مجله محاسبات نرم، جلد ۱۱، شماره ۱ (بهار و تابستان ۱۴۰۱)، صفحه ۱۰۶ـ۱۱۹

https://doi.org/10.22052/scj.2023.243375.1032

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir

دانشگاه کاشان
University of Kashan

پالایه‌های بیشین، اول و اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار ✧

سعید رسولی[۱]، دانشیار، فرهاد خاکسارحقانی[۲*]، دانشیار

[۱] گروه ریاضی، دانشکده مهندسی سیستم‌های هوشمند و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران.

[۲] گروه ریاضی، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۳۰ آذر ماه ۱۴۰۰

پذیرش ۲۲ آذر ماه ۱۴۰۱

کلمات کلیدی:

مشبکه‌های مانده‌دار

پالایه

پالایه بیشین

پالایه اول

پالایه اول کمین

پالایه بخش‌یاب

چکیده

در این مقاله، به بررسی و مطالعه پالایه‌های بیشین، اول، و اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار می‌پردازیم و مثال‌هایی از مشبکه‌های مانده‌دار ارائه می‌دهیم. ابتدا به معرفی پالایه‌های یک مشبکه مانده‌دار می‌پردازیم و سپس نشان می‌دهیم هر پالایه سره مشمول در یک پالایه بیشین و در نتیجه مشمول در یک پالایه اول است. پالایه‌های اول در یک MTL-جبر را بازشناسی کرده و گزاره بنیادین پالایه‌های اول را برای مشبکه‌های مانده‌دار بیان و اثبات می‌کنیم. مشبکه‌های مانده‌داری را بازشناسی می‌کنیم که هر پالایه در آنها اصلی است و هم‌پوچسازها را با استفاده از پالایه‌های اول مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس، پالایه‌های اول کمین در یک مشبکه مانده‌دار را معرفی کرده و گزاره بنیادین پالایه‌های اول کمین را بیان و اثبات می‌کنیم. در انتها، پالایه‌های بخش‌یاب در یک مشبکه مانده‌دار را معرفی کرده و پالایه‌های اول کمین را با استفاده از آنها مورد بازشناسی قرار می‌دهیم.

۱. مقدمه

می‌دانیم که پردازش اطلاعات دقیق، به ویژه استنتاج‌هایی که از این اطلاعات حاصل می‌شوند، مبتنی بر منطق کلاسیک است. بنابراین، به طور طبیعی لازم است که سامانه‌هایی منطقی به عنوان پایه‌ای برای پردازش اطلاعات نادقیق ایجاد شود. به همین دلیل، انواع مختلفی از ساختارهای منطقی غیرکلاسیک پیشنهاد و بررسی شده‌اند. امروزه، استفاده از منطق‌های غیرکلاسیک به ابزاری رسمی و مفید برای علوم کامپیوتر به منظور مقابله با اطلاعات نادقیق و مبهم تبدیل شده‌اند [۱]–[۳]. از سویی دیگر، جبرهای منطقی مختلفی به عنوان سامانه‌های معنایی منطق‌های غیرکلاسیک پیشنهاد شده‌اند، به عنوان مثال می‌توان به BCK–جبرها، مشبکه‌های مانده‌دار، مشبکه‌های مانده‌دار بخش‌پذیر، MTL– جبرها، BL– جبرها، MV– جبرها و جبرهای هیتینگ اشاره کرد. در میان این جبرهای منطقی، مشبکه‌های مانده‌دار ساختارهای جبری بسیار اساسی و مهمی هستند.

مفهوم مشبکه‌های مانده‌دار برای اولین بار در [۴] توسط کرول، که بر روی تجزیه یک حلقه به ایده‌آل‌های مجزا کار می‌کرد، معرفی شد. سپس این مفهوم به عنوان ابزاری مهم در بررسی مشبکه ایده‌آل‌های یک حلقه توسط وارد و دیلورث در مقالات [۵]–[۱۱] مورد استفاده قرار گرفت. این رده از مشبکه‌ها تحت

✧ نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: srasouli@pgu.ac.ir (رسولی)

haghani1351@yahoo.com (خاکسارحقانی)

نحوه ارجاع به مقاله: رسولی، سعید، خاکسارحقانی، فرهاد، «پالایه‌های بیشین، اول و اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار»، مجله محاسبات نرم، جلد ۱۱، شماره ۱، ص۱۰۶ـ۱۱۹، بهار و تابستان ۱۴۰۱.

عناوین مختلفی مانند BCK- مشبکه‌ها [۱۲]، BCK- جبرهای کامل [۴]، $\mathrm{FL_{ew}}$- جبرها[1] [۱۳] و ℓ- تکگون‌های جابه‌جایی مانده‌دار صحیح[2] [۱۴]، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. همچنین، مشبکه‌های مانده‌دار ساختار جبری متناظر با منطق‌های بدون قانون انقباض[3] هستند. این جبرهای منطقی[4] دارای ویژگی‌هایی جالب به عنوان یک ساختار جبری هستند [۲].
مشبکه‌های مانده‌دار نقش مهمی در نظریه منطق فازی دارند. بسیاری از جبرهای منطقی مانند MTL-جبرها، مشبکه‌های مانده‌دار بخش‌پذیر، BL-جبرها ، MV-جبرها، جبرهای هیتینگ و جبرهای بولی زیرواریته‌های مشبکه‌های مانده‌دار هستند.
یکی از ابزارهای اساسی در بررسی ساختار جبرهای منطقی نظریه سامانه‌های قیاسی است. سامانه‌های قیاسی در جبرهای منطقی نقشی بنیادین در مطالعه این ساختارهای جبری و برهان تمامیت منطق‌های متناظر با آنها ایفا می‌کنند. از دیدگاه منطق، هر سامانه قیاسی متناظر با یک مجموعه از جملات برهان‌پذیر است. از آنجا که سامانه‌های قیاسی متناظر با مجموعه‌هایی از جملات در منطق هستند که نسبت به قاعده قیاس استثنایی بسته‌اند، گاهی آنها را پالایه‌های (استلزامی) می‌نامیم. از اساسی‌ترین نوع پالایه‌ها در نظریه مشبکه‌های مانده‌دار می‌توان به پالایه‌های بیشین، اول و اول کمین اشاره کرد.
از دیدگاه جبری پالایه‌ها در مشبکه‌های مانده‌دار با رابطه‌های هم‌نهشتی در تناظر یک‌به‌یک قرار دارند که این رده مشبکه‌های مانده‌دار را در رده واریته‌های ایده‌آل معین[5] قرار می‌دهد. بنابراین، پالایه‌ها در مشبکه‌های مانده‌دار همان نقشی را ایفا می‌کنند که زیرگروه‌های نرمال در گروه‌ها، ایده‌آل‌ها در حلقه‌ها و زیرمدول‌ها در مدول‌ها ایفا می‌کنند. از آنجا که رده مشبکه‌ها مانند رده حلقه‌ها یک واریته هم‌نهشتی-پخش‌پذیر[6] است، بنابراین پالایه‌های اول در آنها نقش مهمی را ایفا می‌کنند [۱۵]-[۲۰].

با توجه به نقش اساسی ایده‌آل‌های بیشین، اول و اول کمین در مطالعه نظریه حلقه‌ها از جمله حلقه‌های mp، Rickart و Baer می‌خواهیم ببینیم که آیا مشابه این قضیه‌ها در رده مشبکه‌های مانده‌دار نیز برقرار هستند؟ بنابراین یکی از اهداف مهم این مقاله بررسی نقش پالایه‌های بیشین، اول و اول کمین در مطالعه نظریه مشبکه‌های مانده‌دار است.
در این مقاله، پالایه‌های بیشین، اول و اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. این مقاله دارای پنج بخش به شکل زیر است: در بخش۲، تعاریف و ویژگی‌های مشبکه‌های مانده‌دار را بیان می‌کنیم و مثال‌هایی برای آنها ارائه می‌دهیم. نشان می‌دهیم مشبکه پالایه‌های اصلی در یک مشبکه مانده‌دار یک زیرمشبکه پالایه‌های آن است و گزاره‌های مهمی در رابطه با پالایه‌های اصلی بیان و اثبات می‌کنیم. در بخش ۳، پالایه‌های بیشین و اول را مورد بررسی قرار می‌دهیم و گزاره‌ای بنیادین برای پالایه‌های اول را بیان می‌کنیم. نشان می‌دهیم که هر پالایه برابر با اشتراک تمام پالایه‌های اول شامل آن است و با استفاده از آن مشبکه‌های مانده‌داری را بازشناسی می‌کنیم که در آنها هر پالایه، اصلی است. سپس، هم‌پوچسازها را معرفی کرده و آنها را با استفاده از پالایه‌های اول مورد بازشناسی قرار می‌دهیم. در بخش ۴، پالایه‌های اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار را مورد بررسی قرار داده و گزاره‌ی بنیادین پالایه‌های اول کمین را بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین، هم‌پوچسازها را با استفاده از پالایه‌های اول کمین مورد بازشناسی قرار می‌دهیم. در بخش ۵، مفهوم پالایه‌های بخش‌یاب را معرفی کرده و با استفاده از آنها یکی از بارزترین ویژگی‌های پالایه‌های اول کمین را بررسی کرده و یک بازشناسی اساسی برای پالایه‌های اول کمین ارائه می‌دهیم. در پایان، پالایه‌های بخش‌یاب را با استفاده از پالایه‌های اول کمین مورد بازشناسی قرار می‌دهیم.

۲. مشبکه‌های مانده‌دار

در این بخش، برخی از تعاریف و ویژگی‌های مشبکه‌های مانده‌دار را که در بخش‌های قبل مورد استفاده قرار می‌گیرند، یادآوری می‌کنیم.

1 FL_{ew} algebras
2 Integral, residuated, commutative ℓ-monoid
3 Contraction rule
4 Logical algebras
5 Ideal determined varieties
6 Congruence-distributive varieties

تعریف ۲٫۱ [۲۱]:ساختار جبری $\mathfrak{A} = (A;\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ از نوع $(2,2,2,2,0,0)$ را یک مشبکه مانده‌دار می‌نامیم، هرگاه بندهای زیر را برآورده سازد:

۱. $\ell(\mathfrak{A}) = (A;\wedge,\vee,0,1)$ یک مشبکه کران‌دار باشد؛

۲. $(A;\odot,1)$ یک تکگون جابه‌جایی باشد؛

۳. $(\odot,\rightarrow)$ تشکیل یک جفت الحاقی دهند؛ یعنی برای هر $x,y,z \in A$ داشته باشیم، $x \odot y \le z$ اگر و تنها اگر $x \le y \rightarrow z$.

عمل «$\rightarrow$» را مانده عمل «$\odot$» می‌نامیم. برای هر $x \in A$، $x \rightarrow 0$ را با $\neg x$ نشان داده و آن را نقیض[1] x می‌نامیم. همچنین، $x \odot \cdots \odot x$ (n مرتبه) را با x^n نشان می‌دهیم. در ادامه، رده[2] مشبکه‌های مانده‌دار را با RL نشان می‌دهیم. بنابر مرجع [۲۲]، RL یک رده معادله‌ای[3] و در نتیجه یک واریته[4] است. مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ را یک MTL-جبر می‌نامیم هرگاه ویژگی پیش‌خطی[5] را (که با prel نامیده می‌شود) برآورده سازد [۲۳]:

(prel برای هر $x,y \in A$ داشته باشیم

$(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$.

مشبکه‌های مانده‌دار در مراجع [۱۵]، [۱۶]، [۲۴]–[۲۷] مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند. در این مقاله، فرض می‌کنیم خواننده با مقدماتی از مشبکه‌های مانده‌دار آشنا است و به عنوان مرجع از [۲۸] استفاده می‌کنیم.

گزاره ۲٫۲ [۲۸]: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار باشد. همانی‌های زیر برای هر $x,y,z \in A$ برقرارند:

۱. $1 \rightarrow x = x$ و $x \rightarrow x = x \rightarrow 1 = 1$؛

۲. $(x \rightarrow y) \odot (y \rightarrow z) \le x \rightarrow z$؛

۳. $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$؛

۴. $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$؛

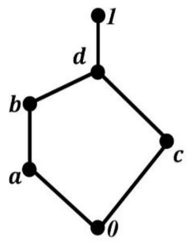
۵. $(x \odot y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$؛

۶. $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$؛

۷. $x \vee (y \odot z) \ge (x \vee y) \odot (x \vee z)$؛

۸. $x \vee y \le \big((x \rightarrow y) \rightarrow y\big) \wedge \big((y \rightarrow x) \rightarrow x\big)$.

مثال ۲٫۳ [۲۶]: فرض کنید $A_6 = \{0,a,b,c,d,1\}$ یک مشبکه است که نمودار هسه[6] آن در شکل (۱) داده شده است. عمل‌های «$\odot$» و «$\rightarrow$» در جداول (۱) و (۲) تعریف می‌شوند.



شکل (۱): نمودار هسه مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$.

جدول (۱): جدول عمل «$\odot$» مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$

$\odot$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	0	a	a
b	0	a	a	0	a	b
c	0	0	0	c	c	c
d	0	a	a	c	d	d
1	0	a	b	c	d	1

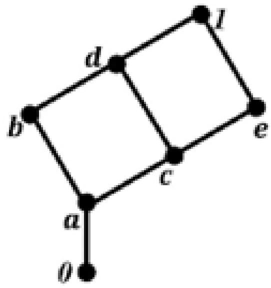
جدول (۲): جدول عمل «$\rightarrow$» مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$

$\rightarrow$	0	a	b	c	d	1
0	1	1	1	1	1	1
a	c	1	1	c	1	1
b	c	d	1	c	1	1
c	b	b	b	1	1	1
d	0	b	b	c	1	1
1	0	a	b	c	d	1

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $\mathfrak{A}_6 = (A_6;\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$ یک مشبکه مانده‌دار است، اگرچه $\mathfrak{A}_6$ یک MTL-جبر نیست؛ زیرا $(b \rightarrow c) \vee (c \rightarrow b) = c \vee b = d \ne 1$.

مثال ۲٫۴ [۲۶]: فرض کنید $A_7 = \{0,a,b,c,d,e,1\}$ یک مشبکه است که نمودار هسه آن در شکل (۲) داده شده است. عمل‌های «$\odot$» و «$\rightarrow$» در جداول (۳) و (۴) تعریف می‌شوند.

---
[1] Negation
[2] Class
[3] Equation class
[4] Variety
[5] Pre-linearity
[6] Hasse diagram



شکل (۲): نمودار هسه مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_7$.

جدول (۳): جدول عمل «$\odot$» مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_7$

$\odot$	0	a	b	c	d	e	1
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b	a	b
c	0	a	a	a	a	c	c
d	0	a	b	a	b	c	d
e	0	a	a	c	c	e	e
1	0	a	b	c	d	e	1

جدول (۴): جدول عمل «$\to$» مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_7$

$\to$	0	a	b	c	d	e	1
0	1	1	1	1	1	1	1
a	0	1	1	1	1	1	1
b	0	e	1	e	1	e	1
c	0	d	d	1	1	1	1
d	0	c	d	e	1	e	1
e	0	b	b	d	d	1	1
1	0	a	b	c	d	e	1

یک بررسی ساده نشان می‌دهد که $\mathfrak{A}_7 = (A_7;\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ یک MTL–جبر است.

تعریف ۲٫۵ [۲۱]: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار باشد. زیرمجموعه ناتهی F از A را یک پالایه[1] در $\mathfrak{A}$ می‌نامیم هرگاه برای هر $x,y\in F$ داشته باشیم $x\odot y\in F$ و برای هر $x\in F$ و $y\in A$ داشته باشیم $x\vee y\in F$.

مجموعه تمام پالایه‌های $\mathfrak{A}$ را با $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. آشکار است که $\{1\}, A\in\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ هستند. پالایه F را سره[2] می‌نامیم هرگاه $F\neq A$ باشد. به سادگی می‌توان دید که F یک پالایه سره است اگر و تنها اگر $0\notin F$ برقرار باشد. آشکار است که

[1] Filter
[2] Proper

$(A;\mathcal{F}(\mathfrak{A}))$ یک سامانه بسته جبری[3] است؛ یعنی $A\in\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ و اشتراک هر خانواده از اعضای $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ در $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ است. عملگر بستار متناظر با این سامانه را با $\mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ (و هرجا نیاز به تاکید نباشد با $\mathcal{F}$) نشان می‌دهیم. برای هر زیرمجموعه X از A، $\mathcal{F}(X)$ را پالایه تولید شده توسط X در $\mathfrak{A}$[4] می‌نامیم. برای هر $x\in A$، $\mathcal{F}(\{x\})$ را با $\mathcal{F}(x)$ نشان می‌دهیم و آن را پالایه اصلی[5] تولید شده توسط x می‌نامیم. مجموعه تمام پالایه‌های اصلی $\mathfrak{A}$ را با $\mathcal{PF}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\mathfrak{F}$ گردایه‌ای از پالایه‌های $\mathfrak{A}$ است. قرار می‌دهیم $\sqcup\mathfrak{F} = \mathcal{F}(\cup\mathfrak{F})$. بنابر [۱۴]، ساختار $(\mathcal{F}(\mathfrak{A});\cap,\sqcup,\{1\},A)$ یک قاب[6] و در نتیجه یک جبرهیتینگ کامل[7] است؛ یعنی $(\mathcal{F}(\mathfrak{A});\cap,\sqcup,\{1\},A)$ یک مشبکه کامل است و برای هر $F,G\in\mathcal{F}(\mathfrak{A})$، $H\in\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ چنان وجود دارد که $F\cap H\subseteq G$ و هرگاه $K\in\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ چنان وجود داشته باشد که $F\cap K\subseteq G$ آنگاه $K\subseteq H$.

مثال ۲٫۶: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$ از مثال ۲٫۳ را در نظر بگیرید. در این صورت، داریم:

$$\mathcal{F}(\mathfrak{A}_6) = \{F_1 = \{1\}, F_2 = \{d,1\}, F_3 = \{a,b,d,1\}, F_4 = \{c,d,1\}, F_5 = A_6\}$$

مثال ۲٫۷: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_7$ از مثال ۲٫۴ را در نظر بگیرید. در این صورت، داریم:

$$\mathcal{F}(\mathfrak{A}_7) = \{F_1 = \{1\}, F_2 = \{b,d,1\}, F_3 = \{e,1\}, F_4 = \{a,b,c,d,e,1\}, F_5 = A_7\}$$

گزاره ۲٫۸ [۲۸]: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه در $\mathfrak{A}$ و X زیرمجموعه‌ای از A باشد. بندهای زیر برقرارند:

۱. $\mathcal{F}(F,X) := F\sqcup\mathcal{F}(X) = \{a\in A | f\odot x_1\odot\cdots\odot x_n\leq a, f\in F, x_1,\cdots,x_n\in X, n\geq 1\}$؛

۲. $\mathcal{F}(F,x)\cap\mathcal{F}(F,y) = \mathcal{F}(F,x\vee y)$؛

۳. هرگاه $x\leq y$، آنگاه $\mathcal{F}(y)\subseteq\mathcal{F}(x)$؛

۴. هرگاه $x\leq y$، آنگاه $\mathcal{F}(y)\subseteq\mathcal{F}(x)$؛

۵. $\mathcal{F}(x)\sqcup\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x,y)$؛

[3] Algebraic closed set system
[4] The filter generated by X
[5] Principal filter
[6] Frame
[7] Complete Heyting algebra

۶. $\mathcal{PF}(\mathfrak{A})$ یک زیرمشبکه‌ی $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ است.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F یک پالایه در $\mathfrak{A}$ باشد. رابطه دوتایی $\equiv_F$ را روی A به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- $(x,y) \in \equiv_F$ اگر و تنها اگر $x \to y, y \to x \in F$.

به سادگی می‌توان دید که رابطه $\equiv_F$ یک رابطه هم‌نهشتی روی $\mathfrak{A}$ است. رده هم‌ارزی $a/\equiv_F$ را با a/F و جبرخارج قسمتی $\mathfrak{A}/\equiv_F$ را با $\mathfrak{A}/F$ نشان می‌دهیم.

در گزاره زیر، یکی از ویژگی‌های مهم مشبکه پالایه‌های اصلی در مشبکه‌های مانده‌دار را بیان می‌کنیم. این گزاره را می‌توان با نسخه مشبکه‌ای خود مقایسه شود (لم II. 1.5، [۲۹]).

گزاره ۲,۹: فرض کنید F و G پالایه‌هایی در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ هستند. هرگاه $F \cap G \in \mathcal{PF}(\mathfrak{A})$ و $F \sqcup G \in \mathcal{PF}(\mathfrak{A})$ برقرار باشند آنگاه $F, G \in \mathcal{PF}(\mathfrak{A})$.

برهان: فرض کنید $F \cap G = \mathcal{F}(x)$ و $F \sqcup G = \mathcal{F}(y)$، به ازای $x, y \in A$. بنابر گزاره ۲,۸(۱)، $y \in F \sqcup G$ بیان می‌کند که $f \odot g \le y$، به ازای یک $f \in F$ و یک $g \in G$. با استفاده از گزاره ۲,۲(۵) می‌توان دید که $f \odot (g \vee x) \in F$ و این نتیجه می‌دهد که $\mathcal{F}(f \odot (g \vee x)) \subseteq F$. $z \in F$ را در نظر بگیرید. بنابراین، عدد صحیحی مانند n وجود دارد که $y^n \le z$ و این بیان می‌کند که $f^n \odot g^n \le z$. بنابر گزاره ۲,۲(۵) داریم $f^n \odot (g^n \vee z^n) \le z$ و این بنابر گزاره ۲,۲(۶) بیان می‌کند $f^{n_1} \odot (g \vee z)^{n_1} \le z$، به ازای یک عدد صحیح مانند n_1. از طرفی داریم $g \vee z \in F \cap G$، پس بنابر گزاره ۲,۸، به ازای یک عدد صحیح مانند n_2 داریم $x^{n_2} \le g \vee z$. بنابراین، داریم $f^{n_3} \odot x^{n_3} \le z$ به ازای یک عدد صحیح مانند n_3. بنابراین به ازای یک عدد صحیح مانند n_4 داریم $(f^{n_4} \odot g^{n_4}) \vee (f^{n_4} \odot x^{n_4}) \le z$ و این بنابر گزاره ۲,۲(۵) نتیجه می‌دهد $f^{n_4} \odot (g^{n_4} \vee x^{n_4}) \le z$. پس بنابر گزاره ۲,۲(۶) عدد صحیحی مانند n_5 وجود دارد که $f^{n_5} \odot (g \vee x)^{n_5} \le z$ و این نشان می‌دهد که $z \in \mathcal{F}(f \odot (g \vee x))$ و در نتیجه $F = \mathcal{F}(f \odot (g \vee x))$. به روش مشابه می‌توان نشان داد که $G \in \mathcal{PF}(\mathfrak{A})$. □

نتیجه ۲,۱۰: هرگاه F و G چنان پالایه‌هایی در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ باشند که $F \cap G = \{1\}$ و $F \sqcup G = A$، آنگاه F و G پالایه‌های اصلی هستند.

۳. پالایه‌های بیشین و اول

در این بخش، مفهوم پالایه‌های بیشین و اول را یادآوری می‌کنیم و آنها را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۳,۱: پالایه سره F در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ را بیشین[1] می‌نامیم هرگاه در مجموعه تمام پالایه‌های سره $\mathfrak{A}$ بیشین باشد. مجموعه تمام پالایه‌های بیشین $\mathfrak{A}$ را با $\mathrm{Max}(\mathfrak{A})$ و اشتراک تمام پالایه‌های بیشین $\mathfrak{A}$ را با $\mathrm{Rad}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳,۲: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$ از مثال ۲,۳ را در نظر بگیرید. بنابر مثال ۲,۶ داریم $\mathrm{Max}(\mathfrak{A}_6) = \{F_3, F_4\}$.

مثال ۳,۳: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_7$ از مثال ۲,۴ را در نظر بگیرید. بنابر مثال ۲,۷ داریم $\mathrm{Max}(\mathfrak{A}_7) = \{F_4\}$.

گزاره ۳,۴: هر پالایه سره در یک مشبکه مانده‌دار مشمول در یک پالایه بیشین است.

برهان: فرض کنید F یک پالایه سره در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ است. قرار می‌دهیم $\Sigma = \{G \in \mathcal{F}(\mathfrak{A}) \mid F \subseteq G \neq A\}$. آشکار است که $\Sigma \neq \emptyset$. فرض کنید $\mathcal{C}$ زنجیری در Σ است به سادگی می‌توان دید که $\bigcup \mathcal{C} \in \Sigma$ و بنابراین Σ در شرایط لم زرن صدق می‌کند. فرض کنید M عضو بیشین Σ است. به سادگی می‌توان دید که M یک پالایه بیشین $\mathfrak{A}$ است. □

گزاره ۳,۵ (گزاره ۳,۳۱ از مرجع [۲۱]): فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و M یک پالایه سره در $\mathfrak{A}$ باشد. در این صورت، M بیشین است اگر و تنها اگر برای هر $x \notin M$، یک عدد صحیح مانند n چنان وجود داشته باشد که $\neg x^n \in M$.

تعریف ۳,۶: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و α یک عدد اصلی است. پالایه سره P در $\mathfrak{A}$ را α–تحویل‌ناپذیر[2] می‌نامیم هرگاه برای هر خانواده $\mathcal{F}$ از پالایه‌های $\mathfrak{A}$ با عدد اصلی α داشته باشیم $P = \bigcap \mathcal{F}$، آنگاه به ازای یک $F \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $P = F$. پالایه P را (متناهی) تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه برای هر

[1] Maximal
[2] α-irreducible

عدد اصلی (متناهی) α، α–تحویل‌ناپذیر باشد. پالایه P را اول[1] می‌نامیم هرگاه متناهی تحویل‌ناپذیر باشد. آشکار است که پالایه سره P در $\mathfrak{A}$ اول است اگر و تنها اگر برای هر $F_1, F_2 \in F(\mathfrak{A})$ داشته باشیم $P = F_1 \cap F_2$، آنگاه $P = F_1$ یا $P = F_2$. مجموعه تمام پالایه‌های اول $\mathfrak{A}$ را طیف اول[2] $\mathfrak{A}$ می‌نامیم و با $\mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. به سادگی می‌توان دید که هر پالایه بیشین $\mathfrak{A}$ یک پالایه تحویل‌ناپذیر و در نتیجه یک پالایه اول است. بنابراین، داریم $\mathrm{Max}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$.

مثال ۳٫۷: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$ از مثال ۲٫۳ را در نظر بگیرید. بنابر مثال ۲٫۶ داریم $\mathrm{Spec}(\mathfrak{A}_6) = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$.

مثال ۳٫۸: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_7$ از مثال ۲٫۴ را در نظر بگیرید. بنابر مثال ۲٫۷ داریم $\mathrm{Spec}(\mathfrak{A}_7) = \{F_2, F_3, F_4\}$.

گزاره ۳٫۹: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و P یک پالایه سره در $\mathfrak{A}$ است. بندهای زیر با یکدیگر هم‌ارزند:

۱. P اول است؛
۲. هرگاه F_1 و F_2 پالایه‌هایی در $\mathfrak{A}$ باشند که $F_1 \cap F_2 \subseteq P$، آنگاه $F_1 \subseteq P$ یا $F_2 \subseteq P$؛
۳. هرگاه x و y عناصری در $\mathfrak{A}$ باشند که $x \vee y \in P$، آنگاه $x \in P$ یا $y \in P$.

برهان: ۱⇐۲) پالایه‌های F_1 و F_2 را در $\mathfrak{A}$ چنان در نظر می‌گیریم که $F_1 \cap F_2 \subseteq P$. لذا، داریم $(F_1 \cap F_2) \sqcup P = P$. بنابر ویژگی پخش‌پذیری مشبکه $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ داریم $(F_1 \sqcup P) \cap (F_2 \sqcup P) = P$ و این نتیجه می‌دهد که $F_1 \sqcup P = P$ یا $F_2 \sqcup P = P$. فرض کنید $F_1 \sqcup P = P$. بنابراین، داریم $F_1 \cup P \subseteq F_1 \sqcup P = P$ و این نشان می‌دهد که $F_1 \subseteq P$.

۲⇐۳) عناصر x و y را در A چنان در نظر می‌گیریم که $x \vee y \in P$. فرض کنید $z \in \mathcal{F}(P,x) \cap \mathcal{F}(P,y)$. بنابر گزاره ۲٫۸، $p_1, p_2 \in P$ و اعداد صحیح n و m وجود دارند که $(p_1 \odot x^n) \vee (p_2 \odot y^m) \leq z$. بنابر گزاره ۲٫۲(۶) داریم:

$$(p_1 \vee p_2) \odot (p_1 \vee y^m) \odot (x^n \vee p_2) \odot (x \vee y)^{nm} \leq z,$$

و این نتیجه می‌دهد $z \in P$. بنابراین، $\mathcal{F}(P,x) \cap \mathcal{F}(P,y) \subseteq P$ و در نتیجه داریم $x \in \mathcal{F}(P,x) \subseteq P$ یا $y \in \mathcal{F}(P,y) \subseteq P$.

۳⇐۱) پالایه‌های F_1 و F_2 را در $\mathfrak{A}$ چنان در نظر می‌گیریم که $F_1 \cap F_2 = P$. فرض کنید $F_1 \neq P$ و $F_2 \neq P$. $x \in F_1 \setminus P$ و $y \in F_2 \setminus P$ را در نظر بگیرید. بنابراین، داریم $x \vee y \in F_1 \cap F_2 = P$ و در نتیجه $x \in P$ یا $y \in P$؛ این یک تناقض است. □

گزاره ۳٫۱۰: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک MTL–جبر و P یک پالایه سره در $\mathfrak{A}$ باشد. در این صورت، P اول است اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $x \to y \in P$ یا $y \to x \in P$.

برهان: فرض کنید P یک پالایه اول باشد. $x, y \in A$ را در نظر بگیرید. بنابر prel داریم $(x \to y) \vee (y \to x) = 1 \in P$ و این بنابر گزاره ۳٫۹(۳) نتیجه می‌دهد $x \to y \in P$ یا $y \to x \in P$. حال، فرض کنید برای هر $x, y \in A$ داریم $x \to y \in P$ یا $y \to x \in P$. $x, y \in A$ را چنان در نظر بگیرید که $x \vee y \in P$. بنابر گزاره ۲٫۲(۷) خواهیم داشت $(x \to y) \to y \in P$ و $(y \to x) \to x \in P$. از طرف دیگر داریم $x \to y \in P$ یا $y \to x \in P$. این نتیجه می‌دهد $x \in P$ یا $y \in P$. بنابراین، P پالایه‌ای اول است. □

نکته ۳٫۱۱: پالایه‌هایی که در یک مشبکه مانده‌دار ویژگی گزاره ۳٫۹(۳) را برآورده سازند، در (تعریف ۲ مرجع [۳۰]) پالایه‌های اول از نوع دوم[3] و در (تعریف ۳٫۱۰ مرجع [۳۱]) پالایه‌های اول و همچنین پالایه‌هایی که در یک مشبکه مانده‌دار ویژگی گزاره ۳٫۱۰ را برآورده سازند، در (تعریف ۲ مرجع [۳۰]) پالایه‌های اول و در (تعریف ۱٫۶ مرجع [۳۱]) پالایه‌های خطی[4] نامیده شده‌اند. آشکار است که هر پالایه اول یک پالایه خطی است. بنابر (نتیجه ۱ مرجع [۳۲]) در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$، مجموعه پالایه‌های خطی و اول برابر است اگر و تنها اگر $\mathfrak{A}$ یک MTL–جبر باشد.

نتیجه ۳٫۱۲: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک MTL–جبر و P یک پالایه اول در $\mathfrak{A}$ است. در این صورت، هر پالایه سره شامل P، یک پالایه

[1] Prime
[2] Prime spectrum
[3] Prime filters of the second type
[4] Linear filters

اول است.

گزاره ۳,۱۳: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و P یک پالایه سره در $\mathfrak{A}$ باشد. هرگاه مجموعه $\{F \in F(\mathfrak{A}) | P \subseteq F\}$ با رابطه شمول نظریه مجموعه‌ها یک زنجیر باشد، آنگاه P اول است.

برهان: قرار می‌دهیم $\sum = \{F \in \mathcal{F}(\mathfrak{A}) | P \subseteq F\}$. فرض کنید $(\Sigma, \subseteq)$ یک زنجیر باشد. فرض کنید که P اول نباشد. بنابراین، $x, y \in A$ چنان وجود دارند که $x \vee y \in P$، $x \notin P$ و $y \notin P$. از آنجا که $\mathcal{F}(P, x), \mathcal{F}(P, y) \in \sum$، بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $\mathcal{F}(P, x) \subseteq \mathcal{F}(P, y)$. با استفاده از ویژگی پخش‌پذیری مشبکه $\mathcal{F}(\mathfrak{A})$ و گزاره ۲,۸(۲) داریم:

$$\begin{aligned} P = P \sqcup \mathcal{F}(x \vee y) &= P \sqcup \big(\mathcal{F}(x) \cap \mathcal{F}(y)\big) \\ &= \mathcal{F}(P, x) \cap \mathcal{F}(P, y) = \mathcal{F}(P, x), \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که $x \in P$ و این یک تناقض است. بنابراین، P یک پالایه اول است. □

گزاره ۳,۱۵: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و P یک پالایه اول در $\mathfrak{A}$ باشد. بندهای زیر با یکدیگر هم‌ارزند:

۱. هر پالایه سره شامل P، اول است؛

۲. مجموعه $\{F \in F(\mathfrak{A}) | P \subseteq F\}$ با رابطه شمول نظریه مجموعه‌ها یک زنجیر است.

برهان: ۱⇐۲) قرار می‌دهیم $\sum = \{F \in \mathcal{F}(\mathfrak{A}) | P \subseteq F\}$. فرض کنید $F_1, F_2 \in \Sigma$ به طوری که $F_1 \nsubseteq F_2$ و $F_2 \nsubseteq F_1$. $x \in F_1 \setminus F_2$ و $y \in F_2 \setminus F_1$ را در نظر بگیرید. بنابراین، داریم $x \vee y \in F_1 \cap F_2$ و در نتیجه $x \in F_1 \cap F_2$ یا $y \in F_1 \cap F_2$؛ این یک تناقض است.

۲⇐۱) فرض کنید F یک پالایه سره در $\mathfrak{A}$ شامل P است. $x, y \in A$ را چنان در نظر بگیرید که $x \vee y \in F$ و $x, y \notin F$. از آنجا که $\mathcal{F}(F, x), \mathcal{F}(F, y) \in \Sigma$، بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $\mathcal{F}(F, x) \subseteq \mathcal{F}(F, y)$. بنابر گزاره ۲,۸(۱)، $f \in F$ و عدد صحیح n وجود دارند که $f \odot y^n \leq x$. بنابر گزاره ۲,۲(۶) داریم:

$$\begin{aligned} x = x^n \vee x \geq x^n \vee (f \odot y^n) &\geq (x^n \vee f) \odot (x^n \vee y^n) \\ &\geq f \odot (x \vee y)^{2n} \in F, \end{aligned}$$

و این نتیجه می‌دهد که $x \in F$؛ این یک تناقض است □

نکته ۳,۱۶: بنابر نتیجه ۳,۱۲، هر MTL-جبر بندهای هم‌ارز گزاره ۳,۱۳ را برآورده می‌سازد، اگر چه مثال ۲,۳ مشبکه مانده‌داری را معرفی می‌کند که یک MTL-جبر نیست، ولی باز هم بندهای هم‌ارز گزاره ۳,۱۳ را برآورده می‌سازد.

تعریف ۳,۱۷: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار باشد. مجموعه ناتهی C از A را یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ می‌نامیم هرگاه تحت عمل «$\vee$» بسته باشد؛ یعنی $x, y \in C$ نتیجه دهد $x \vee y \in C$.

نکته ۳,۱۸: آشکار است که یک پالایه در یک مشبکه مانده‌دار اول است اگر و تنها اگر $P^c := A \setminus P$ یک مجموعه $\vee$-بسته باشد. همچنین، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که هرگاه $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$، آنگاه $(\bigcup \mathcal{P})^c$ یک مجموعه $\vee$-بسته است.

گزاره ۳,۱۹: (گزاره بنیادین پالایه‌های اول) فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ باشد. هرگاه C یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ باشد که F را قطع نکند، آنگاه پالایه‌ای مانند P شامل F وجود دارد که نسبت به ویژگی قطع نکردن C بیشین است. به علاوه، P پالایه‌ای اول است.

برهان: قرار می‌دهیم $\Sigma = \{G \in \mathcal{F}(\mathfrak{A}) | F \subseteq G,\ G \cap C = \emptyset\}$. به سادگی می‌توان نشان داد که Σ شرایط لم زرن[1] را برآورده می‌سازد. فرض کنید P عضو بیشین Σ است. فرض کنید $x \vee y \in P$، $x \notin P$ و $y \notin P$. لذا داریم $\mathcal{F}(P, x) \cap C \neq \emptyset$ و $\mathcal{F}(P, y) \cap C \neq \emptyset$. فرض کنید که $c_1 \in \mathcal{F}(P, x)$ و $c_2 \in \mathcal{F}(P, y)$. با استفاده از گزاره ۲,۸(۱)، $p_1, p_2 \in P$ و اعداد n, m وجود دارند که $(p_1 \odot x^n) \vee (p_2 \odot y^m) \leq c_1 \vee c_2$. با استفاده از گزاره ۲,۲(۶)، داریم:

$$(p_1 \vee p_2) \odot (p_1 \vee y^m) \odot (x^n \vee p_2) \odot (x \vee y)^{nm} \leq c_1 \vee c_2$$

بنابراین، $c_1 \vee c_2 \in P \cap C$؛ این یک تناقض است.

نتیجه ۳,۲۰: فرض کنید F پالایه‌ای در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ و X زیرمجموعه‌ای از A باشد. بندهای زیر برقرارند:

۱. هرگاه $X \nsubseteq F$، آنگاه پالایه اولی مانند P شامل F وجود دارد که $X \nsubseteq P$؛

۲. $\mathcal{F}(X) = \{P \in Spec(\mathfrak{A}) | X \subseteq P\}$.

[1] Zorn's lemma

برهان:

۱. $x \in X \setminus F$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $C = \{x\}$. با استفاده از گزاره ۳,۱۹ برهان سرراست است.

۲. قرار می‌دهیم $\sigma_X = \{P \in \mathrm{Spec}(\mathfrak{A}) | X \subseteq P\}$. بنابراین $\mathcal{F}(X) \subseteq \bigcap \sigma_x$. فرض کنید $a \notin \mathcal{F}(X)$. با استفاده از بند (۱)، پالایه اول P شامل $\mathcal{F}(X)$ وجود دارد به طوری که $a \notin P$. این نتیجه می دهد که $a \notin \bigcap \sigma_x$. □

تعریف ۳,۲۱: فرض کنید $a \neq 1$ یک عنصر در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ است. پالایه M را a–بیشین[1] می‌نامیم هرگاه در مجموعه تمام پالایه‌هایی که شامل a نیستند، بیشین باشد.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است و $a \neq 1$ یک عنصر در A است. بنابر نتیجه ۳,۲۰(۱)، مجموعه تمام a–پالایه‌ها، مجموعه‌ای ناتهی است. در گزاره زیر یک شرط لازم و کافی برای آن که یک پالایه به ازای عنصری مانند $a \neq 1$ در A، a–بیشین باشد ارائه می‌دهیم.

گزاره ۳,۲۲: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و M پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ باشد. بندهای زیر با یکدیگر هم‌ارزند:

۱. به ازای یک $1 \neq a \in A$، M پالایه‌ای a–بیشین است؛

۲. M تحویل‌ناپذیر است؛

۳. $M \subsetneq \bigcap \mathcal{F}_M$، جایی که $\mathcal{F}_M = \{F \in F(\mathfrak{A}) | M \subsetneq F\}$؛

۴. برای هر $a \in \bigcap \mathcal{F}_M \setminus M$، M پالایه‌ای a–بیشین است.

برهان:۲⇐۳ و ۴⇐۱ آشکار هستند.

۱⇐۲) آشکار است که M یک پالایه سره است. قرار دهید $M = \bigcap \mathcal{F}$ که $\mathcal{F}$ یک خانواده دلخواه از پالایه‌ها است. بنابراین $F \in \mathcal{F}$ وجود دارد که $a \notin F$. با توجه به بیشین بودن M، می‌توان نتیجه گرفت که $M = F$ و این نشان می‌دهد که M تحویل‌ناپذیر است.

۳⇐۴) فرض کنید $a \in \bigcap \mathcal{F}_M \setminus M$ و M پالایه‌ای a–بیشین نباشد. بنابرگزاره ۳,۱۹ پالایه $Q \in \mathcal{F}_M$ چنان وجود دارد که $a \notin Q$؛ این یک تناقض است. □

نتیجه ۳,۲۳: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است و $1 \neq a \in A$. در این صورت، هر پالایه a–بیشین، اول است.

برهان: بنابرگزاره ۳,۲۲، هر پالایه a–بیشین، تحویل‌ناپذیر و در نتیجه اول است. □

در ادامه، شرطی لازم و کافی برای این که تمام پالایه‌های یک مشبکه مانده‌دار اصلی باشند ارائه می‌دهیم.

لم ۳,۲۴: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه در $\mathfrak{A}$ و $a \in F$ است. هرگاه برای هر پالایه اول P که شامل a باشد داشته باشیم $F \subseteq P$، آنگاه $F = \mathcal{F}(a)$.

برهان.با استفاده از نتیجه ۳,۲۰(۲) برهان سرراست است. □

گزاره ۳,۲۵: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است. بندهای زیر با یکدیگر هم‌ارزند:

۱. برای هر $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$ و $F \in F(\mathfrak{A})$ که $F \subseteq \bigcup \mathcal{P}$، به ازای یک $P \in \mathcal{P}$ داریم $F \subseteq P$؛

۲. برای هر $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$ و $Q \in \mathrm{Spec}(\mathfrak{A})$ که $Q \subseteq \bigcup \mathcal{P}$، به ازای یک $P \in \mathcal{P}$ داریم $F \subseteq P$؛

۳. هر پالایه اول $\mathfrak{A}$ اصلی است؛

۴. هر پالایه $\mathfrak{A}$ اصلی است.

برهان: ۱⇐۲) آشکار است.

۲⇐۳) فرض کنید Q یک پالایه اول باشد که اصلی نیست. بنابر لم ۳,۲۴، برای هر $a \in Q$ یک پالایه اول مانند P_a شامل a وجود دارد که $Q \nsubseteq P_a$. از طرفی داریم $Q \subseteq \bigcup\{P_a | a \in Q\}$ و بنابراین به ازای یک $a \in Q$ داریم $Q \subseteq P_a$؛ این یک تناقض است.

۳⇐۴) فرض کنید Ψ مجموعه تمام پالایه های غیر اصلی $\mathfrak{A}$ است. فرض کنید Ψ ناتهی و $\mathfrak{F}$ یک زنجیر در Ψ است. آشکار است که $\bigcup \mathfrak{F}$ زیرمجموعه‌ای ناتهی از A است. اگر $x, y \in \bigcup \mathfrak{F}$، آنگاه $F \in \mathfrak{F}$ چنان وجود دارد که $x, y \in F$ و این یعنی $x \odot y \in F \subseteq \bigcup \mathfrak{F}$. اکنون فرض کنید $x \in \bigcup \mathfrak{F}$ و $y \in A$. در این صورت، $F \in \mathfrak{F}$ وجود دارد که $x \in F$ و این بیان می‌کند که $x \vee y \in F \subseteq \bigcup \mathfrak{F}$. بنابراین $\bigcup \mathfrak{F}$ یک پالایه در $\mathfrak{A}$ است. فرض کنید $\bigcup \mathfrak{F} \in \mathcal{PF}(\mathfrak{A})$. در این صورت، به ازای یک $a \in A$ داریم $\bigcup \mathfrak{F} = \mathcal{F}(a)$. بنابراین، به ازای یک $F \in \mathfrak{F}$ داریم $a \in F$ و این نتیجه می‌دهد $\mathcal{F}(a) \subseteq F \subseteq \bigcup \mathfrak{F} = \mathcal{F}(a)$. پس $F \in \mathcal{PF}(\mathfrak{A})$ که یک تناقض است. این نشان می‌دهد که $\bigcup \mathfrak{F} \in \Psi$. بنابراین، Ψ ویژگی‌های لم زرن را برآورده می‌سازد. فرض کنید M یک

[1] a-maximal

عضو بیشین Ψ است. از آنجا که M اصلی نیست پس بنابر فرض اول هم نیست. بنابراین، وجود دارد $x,y\in A$ که $x\vee y\in M$، $x\notin M$ و $y\notin M$. بنابر گزاره ۲،۸(۲) داریم $\mathcal{F}(M,x)\cap\mathcal{F}(M,y)=M$. لذا $x\notin\mathcal{F}(M,y)$ و $y\notin\mathcal{F}(M,x)$. پس $\mathcal{F}(M,x)$ و $\mathcal{F}(M,y)$ و در نتیجه M اصلی هستند؛ این یک تناقض است. بنابراین، فرض خلف باطل است و این یعنی $\Psi=\emptyset$.

۴⇐۱) فرض کنید F پالایه در $\mathfrak{A}$ و $\mathcal{P}$ خانواده‌ای از پالایه‌های اول $\mathfrak{A}$ است که $F\subseteq\bigcup\mathcal{P}$. بنابر فرض $a\in A$ وجود دارد که $F=\mathcal{F}(a)$. پس یک $P\in\mathcal{P}$ وجود دارد که $a\in P$. بنابراین، $F=\mathcal{F}(a)\subseteq P$ و این حکم را اثبات می‌کند. □

تعریف ۳،۲۶ [۲۶]: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. برای هر زیرمجموعه X از A هم‌پوچساز[1] X وابسته به F (به سادگی؛ F-هم‌پوچساز X) را با $(F:X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(F:X)=\{a\in A|a\vee x\in F,\forall x\in X\}.$$

هرگاه $X=\{x\}$، به جای $(F:X)$ می‌نویسیم $(F:x)$ و آن را هم‌پوچک[2] x وابسته به F می‌نامیم. هرگاه $F=\{1\}$، $(F:X)$ را با $X^{\perp}$ نشان می‌دهیم و آن را هم‌پوچساز X می‌نامیم. همچنین، $\{x\}^{\perp}$ را هم‌پوچک x می‌نامیم و با $x^{\perp}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳،۲۷: مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}_6$ از مثال ۲،۳ را در نظر بگیرید. بنابر نمادهای مثال ۲،۶ داریم $(F_4:0)=F_4$، $(F_4:a)=F_4$، $(F_4:b)=F_4$، $(F_4:c)=F_5$، $(F_4:d)=F_5$ و $(F_4:1)=F_5$.

گزاره ۳،۲۸: (گزاره ۳،۱ مرجع [۲۶]) فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$. بندهای زیر برای هر $X,Y\subseteq A$ برقرارند:

۱. $X\subseteq(F:Y)$ اگر و تنها اگر $Y\subseteq(F:X)$؛
۲. $(F:X)=A$ اگر و تنها اگر $X\subseteq F$.

گزاره ۳،۲۹: فرض کنید Π خانواده‌ای از پالایه‌های اول در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ است. برای هر زیرمجموعه X از A داریم:

$$(\bigcap\Pi:X)=\bigcap\{P\in\Pi|X\nsubseteq P\}.$$

برهان: قرار می‌دهیم $\Phi=\{P\in\Pi|X\nsubseteq P\}$. $a\in(\bigcap\Pi:X)$ و $P\in\Pi$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $x\in X\setminus P$. از آنجا که $x\vee a\in\bigcap\Pi\subseteq P$، بنابراین $a\in P$. این نشان می‌دهد که $(\bigcap\Pi:X)\subseteq\bigcap\Phi$.

اکنون، فرض کنید $a\in\bigcap\Phi$ و $x\in X$. به سادگی می‌توان دید که برای هر $P\in\Pi$ داریم $x\vee a\in P$ و این به معنای این است که $x\vee a\in\bigcap\Pi$. بنابراین، $a\in(\bigcap\Pi:X)$ و این نشان می‌دهد که $\bigcap\Phi\subseteq(\bigcap\Pi:X)$. □

۴. پالایه‌های اول کمین

در این بخش، پالایه‌های اول کمین را در مشبکه‌های مانده‌دار معرفی می‌کنیم و آنها را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۴،۱: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است و X زیرمجموعه‌ای از A. پالایه اول P در $\mathfrak{A}$ را یک پالایه اول کمین وابسته به X (به سادگی، پالایهX-اول کمین)[3] می‌نامیم، هرگاه P در مجموعه تمام پالایه‌های اولی که شامل X هستند، یک عنصر کمین[4] باشد. مجموعه تمام پالایه‌های X-اول کمین در $\mathfrak{A}$ را با $\mathrm{Min}_X(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. پالایه اول P در $\mathfrak{A}$ را اول کمین می‌نامیم هرگاه $P\in\mathrm{Min}_{\{1\}}(\mathfrak{A})$. مجموعه پالایه‌های اول کمین $\mathfrak{A}$ را با $\mathrm{Min}(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم.

لم ۴،۲: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. هرگاه C یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ باشد که F را قطع نکند، آنگاه یک مجموعه $\vee$-بسته مانند D شامل C چنان وجود دارد که نسبت به ویژگی قطع نکردن F بیشین است.

برهان: با استفاده از لم زرن برهان سر راست است. □

گزاره ۴،۳: (گزاره بنیادین پالایه‌های اول کمین) فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. زیرمجموعه P از A یک پالایه F-اول کمین است اگر وتنها اگر P^c یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ باشد که نسبت به ویژگی قطع نکردن F بیشین باشد.

---

[1] Coannihilator
[2] Coannulet
[3] Minimal prime filter belonging to X
[4] Minimal

برهان: فرض کنید P زیرمجموعه‌ای از A است. فرض کنید P^c یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ باشد که نسبت به ویژگی قطع نکردن F بیشین باشد. بنابر گزاره ۳٫۱۹ پالایه اول Q شامل F چنان وجود دارد که P^c را قطع نمی‌کند. بنابر نکته ۳٫۱۸، Q^c زیرمجموعه‌ای $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ است. بنابراین داریم $P^c \subseteq Q^c$ و $Q^c \cap F = \emptyset$. بنابر بیشین بودن P^c نتیجه می‌گیریم $P^c = Q^c$ و این نتیجه می‌دهد $P = Q$. این نشان می‌دهد که P یک پالایه اول است. به سادگی، می‌توان نشان داد که P یک پالایه F-اول کمین است.

برعکس، فرض کنید P یک پالایه F-اول کمین در $\mathfrak{A}$ است. بنابر نکته ۳٫۱۸، P^c یک زیرمجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ است و داریم $P^c \cap F = \emptyset$. بنابر لم ۴٫۲ یک زیرمجموعه $\vee$-بسته مانند C در $\mathfrak{A}$ شامل P^c چنان وجود دارد که نسبت به ویژگی قطع نکردن F بیشین است. بنابر قسمت رفت، C^c یک پالایه اول شامل F است که P^c را قطع نمی‌کند. بنابراین، $C^c \subseteq P$ و این نتیجه می‌دهد $C = P^c$. بنابراین P^c یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ است که نسبت به ویژگی قطع نکردن F بیشین است. □

نتیجه ۴٫۴: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، X یک زیرمجموعه A و P یک پالایه در $\mathfrak{A}$ شامل X است. در این صورت، یک پالایه X-اول کمین مشمول در P وجود دارد.

برهان: بنابر نکته ۳٫۱۸، P^c یک زیرمجموعه $\vee$-بسته روی $\mathfrak{A}$ است که $P^c \cap \mathcal{F}(X) = \emptyset$. بنابر لم ۴٫۲، یک زیرمجموعه $\vee$-بسته مانند C در $\mathfrak{A}$ شامل P^c چنان وجود دارد که نسبت به ویژگی قطع نکردن $\mathcal{F}(X)$ بیشین است. بنابر گزاره ۴٫۳، C^c یک پالایه F-اول کمین مشمول P است. □

نتیجه زیر می‌تواند با نتیجه ۳٫۲۰ مقایسه شود.

نتیجه ۵٫۴: فرض کنید F پالایه‌ای در مشبکه مانده‌دار $\mathfrak{A}$ و X زیرمجموعه‌ای از A است. بندهای زیر برقرارند:

۱. هرگاه $X \not\subseteq F$، آنگاه پالایه F-اول کمین مانند P وجود دارد که $X \not\subseteq P$؛

۲. $\mathcal{F}(X) = \bigcap \mathrm{Min}_X(\mathfrak{A})$.

برهان:

۱. $x \in X \setminus F$ را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $C = \{x\}$. با استفاده از نتیجه ۳٫۲۰(۱) و ۴٫۴ برهان سرراست است.

۲. قرار می‌دهیم $\sigma_X = \{P \in \mathrm{Spec}(\mathfrak{A}) | X \subseteq P\}$. بنابر نتیجه ۳٫۲۰(۲)، باید نشان دهیم $\bigcap \sigma_X = \bigcap \mathrm{Min}_X(\mathfrak{A})$. آشکار است که $\bigcap \sigma_X \subseteq \bigcap \mathrm{Min}_X(\mathfrak{A})$. حال، $a \in \bigcap \mathrm{Min}_X(\mathfrak{A})$ و $P \in \sigma_X$ را در نظر بگیرید. بنابر نتیجه ۴٫۴، یک پالایه X-اول کمین شامل P مانند $\mathfrak{m}$ وجود دارد. در نتیجه $a \in P$ و این نشان می‌دهد که $\bigcap \mathrm{Min}_X(\mathfrak{A}) \subseteq \bigcap \sigma_X$. □

نتیجه ۴٫۶: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است. برای هر زیرمجموعه X از A داریم:

$$(F:X) = \bigcap\{\mathfrak{m} \in \mathrm{Min}_F(\mathfrak{A}) | X \not\subseteq \mathfrak{m}\}.$$

برهان: با استفاده از گزاره ۳٫۲۹ و نتیجه ۴٫۵(۲) برهان آشکار است. □

۵. پالایه‌های بخش‌یاب

در این بخش پالایه‌های بخش‌یاب در مشبکه‌های مانده‌دار را معرفی و بررسی می‌کنیم. این پالایه‌ها ابزار مهمی در مطالعه پالایه‌های اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار هستند.

تعریف ۵٫۱: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. برای هر پالایه اول H در $\mathfrak{A}$ قرار می‌دهیم:

$$D_F(H) = \{a \in A | x \vee a \in F, \quad \exists x \notin H\}.$$

عناصر $D_F(H)$ را بخش‌یاب‌های[1] F وابسته به H (به سادگی؛ F-بخش‌یاب‌های H) می‌نامیم. در ادامه، $D_{\{1\}}(H)$ را با D(H) نشان می‌دهیم و عناصر آن را بخش‌یاب‌های یکه[2] H می‌نامیم. همچنین، بخش‌یاب‌های $\{1\}$ را به سادگی بخش‌یاب‌های یکه می‌نامیم.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. یادآوری می‌کنیم که عنصر x در A را F-فشرده[3] می‌نامیم هرگاه، داشته باشیم $(F:x) = F$. مجموعه تمام عناصر F-چگال A را با $\mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم.

[1] Divisors
[2] Unit divisors
[3] F-dense

گزاره ۵٫۲: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار است. بندهای زیر برای هر پالایه F، G، H و K در $\mathfrak{A}$ برقرارند:

۱. $D_F(H) = \bigcup_{x \notin H}(F:x)$؛
۲. $D_F(H) = \{a \in A | (F:a) \nsubseteq H\}$؛
۳. $F \subseteq D_F(H)$؛
۴. هرگاه $H \subseteq K$، آنگاه $D_F(K) \subseteq D_F(H)$؛
۵. هرگاه $F \subseteq G$، آنگاه $D_F(H) \subseteq D_G(H)$؛
۶. $D_F(H) = A$ اگر و تنها اگر $F \nsubseteq H$؛
۷. $D_F(H) = F$ اگر و تنها اگر $H^c \subseteq \mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$؛
۸. هرگاه P یک پالایه اول باشد، آنگاه $D_F(P)$ یک پالایه در $\mathfrak{A}$ است؛
۹. هرگاه P یک پالایه اول شامل F باشد، داریم $D_F(P) \subseteq P$.

برهان: قسمت‌های (۱)، (۲)، (۳)، (۴) و (۵) دارای برهان‌های سرراستی هستند.

۶. فرض کنید $D_F(H) = A$. بنابراین، $0 \in D_F(H)$. بنابر قسمت (۱)، $x \notin H$ وجود دارد که $0 \in (F:x)$. بنابر گزاره ۳٫۲۴(۱)، داریم $x \in (F:0) = F$ و بنابراین $F \nsubseteq H$. اکنون، فرض کنید $x \in F \setminus H$. بنابر گزاره ۳٫۲۴(۲)، داریم $(F:x) = A$ و این بنابر قسمت (۱) نتیجه می‌دهد $D_F(H) = A$.

۷. فرض کنید $D_F(H) = F$ و $x \notin H$ را در نظر بگیرید. بنابراین، داریم $F \subseteq (F:x) \subseteq D_F(H) = F$ و این بیان می‌کند که $x \in \mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$. اکنون، فرض کنید $H^c \subseteq \mathfrak{D}_F(\mathfrak{A})$. بنابراین، برای هر $x \notin H$ داریم $(F:x) = F$ و این بنابر قسمت (۱) نتیجه می‌دهد $D_F(H) = F$.

۸. بنابر قسمت (۳) داریم $1 \in D_F(P)$. فرض کنید $x, y \in D_F(P)$. در نتیجه، $p_x, p_y \notin P$ چنان وجود دارند که $x \in (F:p_x)$ و $y \in (F:p_y)$. بنابراین داریم $p_x \vee p_y \in (F:x \odot y)$ و این نشان می‌دهد که $x \odot y \in D_F(P)$. همچنین، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که برای هر $x \in D_F(P)$ و $y \in A$ داریم $x \vee y \in D_F(P)$. بنابراین، $D_F(P)$ یک پالایه در $\mathfrak{A}$ است.

۹. با استفاده از قسمت (۱) برهان سر راست است. □

تعریف ۵٫۳: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. پالایه G در $\mathfrak{A}$ را یک F-پالایه بخش‌یاب می‌نامیم هرگاه پالایه‌ای مانند H در $\mathfrak{A}$ باشد که $G = D_F(H)$.

در گزاره زیر، یکی از بارزترین ویژگی‌های پالایه‌های اول کمین را بررسی کرده و یک بازشناسی اساسی برای پالایه‌های اول کمین ارائه می‌دهیم.

گزاره ۵٫۴: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. برای هر پالایه اول P در $\mathfrak{A}$ که شامل F باشد، بندهای زیر هم‌ارزند:

۱. P، F-اول کمین است؛
۲. $P = D_F(P)$؛
۳. برای هر $x \in A$، P شامل یک وتنها یک x یا $(F:x)$ است.

برهان: ۱⇐۲) فرض کنید $x \in P$. به سادگی می‌توان نشان داد که $C = (x \vee P^c) \cup P^c$ یک مجموعه $\vee$-بسته در $\mathfrak{A}$ است. بنابر گزاره ۴٫۳ می‌توان نتیجه گرفت که

$$(x \vee P^c) \cap F = C \cap F \neq \emptyset.$$

$a \in (x \vee P^c) \cap F$ را در نظر بگیرید. بنابراین، $y \notin P$ وجود دارد که $x \vee y = a \in F$ و این یعنی $x \in D_F(P)$. شمول وارون با استفاده از گزاره ۵٫۲(۹) بدیهی است.

۲⇐۳) با استفاده از گزاره ۵٫۲((۱) و (۲)) برهان آشکار است.

۳⇐۱) فرض کنید Q یک پالایه اول مشمول در P و شامل F است. $x \in P$ را در نظر بگیرید. بنابراین، $(F:x) \nsubseteq P$ و این بیان می‌کند که $x \in D_F(P) \subseteq D_F(Q) \subseteq Q$ و در نتیجه $P = Q$. □

نکته ۵٫۵: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در $\mathfrak{A}$ است. بنابر گزاره ۵٫۲(۴) و ۵٫۴، هرگاه $\mathfrak{m}$ یک پالایه F-اول کمین باشد، آنگاه $\mathfrak{m} \subseteq D_F(F)$. به ویژه، هر پالایه اول کمین زیرمجموعه‌ای از بخش‌یاب‌های یکه است.

گزاره ۵٫۶: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار و F پالایه‌ای در

$\mathfrak{A}$ است. برای هر $x, y \in A$ داریم $(F{:}x) = (F{:}y)$ اگر و تنها اگر $\{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | x \in \mathfrak{m}\} = \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | y \in \mathfrak{m}\}$.

برهان: برای هر $a \in A$ قرار می‌دهیم:

$$d_F(a) = \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | a \notin \mathfrak{m}\}.$$

اگر $\{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | x \in \mathfrak{m}\} = \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | y \in \mathfrak{m}\}$، آنگاه داریم $d_F(x) = d_F(y)$. بنابر نتیجه ۴,۶ داریم:

$$(F{:}x) = \bigcap d_F(x) = \bigcap d_F(y) = (F{:}y).$$

حال، فرض کنید $(F{:}x) = (F{:}y)$ و $\mathfrak{m} \in \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | x \in \mathfrak{m}\}$ را در نظر بگیرید. بنابر گزاره ۵,۳(۳)، داریم $(F{:}y) = (F{:}x) \not\subseteq \mathfrak{m}$ و بنابراین $y \in \mathfrak{m}$. این نشان می‌دهد که $\mathfrak{m} \in \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | y \in \mathfrak{m}\}$ و در نتیجه $\{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | x \in \mathfrak{m}\} \subseteq \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | y \in \mathfrak{m}\}$. شمول وارون بنابر تقارن برقرار است. □

در ادامه، می‌خواهیم پالایه‌های بخش‌یاب را با استفاده از پالایه‌های اول کمین بازشناسی کنیم.

لم ۵,۷: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه و P پالایه‌ای اول در $\mathfrak{A}$ است. در این صورت، هر پالایه $D_F(P)$–اول کمین مشمول در P است.

برهان: فرض کنید $\mathfrak{m}$ یک پالایه $D_F(P)$–اول کمین در $\mathfrak{A}$ است. فرض کنید $\mathfrak{m} \not\subseteq P$. $x \in \mathfrak{m} \setminus P$ را در نظر بگیرید. بنابر گزاره ۵,۴ داریم $x \in D_{D_F(P)}(\mathfrak{m})$ و این یعنی یک $y \notin \mathfrak{m}$ وجود دارد که $x \vee y \in D_F(P)$. بنابراین، $z \notin P$ وجود دارد که $x \vee y \in (F{:}z)$ و این امر نتیجه می‌دهد که $y \in (F{:}x \vee z) \subseteq D_F(P) \subseteq \mathfrak{m}$؛ این یک تناقض است.

گزاره ۵,۸: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه و P پالایه‌ای اول در $\mathfrak{A}$ است. داریم:

$$Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | \mathfrak{m} \subseteq P\}.$$

برهان: قرار می‌دهیم $\mu = \{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | \mathfrak{m} \subseteq P\}$. $\mathfrak{m} \in \mu$ را در نظر بگیرید. بنابر گزاره‌های ۵,۲(۴) و ۵,۴ خواهیم داشت $D_F(P) \subseteq D_F(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$. بنابراین، $\mathfrak{m}$ یک پالایه اول شامل $D_F(P)$ است. فرض کنید $\mathfrak{w}$ یک پالایه اول شامل $D_F(P)$ و مشمول در $\mathfrak{m}$ است. بنابر گزاره ۵,۲((۴) و (۹)) و ۵,۴ داریم $\mathfrak{m} = D_F(\mathfrak{m}) \subseteq D_F(\mathfrak{w}) \subseteq \mathfrak{w}$. این نشان می‌دهد که $\mathfrak{m} = \mathfrak{w}$. بنابراین، $\mathfrak{m} \in Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A})$ و در نتیجه $\mu \subseteq Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A})$. حال، فرض کنید $\mathfrak{m} \in Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A})$. بنابر گزاره ۵,۲(۳) و لم ۵,۷ داریم $F \subseteq \mathfrak{m} \subseteq P$. فرض کنید $\mathfrak{w}$ یک پالایه اول شامل F و مشمول $\mathfrak{m}$ است. بنابر گزاره ۵,۲((۴) و (۹)) داریم $D_F(P) \subseteq D_F(\mathfrak{w}) \subseteq \mathfrak{w}$. بنابراین، $\mathfrak{w}$ یک پالایه اول شامل $D_F(P)$ است و این نتیجه می‌دهد $\mathfrak{m} = \mathfrak{w}$. این نشان می‌دهد که $\mathfrak{m} \in \mu$ و در نتیجه $Min_{D_F(P)}(\mathfrak{A}) \subseteq \mu$. □

نتیجه ۵,۹: فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک مشبکه مانده‌دار، F یک پالایه و P پالایه‌ای اول در $\mathfrak{A}$ است. داریم:

$$D_F(P) = \bigcap\{\mathfrak{m} \in Min_F(\mathfrak{A}) | \mathfrak{m} \subseteq P\}.$$

برهان. بنابر نتیجه ۴,۵(۲) و گزاره ۵,۸ برهان سرراست است. □

۶. نتیجه‌گیری

همان‌طور که مشاهده شد موضوع اصلی ما در این مقاله بررسی پالایه‌های بیشین، اول و اول کمین در مشبکه‌های مانده‌دار است. گزاره بنیادین پالایه‌های اول (گزاره ۳,۱۹) را اثبات کردیم و نشان دادیم که هر پالایه که یک مجموعه ∨–بسته را قطع نکند، مشمول در یک پالایه‌ی اول است که آن مجموعه را قطع نمی‌کند. دو گزاره بنیادین در رابطه با پالایه‌های اول کمین (گزاره ۴,۳ و ۵,۴) بیان و اثبات کردیم و نشان دادیم که یک پالایه اول کمین است اگر و تنها اگر برای هر $x \in A$، آن پالایه یا شامل x باشد یا $x^{\perp}$. در پایان پالایه‌های بخش‌یاب را مورد مطالعه قرار دادیم که در بررسی نظریه بافه‌ها در مشبکه‌های مانده‌دار دارای نقش اساسی هستند. در پایان پیشنهاد می‌کنیم که در ادمه بحث فوق بر روی پالایه‌های خالص و استون یک مشبکه مانده‌دار کار شود و با استفاده از آنها مشبکه‌های مانده‌دار mp و Gelfand مورد بررسی قرار گیرند.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافعی ندارند.

مراجع

[1] S.F. Aliabadi and S.A. Taher, “Load frequency control by using fuzzy-PID controller with optimized membership functions,” Soft Comput. J., vol. 9, no. 2, pp. 34-43, 2021, doi: 10.22052/scj.2021.242834.0 [In Persian].

[2] M.J. Nadjafi-Arani and S. Doostali, “Cost-based workflow scheduling using algebraic structures,” Soft Comput. J., vol. 9, no. 2, pp. 114-129, 2021, doi: 10.22052/scj.2021.242814.0 [In Persian].

[3] S.M. Babamir and N. Zahiri, “A method to simplify patterns with probabilistic structure in web service composition,” Soft Comput. J., 2022, doi: 10.22052/scj.2023.246636.1084 [In Persian].

[4] W. Krull, “Axiomatische begrundung der allgemeinen ideal theorie,” Sitzungsberichte der physikalisch medizinischen, Societat der Erlangen, vol 56, pp. 47-63, 1924, doi: 10.1515/9783110801026.149.

[5] R.P. Dilworth, “Abstract residuation over lattices,” Bull. Amer. Math. Soc., vol. 44, no 4, pp. 262-268, 1938.

[6] R.P. Dilworth, “Non-commutative residuated lattices,” Trans. Amer. Math. Soc., vol. 46, pp. 426-444, 1939.

[7] M. Ward, “Residuation in structures over which a multiplication is defined,” Duke Math. J., vol. 3, no. 4, pp. 627-636, 1937, doi: 10.1215/S0012-7094-37-00351-X.

[8] M. Ward, “Structure Residuation,” Annals of Mathematics, 2nd Ser., vol. 39, no. 3, pp. 558-568, 1938, doi: 10.2307/1968634.

[9] M. Ward, “Residuated distributive lattices,” Duke Math. J., vol. 6, no. 3, pp. 641-651, 1940, doi: 10.1215/S0012-7094-40-00649-4.

[10] M. Ward and R.P. Dilworth, “Residuated Lattices,” Proc. Natl. Acad. Sci., vol. 24, pp. 162-164, 1938, doi: 10.1073/pnas.24.3.16.

[11] M. Ward and R.P. Dilworth, “Residuated lattices,” Trans. Amer. Math. Soc., vol. 45, pp. 335-354, 1939.

[12] U. Hohle, “Commutative, residuated 1—monoids,” in: Hohle, U., Klement, E.P. (eds) Non-Classical Logics and their Applications to Fuzzy Subsets. Theory and Decision Library, vol 32. Springer, Dordrecht. 1995, doi: 10.1007/978-94-011-0215-5_5.

[13] M. Okada and K. Terui, “The Finite Model Property for Various Fragments of Intuitionistic Linear Logic,” J. Symb. Log., vol. 64, no. 2, pp. 790-802, 1999, doi: 10.2307/2586501.

[14] W.J. Blok and D. Pigozzi, Algebraizable Logics, Mem. Am. Math. Soc., vol. 396, Amer. Math. Soc., Providence, 1989.

[15] S. Rasouli and A. Radfar, “PMTL filters, Rℓ filters and PBL filters in residuated lattices,” J. Mult. Valued Log. Soft Comput., vol. 29, no. 6, pp. 551–576. 2017.

[16] S. Rasouli, “Heyting, Boolean and pseudo-MV filters in residuated lattices,” J. Mult. Valued Log. Soft Comput., vol. 31, no. 4, pp. 287–322, 2018.

[17] S. Rasouli, “Quasicomplemented residuated lattices,” Soft Comput., vol. 24., no. 9, pp. 6591-6602, 2020, doi: 10.1007/S00500-020-04778-Y.

[18] S. Rasouli, “Generalized stone residuated lattices,” Algebra Struct. Their Appl., vol. 8, no. 1, pp. 75-87, 2021, doi: 10.22034/AS.2020.1885.

[19] S. Rasouli and A. Dehghani, “The hull-kernel topology on prime filters in residuated lattices,” Soft Comput., vol. 25, pp. 10519–10541, 2021, doi: 10.1007/S00500-021-05985-X.

[20] S. Rasouli and M. Kondo, “n-normal residuated lattices,” Soft Comput., vol. 24, no. 1, pp. 247–258, 2020, doi: 10.1007/S00500-019-04346-Z.

[21] L.C. Ciungu, “Classes of residuated lattices,” Annals of Universityof Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., vol. 33, pp. 189-207, 2006.

[22] P.M. Idziak, “Lattice operations in BCK-algebras,” Math. Japonica, vol. 29, pp. 839-846, 1984.

[23] P. Flondor, G. Georgescu, and A. Iorgulescu, “Pseudo-t-norms and pseudo-BL algebras,” Soft Comput., vol. 5, no. 5, pp. 355-371, 2001, doi: 10.1007/S005000100137.

[24] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski, and H. Ono, Residuated lattices: an algebraic glimpse at substructural logics, Elsevier, vol. 151, pp. 1-509, 2007.

[25] S. Rasouli and B. Davvaz, “An investigation on Boolean prime filters in BL-algebras,” Soft Comput., vol. 19, no. 10, pp. 2743–2750, 2015, doi: 10.1007/S00500-015-1711-8.

[26] S. Rasouli, “Generalized co-annihilators in residuated lattices,” Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, vol. 45, no. 2, pp. 1–18, 2018.

[27] E. Turunen, Mathematics behind fuzzy logic, Physica-Verlag Heidelberg, Springer, 1999.

[28] P. Jipsen and C. Tsinakis, “A Survey of Residuated Lattices,” in: Martínez, J. (eds) Ordered Algebraic Structures, Developments in Mathematics, vol 7, Springer, Boston, MA., 2002, doi: 10.1007/978-1-4757-3627-4_3.

[29] G. Gratzer, Lattice theory, San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1979.

[30] B.V. Gasse, G. Deschrijver, C. Cornelis, and E.E. Kerre, "Filters of residuated lattices and triangle algebras," Inf. Sci., vol. 180, no. 16, pp. 3006-3020, 2010, doi: 10.1016/J.INS.2010.04.010.

[31] S. Rasouli, "The going-up and going-down theorems in residuated lattices," Soft Comput., vol. 23, no. 17, pp. 7621–7635, 2019, doi: 10.1007/S00500-019-03780-3.

[32] M. Kondo and E. Turunen, "Prime filters on residuated lattices," in 42nd IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, ISMVL, Victoria, BC, Canada, 2012, pp. 89-91, doi: 10.1109/ISMVL.2012.40.