \right)^T.
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

بنابراین روش بلوکی هیبریدی پیشنهادی مورد نظر سازگار از مرتبه ۶ است.

### ۳.۲. صفر پایداری روش

به منظور بررسی صفر پایداری روش بیان شده، می‌توان روش بلوکی بیان شده در رابطه (۱۵) را به فرم زیر بازنویسی نمود:

$$A_2 U_{i+1} = A_1 U_i + h_{i+1} (B_1 F_i + B_2 F_{i+1}), \tag{۱۹}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15941}{225000} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1437}{25000} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1618}{28125} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{69655}{1210104} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{120} \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

با فرض داشتن  $u_i$  و حل دستگاه نمایش داده شده در رابطه (۱۵)، می‌توان  $u_{i+p}, u_{i+q}, u_{i+r}, u_{i+s}$  و  $u_{i+1}$  را به دست آورد.

حال با داشتن  $u_{i+1}$  می‌توان همین فرآیند را روی زیربازه بعدی بکار گرفت تا  $u_{i+2}$  حاصل شود. این فرآیند تا رسیدن به نقطه نهایی بازه تکرار می‌شود.

### ۳. مشخصه‌های روش بلوکی هیبریدی پیشنهادی

در این بخش خواص روش بلوکی هیبریدی یک گامی بیان شده در بخش قبل، مانند سازگاری، صفر پایداری، همگرایی و بازه پایداری مطلق بررسی می‌گردد.

#### ۳.۱. مرتبه روش

عملگر تفاضل خطی برای روش ضمنی بلوکی هیبریدی حاصل شده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{L}[u(t_i), h_{i+1}] = \sum_n [\alpha_n u(t_i + nh_{i+1}) - h\eta_n u'(t_i + nh_{i+1})]. \tag{۱۶}$$

روش بلوکی هیبریدی مورد نظر و متناظر با عملگر تفاضل خطی فوق از مرتبه  $p$  است اگر بعد از بسط تیلور  $u(t_i + nh_{i+1})$  و  $u'(t_i + nh_{i+1})$  رابطه فوق را بتوان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[u(t_i), h_{i+1}] &= C_0 u(t_i) + C_1 h_{i+1} u'(t_i) \\
 &+ C_2 h_{i+1}^2 u''(t_i) + \dots;
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

که در آن  $C_1 = C_2 = \dots = C_p = 0$  و  $C_{p+1} \neq 0$ . [۱۴]. اکنون اگر بسط تیلور  $u(t_i + nh_{i+1})$  و  $u'(t_i + nh_{i+1})$  حول  $t_i$  را

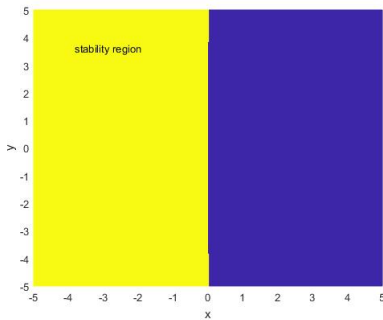
ماتریس دارای مقادیر ویژه  $\{0,0,0,0,R(z)\}$  می باشد که

$$R(z) = -\frac{8z^5 + 212z^4 + 3108z^3 + 27780z^2 + 141000z + 315000}{30z^5 - 619z^4 + 6672z^3 - 44280z^2 + 174000z - 315000} \quad (25)$$

ناحیه پایداری مطلق روش به صورت

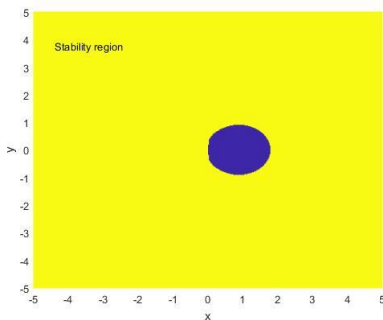
$$S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| < 1\} \quad (26)$$

تعریف می شود. در حالت غیرآشفته  $\varepsilon = 1$  ناحیه پایداری شامل کل نیم صفحه چپ دستگاه مختلط است؛ بنابراین در این حالت روش  $A$ -پایدار می باشد (شکل (۱) را مشاهده کنید).



شکل (۱): ناحیه پایداری روش به ازای  $\varepsilon = 1$ .

با توجه به ضرایب پیشرو در  $R(z)$ ، وقتی  $0^+ \rightarrow \varepsilon$  ناحیه پایداری به کل صفحه مختلط بسط داده می شود، لذا  $A$ -پایداری روش حفظ می شود. در شکل (۲) می توانید ناحیه پایداری را به ازای  $\varepsilon = 0.05$  مشاهده کنید.



شکل (۲): ناحیه پایداری روش به ازای  $\varepsilon = 0.05$ .

### ۳.۴. بازنویسی روش در قالب روش رانگ-کوتا

به منظور بررسی مرتبه روش بلوکی هیبریدی، می توان روش مذکور را در قالب یک روش رانگ-کوتا<sup>۱</sup> بیان کرد. برای این امر کافی است آرایه بوچر<sup>۲</sup> متناظر با روش رانگ کوتای معادل

$$B_2 = \begin{pmatrix} 7099 & -137 & -409 & 2235331 & 1913 \\ 43200 & 576 & 1800 & 5400000 & 120000 \\ 1523 & 171 & 47 & -319333 & -477 \\ 4800 & 320 & 200 & 600000 & 40000 \\ 214 & 26 & 58 & -33614 & -22 \\ 675 & 45 & 225 & 84375 & 1875 \\ 9203125 & 5640625 & 265625 & -5455 & -36625 \\ 2904296 & 9680832 & 1210104 & 12096 & 3226944 \\ 1625 & 125 & 125 & -16807 & 3 \\ 5184 & 192 & 216 & 25920 & 64 \end{pmatrix}$$

$$U_i = (u_{i-\frac{4}{5}}, u_{i-\frac{2}{5}}, u_{i-\frac{1}{5}}, u_{i-\frac{2}{7}}, u_i)^T,$$

$$U_{i+1} = (u_{i+\frac{1}{5}}, u_{i+\frac{3}{5}}, u_{i+\frac{4}{5}}, u_{i+\frac{5}{7}}, u_{i+1})^T,$$

$$F_i = (f_{i-\frac{4}{5}}, f_{i-\frac{2}{5}}, f_{i-\frac{1}{5}}, f_{i-\frac{2}{7}}, f_i)^T,$$

$$F_{i+1} = (f_{i+\frac{1}{5}}, f_{i+\frac{3}{5}}, f_{i+\frac{4}{5}}, f_{i+\frac{5}{7}}, f_{i+1})^T.$$

یک روش چندگامی خطی صفر پایدار است اگر چندجمله ای مشخصه اول  $\rho(z)$  متناظر با آن در شرط ریشه صدق کند. به عبارت دیگر هیچ ریشه ای از چندجمله ای مشخصه اول  $\rho(z)$  دارای اندازه بزرگ تر از یک نباشد و ریشه های با اندازه یک، ساده باشند [۱۵]. چندجمله ای مشخصه اول روش بلوکی هیبریدی به صورت زیر می باشد:

$$\rho(z) = \det(zA_2 - A_1) = z^4(z - 1) = 0. \quad (21)$$

بنابراین ریشه های  $\rho(z)$  عبارت اند از

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0, z_5 = 1 \quad (22)$$

و از اینرو، روش صفر پایدار می باشد.

با توجه به سازگاری و صفر پایداری روش، می توان نتیجه گرفت که روش همگرا است [۱۵].

### ۳.۳. پایداری خطی روش

برای بررسی پایداری خطی، روش بلوکی هیبریدی پیشنهاد شده در رابطه (۱۵) را برای مساله آزمون  $\varepsilon u' = \lambda u$  با  $\Re(\lambda) < 0$  مورد استفاده قرار می دهیم. با اعمال این روش روی این معادله، رابطه زیر حاصل می شود:

$$U_{i+1} = M(z)U_i, \quad z = \frac{\lambda h_{i+1}}{\varepsilon}, \quad (23)$$

که در آن ماتریس  $M(z)$  عبارتست از

$$M(z) = (A_2 - zB_2)^{-1}(A_1 + zB_1). \quad (24)$$

رفتار  $U_{i+1}$  به مقادیر ویژه ماتریس  $M(z)$  وابسته است. این

<sup>1</sup> Runge-Kutta method

<sup>2</sup> Butcher array

را با توجه به ضرایب روش بلوکی هیبریدی نمایش داد (جدول (۱) را مشاهده کنید). با توجه به درایه‌های آرایه و نظریه درختان ریشه دار [۱۵] می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهاد شده، دارای حداقل مرتبه  $p = 6$  است، زیرا شرایط مرتبه برای درختان تا مرتبه ۶ برقرار است.

جدول (۱): آرایه بوجر متناظر با روش بلوکی هیبریدی پیشنهاد شده.

0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{5}$	$\frac{15941}{225000}$	$\frac{7099}{43200}$	$\frac{-137}{576}$	$\frac{2235331}{5400000}$	$\frac{-409}{1800}$	$\frac{1913}{120000}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1437}{25000}$	$\frac{1523}{4800}$	$\frac{171}{320}$	$\frac{-319333}{600000}$	$\frac{47}{200}$	$\frac{-477}{40000}$
$\frac{5}{7}$	$\frac{69655}{1210104}$	$\frac{9203125}{29042496}$	$\frac{5640625}{9680832}$	$\frac{-5455}{12096}$	$\frac{265625}{1210104}$	$\frac{-36625}{3226944}$
$\frac{4}{5}$	$\frac{1618}{28125}$	$\frac{214}{675}$	$\frac{26}{45}$	$\frac{-33614}{84375}$	$\frac{58}{225}$	$\frac{-22}{1875}$
1	$\frac{7}{120}$	$\frac{1625}{5184}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-16807}{25920}$	$\frac{125}{216}$	$\frac{3}{64}$
1	$\frac{7}{120}$	$\frac{1625}{5184}$	$\frac{125}{192}$	$\frac{-16807}{25920}$	$\frac{125}{216}$	$\frac{3}{64}$

#### ۴. طریقه انتخاب نقاط شبکه

$$h_1 = \frac{T(1-\sigma)}{1-\sigma^N} \quad (۳۰)$$

همان‌طور که اشاره شد به دلیل تغییرات شدید جواب، انتخاب نقاط متساوی الفاصله به منظور گسسته سازی بازه مناسب نیست. لذا به دنبال راهکاری برای انتخاب نقاط گره‌ای هستیم. راموس<sup>۱</sup> در مرجع [۴] الگوریتمی را برای انتخاب نقاط بیان کرد که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم. فرض کنید  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  یک شبکه دلخواه روی بازه  $[0, T]$  باشد که

همان‌طور که اشاره شد به دلیل تغییرات شدید جواب، انتخاب نقاط متساوی الفاصله به منظور گسسته سازی بازه مناسب نیست. لذا به دنبال راهکاری برای انتخاب نقاط گره‌ای هستیم. راموس<sup>۱</sup> در مرجع [۴] الگوریتمی را برای انتخاب نقاط بیان کرد که در ادامه به آن اشاره می‌کنیم.

فرض کنید  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  یک شبکه دلخواه روی بازه  $[0, T]$  باشد که

$$\begin{aligned} h_{k+1} &= t_{k+1} - t_k, \quad 0 \leq k \leq N-1, \\ \sigma_j &= \frac{h_{j+1}}{h_j}, \quad 1 \leq j \leq N-1. \end{aligned} \quad (۲۷)$$

برای طول بازه  $T$  داریم:

$$\begin{aligned} T &= h_N + h_{N-1} + \dots + h_1 \\ &= (\sigma_{N-1}\sigma_{N-2}\dots\sigma_2\sigma_1 + \dots + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_1 + 1)h_1, \end{aligned} \quad (۲۸)$$

در این صورت

$$h_1 = \frac{T}{\sigma_{N-1}\sigma_{N-2}\dots\sigma_2\sigma_1 + \dots + \sigma_2\sigma_1 + \sigma_1 + 1} \quad (۲۹)$$

ساده‌ترین راه تولید شبکه غیریکنواخت زمانی است که تمام  $\sigma_i$  را برابر عدد ثابت  $\sigma$  در نظر بگیریم، در این صورت

پیشنهاد می‌کنیم:

گام اول: با استفاده از یک  $\sigma$  مناسب و طرح فوق شبکه غیریکنواخت  $\{t_i\}_{i=0}^N$  را ایجاد می‌کنیم و قرار می‌دهیم

$$h_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N \quad (۳۱)$$

سپس با کمک روش بلوکی بیان شده، جواب را در نقاط شبکه تقریب می‌زنیم.

گام دوم: قرار می‌دهیم

$$M_i = \sqrt{1 + \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}\right)^2}, \quad i = 1, \dots, N \quad (۳۲)$$

<sup>1</sup> Ramos

گام سوم: فرض کنید

$$\phi_0 = 0, \phi_i = \sum_{j=1}^i h_j M_j, \quad i = 1, \dots, N \quad (33)$$

$$Y_k = \frac{k \phi_N}{N}, \quad k = 0, \dots, N$$

گام چهارم: حال بر اساس درون‌یابی خطی مبتنی بر  $(\phi_i, t_i)$  مقادیر  $(Y_i, t_i^{new})$  را درون‌یابی کنید تا شبکه جدید  $\{t_i^{new}\}$  حاصل شود.

گام پنجم: با کمک روش بلوکی هیبریدی بیان شده جواب معادله را در نقاط بهینه شده  $\{t_i^{new}\}_{i=0}^N$  تقریب بزنید.

## ۵. نتایج عددی

در این قسمت قصد داریم با استفاده از طرح بلوکی هیبریدی<sup>۱</sup> (HBM) ارائه شده در بخش ۲ و بهینه‌سازی نقاط، چندین مثال عددی را بررسی کنیم. نتایج حاصل شده با نتایج الگوریتم غیراستاندارد (NSA)<sup>۲</sup> ارائه شده در مرجع [۴] و همچنین نتایج عددی حاصل از ode15s نرم‌افزار Matlab مقایسه می‌شود. یادآور می‌شود که ابتدا جواب عددی  $u_i$ ها را با بکارگیری روش بلوکی روی شبکه غیریکنواخت اولیه محاسبه نموده و سپس به کمک روش شبکه تطبیقی به بهبود نقاط شبکه می‌پردازیم و مجدد با بکارگیری روش بلوکی، جواب بهینه  $u_i$ ها را روی شبکه جدید می‌یابیم. کلیه نتایج مؤکد آن هستند که الگوریتم پیشنهادی این فصل، حاصل از تلفیق روش بلوکی هیبریدی و روش حرکت شبکه، بهتر از روش الگوریتم غیراستاندارد و ode15s عمل می‌کند. تمام نتایج عددی حاصل شده برای الگوریتم پیشنهادی از طریق نرم‌افزار Maple به دست آمده است.

مثال ۵،۱: مساله مقدار اولیه غیرخطی به فرم زیر مفروض است.

$$\begin{cases} \epsilon u'(t) = \exp(u(t)), & t \in [0,1] \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

جواب دقیق این معادله عبارتست از

$$u(t) = \ln\left(1 + \frac{t}{\epsilon}\right). \quad (34)$$

برای تولید شبکه غیریکنواخت اولیه فرض می‌کنیم  $\sigma = 2$  باشد. نتایج حاصل شده به ازای پارامترهای مختلف با نتایج مرجع [۴] مقایسه شده است. همان‌طور که در جدول (۲) مشاهده می‌شود، بیشینه خطای الگوریتم پیشنهادی بر اساس روش بلوکی هیبریدی از بیشینه خطای روش الگوریتم غیراستاندارد کمتر می‌باشد. در شکل (۳) نمودار جواب عددی و دقیق به همراه نقاط قبل و بعد از بهینه‌سازی شبکه ارائه شده است. کلیه نمودارها به ازای  $N = 16$  و  $\epsilon = 10^{-2}$  حاصل شده‌اند.

مثال ۵،۲: مساله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \epsilon u'(t) = \sin(u(t)), & t \in [0,1] \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (36)$$

با جواب دقیق زیر را در نظر بگیرید.

$$u(t) = 2 \operatorname{arccot}\left(\exp\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) \cot\left(\frac{u_0}{2}\right)\right). \quad (37)$$

با فرض  $u_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ، تغییرات شدیدی در نقاط نزدیک  $t = 0$  به وجود می‌آید. برای این مساله در نتایج عددی  $u_0 = 2$  در نظر گرفته شده است. همان‌طور که از جدول (۳) مشخص است بیشینه خطای الگوریتم پیشنهادی از بیشینه خطای روش الگوریتم غیراستاندارد کمتر است. در شکل (۴) نمودار جواب دقیق و جواب عددی به همراه شبکه تطبیقی ترسیم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، بدلیل رفتار جواب، نقاط در نزدیکی  $t = 0$  متمرکز شده است. کلیه نمودارها به ازای  $N = 32$  و  $\epsilon = 10^{-2}$  رسم شده‌اند.

مثال ۵،۳: مساله مقدار اولیه غیرخطی زیر - که مدل‌سازی رفتار جنبشی جذب زیستی می‌باشد- در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} \epsilon u' = u - u^3, & t \in (0,1] \\ u(0) = 0.1. \end{cases} \quad (38)$$

جواب دقیق مساله عبارتست از

$$u(t) = \frac{\exp\left(\frac{t}{\epsilon}\right)}{\sqrt{99 + \exp\left(\frac{2t}{\epsilon}\right)}} \quad (39)$$

این مساله با استفاده از الگوریتم مطرح شده با  $\sigma = 2$  حل شده و با نتایج حاصل از الگوریتم غیراستاندارد مقایسه شده است. نتایج ثبت شده در جدول (۴) بیانگر این است که بیشینه خطای روش پیشنهادی از بیشینه خطای روش الگوریتم غیراستاندارد

<sup>1</sup> Hybrid block method

<sup>2</sup> Nonstandard algorithm



پیشنهادی دارد. در شکل (۶) نمودارهای جواب دقیق و عددی به همراه نقاط بهینه شبکه ارائه شده است. کلیه نمودارها به ازای  $N = 32$  و  $\varepsilon = 10^{-2}$  به دست آمده‌اند.

علاوه بر مقایسه‌ای که در مثال‌های قبل انجام دادیم، قصد داریم نتایج حاصل از الگوریتم را با نتایج حاصل از بسته ode15s نرم‌افزار Matlab مقایسه کنیم. بسته ode15s به‌طور خودکار از نقاط غیریکنواخت برای تقریب جواب معادله استفاده می‌کند. در جدول (۶) بیشینه خطا و تعداد زیربازه‌های ode15s برای مثال ۵،۱ و ۵،۲ ذکر شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج حاصل از الگوریتم بیان شده برتر از نتایج ode15s است. برای مثال‌های ۵،۳ و ۵،۴ خطای حاصل از ode15s به ازای  $\varepsilon \leq 10^{-3}$ ، بیشتر از یک حاصل می‌شود.

بسیار کمتر می‌باشد. در شکل (۵) نمودار جواب عددی و دقیق به همراه نقاط شبکه تطبیقی ترسیم شده است. نمودار جواب، وجود یک لایه مرزی در ابتدای بازه را نشان می‌دهد. کلیه نمودارها به ازای  $N = 32$  و  $\varepsilon = 10^{-2}$  حاصل شده‌اند.

مثال ۵،۴: مساله مقدار اولیه

$$\begin{cases} \varepsilon u'(t) = \sqrt{1 - \varepsilon^2 u^2}, & t \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (40)$$

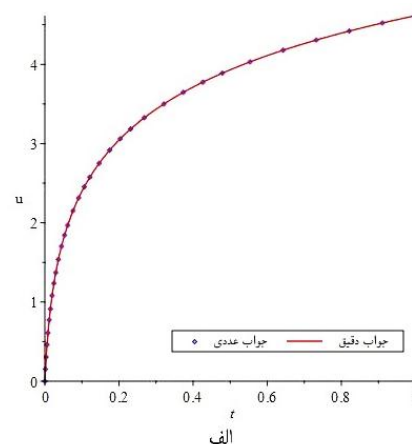
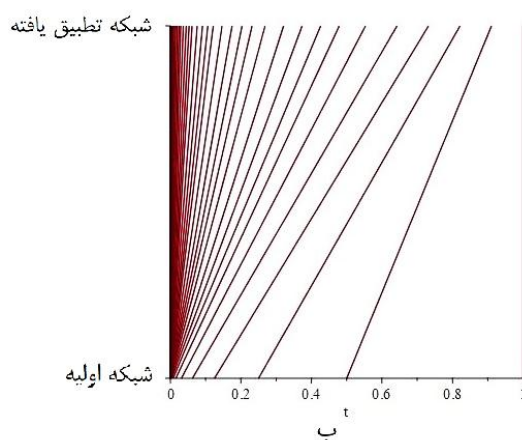
دارای جواب دقیق زیر می‌باشد.

$$u(t) = \frac{\sin t}{\varepsilon}. \quad (41)$$

این مساله با استفاده از الگوریتم مطرح شده در این فصل با  $\sigma = 2$  حل شده است. در جدول (۵) مقادیر بیشینه خطا گزارش شده است که نشان از عملکرد بسیار خوب روش

جدول (۲): بیشینه خطای روش‌های الگوریتم غیراستاندارد و بلوکی هیبریدی تلفیق شده با شبکه تطبیقی مربوط به مثال ۵،۱

$\varepsilon$		$N$				
		16	32	64	128	256
$10^{-2}$	NSA	$1.2490 e - 3$	$1.6421 e - 4$	$2.9018 e - 5$	$5.1319 e - 6$	$8.8588 e - 7$
	HBM	$1.8210 e - 9$	$1.9920 e - 11$	$1.6604 e - 13$	$1.4942 e - 15$	$1.2065 e - 17$
$10^{-3}$	NSA	$6.2655 e - 3$	$5.3755 e - 3$	$5.5634 e - 5$	$7.8651 e - 6$	$1.2311 e - 6$
	HBM	$3.2033 e - 8$	$2.8754 e - 10$	$2.8666 e - 12$	$2.6463 e - 14$	$2.2163 e - 16$
$10^{-4}$	NSA	$1.8304 e - 2$	$1.5213 e - 3$	$1.5098 e - 4$	$1.6462 e - 5$	$1.9913 e - 6$
	HBM	$2.3054 e - 7$	$2.3932 e - 9$	$2.4413 e - 11$	$2.0504 e - 13$	$1.6480 e - 15$
$10^{-5}$	NSA	$4.0947 e - 2$	$3.3147 e - 3$	$3.2265 e - 4$	$3.5010 e - 5$	$4.0153 e - 6$
	HBM	$9.9716 e - 7$	$1.1381 e - 8$	$1.0595 e - 10$	$8.7928 e - 13$	$7.2256 e - 15$
$10^{-6}$	NSA	$7.7800 e - 2$	$6.2211 e - 3$	$5.9198 e - 4$	$6.3639 e - 5$	$7.2872 e - 6$
	HBM	$2.8842 e - 4$	$3.4349 e - 8$	$3.8199 e - 10$	$3.1396 e - 12$	$2.6513 e - 14$

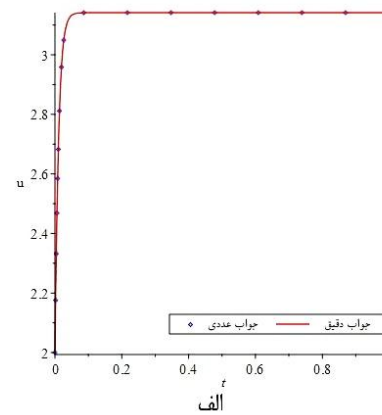
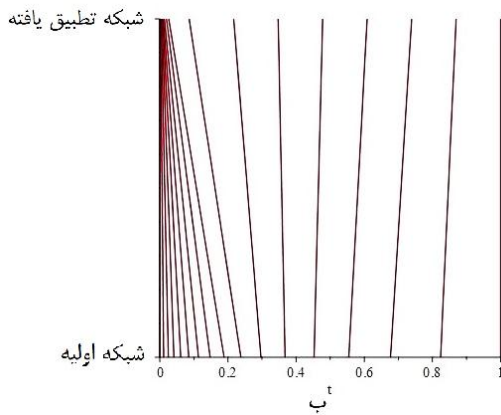


شکل (۳): نمودار جواب عددی و دقیق (الف) و نقاط شبکه تطبیقی یافته (ب) به ازای  $N = 16$  و  $\varepsilon = 10^{-2}$  برای مثال ۵،۱



جدول (۳): پیشینه خطای روش‌های الگوریتم غیراستاندارد و بلوکی هیبریدی تلفیقی با شبکه تطبیقی مربوط به مثال ۵.۲.

$\epsilon$	N					
		16	32	64	128	256
$10^{-2}$	NSA	$5.0604 e - 3$	$6.0776 e - 4$	$7.4404 e - 5$	$9.4527 e - 6$	$1.2208 e - 6$
	HBM	$2.1241 e - 4$	$2.3168 e - 6$	$1.1285 e - 7$	$2.2231 e - 9$	$4.7878 e - 11$
$10^{-3}$	NSA	$1.6167 e - 2$	$1.8496 e - 3$	$2.2471 e - 4$	$2.8202 e - 5$	$3.6339 e - 6$
	HBM	$6.3778 e - 3$	$2.2753 e - 5$	$1.5156 e - 5$	$4.2929 e - 7$	$4.0978 e - 8$
$10^{-4}$	NSA	$1.6090 e - 2$	$3.6832 e - 3$	$4.7714 e - 4$	$6.0029 e - 5$	$7.6669 e - 6$
	HBM	$1.4037 e - 2$	$4.4040 e - 4$	$3.4560 e - 6$	$1.1644 e - 6$	$3.4744 e - 8$
$10^{-5}$	NSA	$5.7491 e - 2$	$7.2491 e - 3$	$8.8257 e - 4$	$1.0770 e - 4$	$1.3749 e - 5$
	HBM	$1.1420 e - 4$	$9.6440 e - 6$	$1.1682 e - 6$	$1.1412 e - 6$	$1.0480 e - 6$
$10^{-6}$	NSA	$6.6146 e - 2$	$1.2005 e - 2$	$1.4597 e - 3$	$1.7660 e - 4$	$2.2172 e - 5$
	HBM	$1.1235 e - 2$	$7.8169 e - 4$	$6.5475 e - 4$	$7.2732 e - 5$	$1.6250 e - 6$



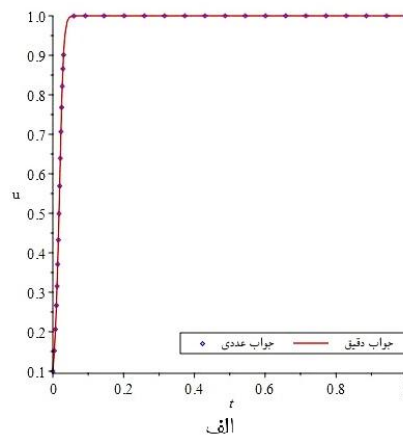
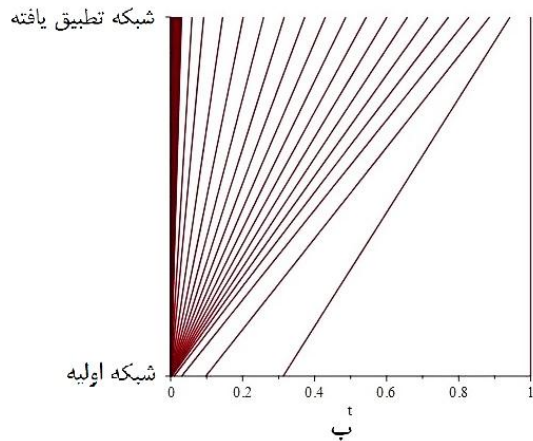
شکل (۴): نمودار جواب عددی و دقیق (الف) و نقاط شبکه تطبیق یافته (ب) به ازای  $N = 16$  و  $\epsilon = 10^{-2}$  برای مثال ۵.۲.

جدول (۴): پیشینه خطای روش‌های الگوریتم غیراستاندارد و بلوکی هیبریدی تلفیقی با شبکه تطبیقی مربوط به مثال ۵.۳.

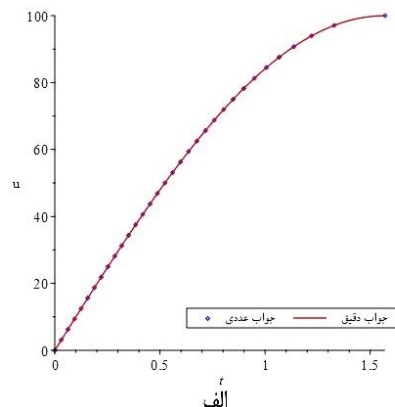
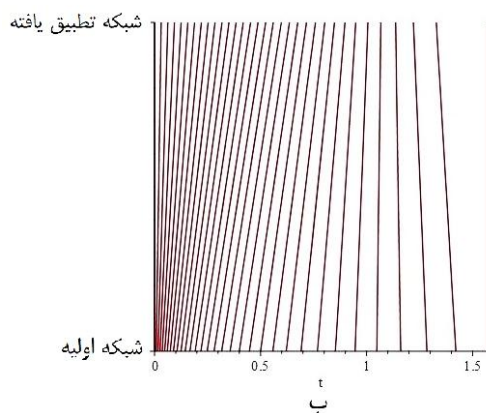
$\epsilon$	N					
		16	32	64	128	256
$10^{-2}$	NSA	$6.8430 e - 3$	$8.9378 e - 4$	$1.1244 e - 4$	$1.4552 e - 5$	$1.9191 e - 6$
	HBM	$5.1401 e - 4$	$6.5613 e - 6$	$8.7776 e - 8$	$8.8833 e - 9$	$2.9893 e - 10$
$10^{-3}$	NSA	$2.1844 e - 2$	$2.6760 e - 3$	$3.1198 e - 4$	$4.0469 e - 5$	$5.2240 e - 6$
	HBM	$3.0795 e - 4$	$9.8259 e - 6$	$3.5929 e - 7$	$1.8726 e - 8$	$1.4750 e - 9$
$10^{-4}$	NSA	$2.0041 e - 2$	$5.7444 e - 3$	$6.6968 e - 4$	$8.2918 e - 5$	$1.0669 e - 5$
	HBM	$1.7009 e - 4$	$2.1769 e - 5$	$2.7581 e - 7$	$1.8925 e - 7$	$8.6202 e - 8$
$10^{-5}$	NSA	$9.6759 e - 2$	$1.1142 e - 2$	$1.0938 e - 3$	$1.4799 e - 4$	$1.8795 e - 5$
	HBM	$1.1593 e - 4$	$7.4108 e - 7$	$3.9480 e - 7$	$3.8085 e - 7$	$1.9202 e - 7$
$10^{-6}$	NSA	$1.1199 e - 1$	$1.3880 e - 2$	$1.8867 e - 3$	$2.4068 e - 4$	$2.9800 e - 5$
	HBM	$9.7066 e - 5$	$2.7474 e - 6$	$5.4475 e - 7$	$5.4282 e - 7$	$2.9726 e - 7$

جدول (۵): پیشینه خطای روش بلوکی هیبریدی تلفیق شده با شبکه تطبیقی مربوط به مثال ۵.۴.

$\epsilon$	N					
	16	32	64	128	256	512
$10^{-2}$	$8.5875 e - 13$	$6.1328 e - 14$	$3.6633 e - 15$	$4.6212 e - 16$	$1.0766 e - 16$	$2.1346 e - 18$
$10^{-3}$	$8.5685 e - 12$	$6.0811 e - 13$	$3.6819 e - 14$	$4.3859 e - 15$	$1.1371 e - 15$	$2.2999 e - 17$
$10^{-4}$	$8.5684 e - 11$	$6.0806 e - 12$	$3.6821 e - 13$	$4.3835 e - 14$	$1.1378 e - 14$	$2.3017 e - 16$
$10^{-5}$	$8.5683 e - 10$	$6.0806 e - 11$	$3.6821 e - 12$	$4.3835 e - 13$	$1.1378 e - 13$	$2.3017 e - 15$
$10^{-6}$	$8.5683 e - 9$	$6.0806 e - 10$	$3.6821 e - 11$	$4.3835 e - 12$	$1.1378 e - 12$	$2.3017 e - 14$



شکل (۵): نمودار جواب عددی و دقیق (الف) و نقاط شبکه تطبیق یافته (ب) به ازای  $N = 32$  و  $\varepsilon = 10^{-2}$  برای مثال ۵.۳.



شکل (۶): نمودار جواب عددی و دقیق (الف) و نقاط شبکه تطبیق یافته (ب) به ازای  $N = 32$  و  $\varepsilon = 10^{-2}$  برای مثال ۵.۴.

حاصل از روش و مقایسه آن با روش الگوریتم غیراستاندارد و ode15s، حاکی از عملکرد بهتر این روش است. پیشنهاد می‌شود از این روش تلفیقی برای حل معادله دیفرانسیل آشفته تکین غیرخطی با شرط مرزی بیان شده در مراجع [۵] و [۶] استفاده شود.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافی ندارند.

جدول (۶): مقایسه بیشینه خطای الگوریتم پیشنهاد شده و ODE15S

مثال	$\varepsilon$	HBM	N	ode15s	N
۵.۱	$10^{-2}$	$1.8210 e - 9$	16	$9.7852 e - 3$	51
	$10^{-3}$	$3.2033 e - 8$	16	$1.1845 e - 2$	68
	$10^{-4}$	$2.3054 e - 7$	16	$1.7930 e - 2$	83
	$10^{-5}$	$9.9716 e - 7$	16	$2.4079 e - 2$	99
	$10^{-6}$	$2.8842 e - 4$	16	$2.4083 e - 2$	113
	۵.۲	$10^{-2}$	$2.3168 e - 6$	32	$3.6716 e - 3$
$10^{-3}$		$2.2753 e - 5$	32	$3.6716 e - 3$	41
$10^{-4}$		$4.4040 e - 4$	32	$3.6716 e - 3$	44
$10^{-5}$		$9.6440 e - 6$	32	$3.6716 e - 3$	47
$10^{-6}$		$7.8169 e - 4$	32	$3.6716 e - 3$	50

## ۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی کردیم کارکرد یک روش بلوکی هیبریدی تک‌گامی تلفیق شده با شبکه تطبیقی را به نمایش بگذاریم. نتایج

- [1] H. Veisi, H.R. Ghaedsharaf, and M. Ebrahimi, "Improving the Performance of Machine Learning Algorithms for Heart Disease Diagnosis by Optimizing Data and Features," *Soft Comput. J.*, vol. 8, no. 1, pp. 70-85, 2019, doi: 10.22052/8.1.70 [In Persian].
- [2] H.R. Tabrizidooz and F. Hajiramezanali, "A numerical algorithm for determining time-dependent coefficient in a parabolic inverse problem using Legendre multiwavelet base," *Soft Comput. J.*, vol. 10, no. 2, pp. 110-123, 2022, doi: 10.22052/scj.2022.243311.1028 [In Persian].
- [3] E.P. Doolan, J.J.H. Miller, and W.H.A. Schilders, *Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers*, Boole Press, 1980.
- [4] H. Ramos, J. Vigo-Aguiar, S. Natesan, R. Garcia-Rubio, and M.A. Queiruga, "Numerical solution of nonlinear singularly perturbed problems on nonuniform meshes by using a non-standard algorithm," *J. Math. Chem.*, vol. 48, no. 1, pp. 38-54, 2010, doi: 10.1007/s10910-009-9625-2.
- [5] L.B. Liu, G. Long, and Z. Cen, "A robust adaptive grid method for a nonlinear singularly perturbed differential equation with integral boundary condition," *Numer. Algorithms*, vol. 83, no. 2, pp. 719-739, 2020, doi: 10.1007/s11075-019-00700-2.
- [6] L.B. Liu and X. Yang, "Convergence analysis of Richardson extrapolation for a quasilinear singularly perturbed problem with an integral boundary condition on an adaptive grid," *Appl. Math. Lett.*, vol. 115, p. 106976, 2021, doi: 10.1016/j.aml.2020.106976.
- [7] M. Bisheh-Niasar and M. Arab Ameri, "Moving mesh non-standard finite difference method for non-linear heat transfer in a thin finite rod," *J. Appl. Comput. Mechanics*, vol. 4, no. 3, pp. 161-166, 2018, doi: 10.22055/JACM.2017.22854.1141.
- [8] M. Bagherpoorfard and A.R. Soheili, "A numerical method based on the moving mesh for the solving of a mathematical model of the avascular tumor growth," *Comput. Methods Differ. Equ.*, vol. 9, no. 2, pp. 327-346, 2021, doi: 10.22034/cmde.2020.31455.1472.
- [9] W.E. Milne, *Numerical solution of differential equations*, New York, NY: John Wiley, 1953.
- [10] H. Ramos and G.A. Singh, "A tenth order A-stable two-step hybrid block method for solving initial value problems of ODEs," *Appl. Math. Comput.*, vol. 310, pp. 75-88, 2017, doi: 10.1016/j.amc.2017.04.020.
- [11] H. Ramos, "Development of a new Runge-Kutta method and its economical implementation," *Computat. Math. Methods*, vol. 1, no. 2, 2019, doi: 10.1002/cmm4.1016.
- [12] S.N. Jator and V. Manathunga, "Block Nystrom type integrator for Bratu's equation," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 327, pp. 341-349, 2018, doi: 10.1016/j.cam.2017.06.025.
- [13] M.I. Syam and M. Al-Refai, "A reliable method for first order delay equations based on the implicit hybrid method," *Alexandria Eng. J.*, vol. 59, no. 4, pp. 2677-2681, 2020, doi: 10.1016/j.aej.2020.04.043.
- [14] T.A. Anake, "Continuous Implicit Hybrid One-step Methods for the Solution of Initial Value Problems of General Second-order Ordinary Differential Equations," PhD thesis, Ota, Nigeria: Covenant University, 2011.
- [15] J.D. Lambert, *Computational methods in ordinary differential equations*, London, UK, John Wiley and Sons, 1973.