



دانشگاه کاشان
University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: sci.kashanu.ac.ir



بررسی یک مدل اپیدمیک فازی ریاضی برای انتشار ویروس کرونا در یک جمعیت*

عباس اکرمی^{۱*}، استادیار، محمود پارسامنش^۲، دانشیار

^۱ گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه زابل، زابل، ایران.

^۲ گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

چکیده

در این مقاله یک مدل اپیدمیک با پارامترهای فازی برای بیماری کرونا ارائه شده است. این مدل با توجه به عامل‌های واکنش‌ناهیون، درمان، اجرای پروتکل‌های بهداشتی و میزان ویروس کرونا ساخته شده است. از پارامترهای فازی برای نرخ سرایت، نرخ بهبودی و نرخ مرگ و میر در این بیماری و در تحلیل مدل از روش ماتریس نسل بعد برای محاسبه عدد مولد پایه و پایداری نقاط تعادل مدل استفاده شده است. شبیه‌سازی نتایج نشان می‌دهد جهش‌های مختلف ویروس کرونا باعث تفاوت در انتشار آن است. همچنان که عامل‌های واکنش‌ناهیون و طرز عمل در اجرای پروتکل‌های بهداشتی به میزان قابل ملاحظه‌ای در کاهش یا توقف انتشار ویروس کرونا در یک جمعیت موثر است.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۲۵ بهمن ماه ۱۴۰۰

پذیرش ۲۲ شهریور ماه ۱۴۰۱

کلمات کلیدی:

پاندمی

پروتکل‌های بهداشتی

عدد فازی

کرونا

مدل اپیدمیک فازی ریاضی

واکنش‌ناهیون

© ۱۴۰۱ نویسندگان. مقاله با دسترسی آزاد تحت مجوز CC-BY

دانشگاه جان هاپکینز تاکنون (در زمان نگارش مقاله) ۲۴۰،۱۰۱،۹۲۰ نفر به کرونا مبتلا و ۲۰۹،۸۹۰،۴ در اثر این بیماری فوت کرده‌اند.

مدل‌های ریاضی و شبیه‌سازی کامپیوتری امکان مطالعه رفتار یک جامعه را فراهم می‌کنند. در مدل‌سازی ریاضی اپیدمی، جمعیت مورد مطالعه با توجه به وضعیت افراد نسبت به پیشرفت بیماری به چند بخش یا به اصطلاح محفظه تقسیم می‌شوند. سپس هرگونه تغییرات جمعیتی در این محفظه‌ها از قبیل تولد و مرگ یا حتی مهاجرت، یا در بین این محفظه‌ها، مانند ابتلا، ریکاوری، واکنش‌ناهیون، قرنطینه، ایمنی و غیره، در نظر گرفته شده و توسط روابط ریاضی فرمول بندی می‌شوند [۱] - [۴]. به چنین مدل‌هایی، مدل‌های چند قسمتی نیز گفته

۱. مقدمه

ویروس جدیدی که باعث ایجاد یک پاندمی در دنیا شد ابتدا در ووهان چین در اوایل دسامبر ۲۰۱۹ مشاهده گردید و بیماری مرتبط با آن کووید ۱۹ یا کرونا نام‌گذاری شد [۱]. سرعت انتشار بیماری در دنیا سازمان بهداشت جهانی را بر آن داشت تا شیوع کرونا در ۱۲ مارس ۲۰۲۰ را یک پاندمی اعلام نماید. کرونا از طریق تماس فیزیکی یا قطرات تنفسی فرد آلوده به کووید ۱۹، انتشار می‌یابد. با توجه به اطلاعات جمع‌آوری شده توسط

* نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: akrami.ab@uoz.ac.ir (اکرمی)

mparsamansh@tvu.ac.ir (پارسامنش)

افراد عفونی به دست آمده است. عدد مولد عمومی فازی برای مدل ارائه شده و شرایطی که در آن دستگاه یک انشعاب پسرو را نمایش می‌دهد، به دست آمده است.

یک مدل اپیدمی SIRS برای انتقال فازی ویروس در یک شبکه کامپیوتری در [۱] فرمول‌بندی شده است. مقایسه‌ای بین عدد مولد عمومی مدل فازی و کلاسیک انجام شده و راهکارهای کنترل در سه حالت کم، متوسط و زیاد برای میزان ویروس در شبکه مورد تحلیل قرار گرفته شده است. در [۲۴] یک مدل فازی SIR ارائه شده که در آن نرخ انتقال بیماری، مرگ در اثر بیماری و بهبود افراد عفونی به صورت فازی در نظر گرفته شده است. مقایسه‌ای بین نقاط تعادل در مدل کلاسیک و فازی و همچنین عدد مولد عمومی این دو مدل انجام شده است. یک رویکرد کنترلی بر مبنای عدد مولد عمومی فازی R_0^f پیشنهاد شده است.

در این مقاله یک مدل اپیدمی در شکل نرمال شده با سه پارامتر کنترل به نام واکسیناسیون، درمان و اجرای پروتکل‌های بهداشتی بررسی شده است. پارامترهای نرخ عفونت، نرخ بهبودی و میزان مرگ و میر ناشی از کرونا به عنوان اعداد فازی در نظر گرفته شده‌اند و همچنین تاثیر مقادیر مختلف ویروس در انتقال بیماری مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش بعد، برخی مفاهیم اولیه مورد نیاز از منطق فازی آورده شده است. در بخش ۳ مدل مورد نظر برای مطالعه کرونا و همچنین مدل فازی نظیر آن ارائه شده است. در ادامه بخش ۴ به برخی ویژگی‌های مدل فازی از جمله عدد مولد عمومی و پایداری نقاط تعادل اختصاص یافته است. در انتها، در بخش ۵ شبیه‌سازی مدل انجام گردیده و بررسی نتایج شبیه‌سازی صورت گرفته است.

۲. تعاریف و مفاهیم مقدماتی

فرض کنیم که U یک مجموعه غیرتهی باشد. یک زیرمجموعه فازی F از U بر حسب یک تابع عضویت u تعریف می‌شود که به هر عضو x از U یک عدد $u(x)$ بین صفر و یک نسبت می‌دهد که درجه عضویت x در F نامیده می‌شود. بنابراین، زیرمجموعه فازی F با تابع عضویت $[0,1] \rightarrow u_F = U$

می‌شود که در واقع یک سیستم دینامیکی برای رفتار آن جمعیت است. محققان زیادی مطالعات مختلفی برای ساخت یک مدل و پیش‌بینی انتشار آن از ابتدای پاندمی انجام داده‌اند. اولین تحقیق [۲] در چین با روش GLM و مدل ریچارد انجام شده است. سپس در [۳] و [۷] با استفاده از مدل‌های آماری و مدل‌های توسعه‌یافته آنها در [۸]-[۱۱] پژوهش‌هایی در مورد کرونا انجام شده است. در [۱۲]-[۱۴] از مرتبه کسری در مدل اپیدمی استفاده شده است، همچنین در [۲۶] مدلی با عملگرهای فراکتال کسری ارائه گردیده است. در همه مدل‌های اپیدمی مذکور، اعداد غیرفازی بکار رفته‌اند در صورتی که اغلب اوقات ابهام در پارامترها و ناهمگونی در جمعیت وجود دارد، لذا استفاده از پارامترهای فازی خیلی مهم است. اخیراً محققان از منطق فازی در پژوهش‌های کاربردی در موضوعات مختلف استفاده کرده‌اند [۴]-[۶]. زیرا این مدل‌ها مسائل دنیای واقعی را نشان می‌دهند. مدل‌های اپیدمی فازی برای بیماری‌های انسان [۱۵]-[۱۷]، فضای پارامتری نادقیق و ناهمگونی جمعیت [۱۸]-[۱۹]، سیستم‌های دینامیک فازی [۲۰] و رفتار دینامیکی مدل اپیدمی فازی [۲۱] مواردی هستند که مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در [۲۰] تئوری منطق فازی برای یک مدل اپیدمی ساده SI فاقد تولد و مرگ اعمال شده است. ضریب انتقال به صورت فازی فرض شده و میانگین تعداد افراد عفونی مورد بحث قرار گرفته است. همچنین، عدد مولد عمومی فازی به دست آمده به منظور کنترل بیماری مورد بحث قرار گرفته است. یک مدل SIS با کنترل درمان در [۲۶] ارائه شده و رفتار دینامیکی آن مورد بررسی قرار گرفته است. سپس این مدل با در نظر گرفتن نرخ انتقال بیماری و تابع درمان به صورت اعداد فازی، اصلاح شده و امید ریاضی فازی افراد عفونی محاسبه گردیده است. به علاوه عدد مولد عمومی فازی محاسبه شده و یک شرط آستانه‌ای که در آن سیستم انشعاب شکستگی را نشان می‌دهد به دست آمده است. نویسندگان در [۱۵] یک مدل اپیدمی که هم نرخ انتقال بیماری و هم تابع درمان از نوع اشباع است را در نظر گرفتند. دستگاه ارائه شده با فرض نرخ انتقال بیماری و کنترل درمان به صورت اعداد فازی، بررسی شده و سپس امید ریاضی فازی

قدرت عفونت در هر فرد به عنوان تابعی از بار ویروس کرونا (η) در نظر می‌گیریم. لذا تعداد ویروس کرونای بیشتر در یک فرد، شانس انتقال ویروس را در یک تماس افزایش خواهد داد. بنابراین شکل فازی مدل (۲) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \kappa - \beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)SI - (\kappa + \tau + \pi)S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)SI \\ &\quad - (\kappa + \kappa^c(\eta) + \theta + \gamma(\eta))I, \end{aligned} \quad (3)$$

$\frac{dR}{dt} = (\theta + \gamma(\eta))I + (\pi + \tau)S - \kappa R$,
فرض کنید متغیر τ نشان‌دهنده اثربخشی واکسن و π سطح رعایت در اجرای پروتکل‌های بهداشتی است. اگر $\beta = \beta(\eta)$ شانس انتقال از فرد بیمار با بار ویروس η به شخص دیگر باشد تابع عضویت فازی آن به شکل زیر است:

$$\beta(\eta) = \begin{cases} 0 & \eta \leq \eta_{min} \\ \frac{(\eta - \eta_{min})(1-\tau)(1-\pi)}{(\eta_0 - \eta_{min})} & \eta_{min} < \eta < \eta_0 \\ \frac{1}{(1-\tau)(1-\pi)} & \eta_0 \leq \eta < \eta_{max} \end{cases} \quad (4)$$

یعنی اگر تعداد ویروس‌های کرونا در یک فرد نسبتاً کم باشد شانس انتقال بیماری قابل چشم‌پوشی است و η_{min} میزان حداقل ویروس لازم برای انتقال بیماری از یک شخص به سایر افراد است. همچنین η_0 مقدار خاصی از ویروس کرونا است که نرخ انتقال ماکزیمم و برابر یک است. در ضمن η_{max} مقدار کل ویروس کرونا است که می‌تواند در بدن یک شخص باشد. نرخ مرگ با بیماری کرونا را می‌توان به عنوان تابع عضویت یک عدد فازی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\kappa^c(\eta) = \begin{cases} ((1-\omega) - \kappa_0^c)(1-\theta) \frac{\eta}{\eta_0} + \kappa_0^c & 0 \leq \eta < \eta_0 \\ (1-\omega)(1-\theta) + \theta \kappa_0^c & \eta_0 \leq \eta \end{cases} \quad (5)$$

که در آن $0 < \kappa_0^c < 1$ پایین‌ترین نرخ مرگ با بیماری کوید و θ متغیر اثربخشی درمان است. اگر $\gamma = \gamma(\eta)$ نرخ بهبودی از کوید ۱۹، یک تابع نزولی از بار ویروس کرونا باشد، می‌توان اثربخشی درمان را روی نرخ بهبودی لحاظ کرد. لذا تابع عضویت فازی آن به شکل رابطه (۶) تعریف می‌شود.

مشخص می‌شود. اگر U مجموعه اعداد حقیقی باشد، F اعداد فازی نامیده می‌شود. به این ترتیب، زیرمجموعه A از U یک زیرمجموعه خاص است که برای آن تابع عضویت عبارت از تابع مشخصه A ، یعنی $\chi_A: U \rightarrow \{0,1\}$ است. برای به دست آوردن یک مقدار میانگین از تعداد افراد عفونی در لحظه t به عنوان نمایشی از یک مجموعه فازی به مفهوم اندازه فازی نیازمندیم.

تعریف ۲،۱. فرض کنیم Ω یک مجموعه ناتهی و $P(\Omega)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های آن باشد. تابع $\mu: P(\Omega) \rightarrow [0,1]$ یک اندازه فازی نامیده می‌شود اگر
(الف) $\mu(\Omega) = 1$ و $\mu(\emptyset) = 0$
(ب) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\mu(A) \leq \mu(B)$.

تعریف ۲،۲. امید ریاضی فازی زیرمجموعه فازی، که با $FEV[u]$ نمایش داده می‌شود و در واقع غیرفازی‌کننده مجموعه فازی u است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \inf \{ \alpha, \mu \{ x \in R : u(x) \geq \alpha \} \} \quad (1)$$

۳. یک مدل اپیدمی کرونا و نوع فازی آن

دستگاه معادلات (۲)، که شکل ریاضی مدل اپیدمی برای کرونا که دینامیک انتقال بیماری بین افراد را نشان می‌دهد، در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \kappa - \beta(1-\tau)(1-\pi)SI - (\kappa + \tau + \pi)S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta(1-\tau)(1-\pi)SI - (\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma)I, \\ \frac{dR}{dt} &= (\theta + \gamma)I + (\pi + \tau)S - \kappa R, \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن S نسبت افراد مستعد، I نسبت افراد بیمار، R نسبت افراد بهبود یافته، β متغیر نرخ بیماری، γ متغیر نرخ بهبودی، κ متغیر نرخ مرگ/تولد، π متغیر اثربخشی واکسن، θ متغیر اثربخشی درمان، τ متغیر اثربخشی رعایت پروتکل‌ها، κ^c متغیر نرخ مرگ با کرونا می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم افراد با مقادیر مختلف ویروس کرونا، نقش متفاوتی در انتشار کوید ۱۹ دارند. لذا مدل اپیدمی فازی زیر را معرفی می‌کنیم. در ضمن ناهمگونی مدل را با در نظر گرفتن

بنابراین I^* به صورت زیر به دست می آید:

$$I^* = \frac{\kappa}{\kappa + \kappa^c(\eta) + \theta + \gamma(\eta)} \frac{\kappa + \tau + \pi}{\beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)} \quad (16)$$

از طرفی با توجه به معادله (۹) داریم:

$$\bar{R} = \frac{(\theta + \gamma(\eta))\bar{I} + (\pi + \tau)\bar{S}}{\kappa} = R^* \quad (17)$$

پس نقطه تعادل شامل بیماری برای این مدل به صورت زیر حاصل می شود:

$$E^1 = (S^*, I^*, R^*) \quad (18)$$

حال عدد مولد پایه فازی، $R_0(\eta)$ را به دست می آوریم. برای این منظور، ابتدا معادله (۸) را به فرم $I' = G - W$ می نویسیم که داریم:

$$G = \beta(1-\tau)(1-\pi)SI, \quad (19)$$

$$W = (\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma)I$$

در نتیجه:

$$g = \frac{\partial G}{\partial I} \Big|_{E^0} = \beta(1-\tau)(1-\pi) \left(\frac{\kappa}{\kappa + \tau + \pi} \right), \quad (20)$$

$$w = \frac{\partial W}{\partial I} \Big|_{E^0} = \kappa + \kappa^c + \theta + \gamma$$

بنابراین عدد مولد عمومی که شعاع طیفی ماتریس gW^{-1} است، به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$R_0(\eta) = \frac{\rho(gW^{-1})}{\beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)\kappa} = \frac{\kappa}{(\kappa + \tau + \pi)(\kappa + \kappa^c(\eta) + \theta + \gamma(\eta))} \quad (21)$$

لم ۴، ۱: در مدل اپیدمی معرفی شده توسط دستگاه معادلات (۳)، اگر $R_0 \leq 1$ آنگاه مدل فقط دارای نقطه تعادل عاری از بیماری E^0 است و اگر $R_0 > 1$ آنگاه مدل دارای نقطه تعادل منحصر به فرد اندمیک E^* نیز می باشد.

اثبات: با توجه به رابطه (۱۰)، می توانیم I^* را به صورت رابطه زیر بنویسیم:

$$I^* = \frac{\kappa + \tau + \pi}{\beta(1-\tau)(1-\pi)} (R_0 - 1) \quad (22)$$

چون $I^* \neq 0$ لذا حالتی وجود دارد که $I^* > 0$ پس در این حالت داریم $R_0 > 1$. □

$$\gamma(\eta) = \begin{cases} (\gamma_0 - 1)(1 - \theta) \frac{\eta}{\eta_0} & 0 \leq \eta < \eta_0 \\ \gamma_0(1 - \theta) + \theta & \eta_0 \leq \eta \end{cases} \quad (6)$$

که در آن، γ_0 پایین ترین نرخ بهبودی است.

۴. عدد مولد پایه و تحلیل پایداری مدل فازی

در مدل اپیدمی فازی دو نقطه تعادل وجود دارد. برای تعیین آنها معادلات مدل (۳) را برابر صفر قرار می دهیم. آنگاه نقاط تعادل به صورت $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})$ تعیین می شوند.

$$\kappa - \beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)\bar{S}\bar{I} - (\kappa + \tau + \pi)\bar{S} = 0 \quad (7)$$

$$\beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)\bar{S}\bar{I} - (\kappa + \kappa^c(\eta) + \theta + \gamma(\eta))\bar{I} = 0 \quad (8)$$

$$(\theta + \gamma)\bar{I} + (\pi + \tau)\bar{S} - \kappa\bar{R} = 0 \quad (9)$$

در معادله (۸) دو حالت داریم: الف) $\bar{I} = 0$ ب) $\bar{I} \neq 0$ در حالت الف، با قراردادن $\bar{I} = 0$ در معادله (۷) داریم:

$$\kappa - (\kappa + \tau + \pi)\bar{S} = 0 \Rightarrow \bar{S} = \frac{\kappa}{\kappa + \tau + \pi} \quad (10)$$

همچنین بنابه معادله (۹) داریم:

$$(\pi + \tau)\bar{S} - \kappa\bar{R} = 0 \Rightarrow \bar{R} = \frac{\pi + \tau}{\kappa + \tau + \pi} \quad (11)$$

لذا نقطه تعادل در این حالت که به آن نقطه تعادل عاری از بیماری گویند، به صورت زیر به دست می آید:

$$E^0 = (S^0, I^0, R^0) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + \tau + \pi}, 0, \frac{\pi + \tau}{\kappa + \tau + \pi} \right) \quad (12)$$

در حالت ب، با توجه به معادله (۸) دستگاه داریم:

$$\beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)\bar{S} - (\kappa + \kappa^c(\eta) + \theta + \gamma(\eta))\bar{I} = 0 \quad (13)$$

با حل معادله (۱۳) داریم:

$$\bar{S} = \frac{\kappa + \kappa^c(\eta) + \theta + \gamma(\eta)}{\beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)} = S^* \quad (14)$$

با جایگذاری \bar{S} در معادله (۸) داریم:

$$\kappa - (\kappa + \kappa^c(\eta) + \theta + \gamma(\eta))\bar{I} = (\kappa + \tau + \pi) \left(\frac{\kappa + \kappa^c(\eta) + \theta + \gamma(\eta)}{\beta(\eta)(1-\tau)(1-\pi)} \right) \bar{I} \quad (15)$$

$$\beta(1-\tau)(1-\pi)S^* = \kappa + \kappa^c + \theta + \gamma \quad (29)$$

لذا

$$\det(J(E^1)) = -k(\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma)(\lambda I^*) \quad (30)$$

بنابراین

$$\det(J(E^1)) < 0 \quad (31)$$

در نتیجه دومین ماتریس مرکب جمعی برای ماتریس ژاکوبی $J(E^1)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$J^{[2]}(E^1) = \begin{pmatrix} -\alpha R_0 & 0 & 0 \\ \theta + \gamma & \alpha R_0 - \kappa & -(\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma) \\ -(\pi + \tau) & \alpha(R_0 - 1) & -\kappa \end{pmatrix} \quad (32)$$

که در آن $\alpha = \kappa + \tau + \pi$ است. برای محاسبه دترمینان آن با بسط نسبت به سطر اول داریم:

$$\det(J^{[2]}(E^1)) = -\alpha R_0[\kappa(\alpha R_0 + \kappa) + \alpha(R_0 - 1)(\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma)] \quad (33)$$

چون $R_0 > 1$ است، لذا

$$[\kappa(\alpha R_0 + \kappa) + \alpha(R_0 - 1)(\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma)] > 0 \quad (34)$$

در نتیجه

$$\det(J^{[2]}(E^1)) < 0 \quad (35)$$

لذا

$$\begin{aligned} tr(J(E^1)) &< 0, \\ \det(J(E^1)) &< 0, \\ \det(J^{[2]}(E^1)) &< 0 \end{aligned} \quad (36)$$

در نتیجه قسمت حقیقی تمامی مقادیر ویژه ماتریس $J(E^1)$ منفی هستند و در نتیجه ماتریس ژاکوبی پایدار است. بنابراین نقطه تعادل اندمیک پایدار موضعی مجانبی است. □

لم ۴،۴. اگر η^* جواب معادله زیر باشد:

$$\beta(\eta)\kappa(1-\tau)(1-\pi) = (\pi + \tau + \kappa)(\theta + \kappa^c(\eta) + \gamma(\eta) + \kappa) \quad (37)$$

قضیه ۴،۲. نقطه تعادل برای دستگاه معادلات (۳) در حالت عاری از بیماری به صورت موضعی مجانبی پایدار است هرگاه $R_0(\eta) < 1$ و ناپایدار است هرگاه $R_0(\eta) > 1$ باشد.

اثبات: ماتریس ژاکوبی دستگاه به صورت زیر است:

$$J(S, I, R) = \begin{pmatrix} -\lambda I - (\kappa + \tau + \pi) & -\lambda S & 0 \\ \lambda I & \lambda S - (\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma) & 0 \\ \pi + \tau & \theta + \gamma & -\kappa \end{pmatrix} \quad (23)$$

که $\lambda = \beta(1-\tau)(1-\pi)$ است. پس ماتریس ژاکوبی در نقطه E^0 به صورت زیر خواهد بود:

$$J(E^0) = \begin{pmatrix} -(\kappa + \tau + \pi) & -\lambda S^0 & 0 \\ 0 & \lambda S^0 - (\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma) & 0 \\ \pi + \tau & \theta + \gamma & -\kappa \end{pmatrix} \quad (24)$$

مقادیر ویژه این ماتریس عبارتند از:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(\kappa + \tau + \pi) \\ \lambda_2 &= \beta(1-\tau)(1-\pi)S^0 - (\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma) \\ \lambda_3 &= -\kappa \end{aligned} \quad (25)$$

که λ_1 و λ_3 همواره منفی هستند و $\lambda_2 < 0$ اگر فقط اگر

$$R_0 = \frac{\beta(1-\tau)(1-\pi)S^0}{\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma} < 1 \quad (26)$$

□

قضیه ۴،۳. اگر $R_0(\eta) > 1$ باشد، آنگاه نقطه تعادل اندمیک دستگاه معادلات (۷)–(۹) به صورت مجانبی موضعی پایدار است.

اثبات: چون $\beta(1-\tau)(1-\pi)S^* = \kappa + \kappa^c + \theta + \gamma$ است، لذا برای ماتریس ژاکوبی در نقطه E^1 داریم:

$$tr(J(E^1)) = -\beta(1-\tau)(1-\pi)I^* - (\kappa + \tau + \pi) - \kappa \quad (27)$$

با توجه به این که $R_0 > 1$ ، I^* وجود دارد و $I^* > 0$ است، لذا در این حالت $tr(J(E^1)) < 0$ است. حال، با بسط دترمینان ماتریس ژاکوبی نسبت به ستون سوم داریم:

$$\det(J(E^1)) = -k[(-\lambda I^* - (\kappa + \tau + \pi))(\lambda S^* - (\kappa + \kappa^c + \theta + \gamma)) + (\lambda S^*)(\lambda I^*)] \quad (28)$$

از طرفی داریم:

کرونا، شبیه‌سازی‌ها برای هر متغیر با مقادیر مختلف انجام شده است (جدول (۳)).

جدول (۳): مقادیر پارامترها و عدد مولد در مدل اپیدمیکی فازی

مرحله	β	η	η_0	η_{min}	θ	τ	π	R_0
۱	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۰	۰	۰	۹/۳۲
۲	۰/۹	۵۶	۱۰۰	۱۰	۰	۰	۰	۱
۳	۰/۹	۲۰	۱۰۰	۱۰	۰	۰	۰	۰/۱۳
۴	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۲۰٪	۰	۰	۲/۰۵
۵	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۴۷٪	۰	۰	۱
۶	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۸۵٪	۰	۰	۰/۵۸
۷	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۰	۲٪	۰	۲/۱۳
۸	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۰	۴/۵٪	۰	۱
۹	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۰	۱۰٪	۰	۰/۴۴
۱۰	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۰	۰	۰	۲/۱۳
۱۱	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۰	۰	۰	۱
۱۲	۰/۹	۱۰۰	۱۰۰	۱۰	۰	۰	۰	۰/۴۴

۶. تجزیه و تحلیل نتایج

با توجه به جدول (۳)، مشاهده می‌شود که اگر درمان، واکسیناسیون و اجرای پروتکل‌های بهداشتی انجام نگردد، عدد مولد پایه برابر ۹/۳۲ خواهد بود. یعنی این که یک شخص با بیماری کووید ۱۹ می‌تواند ۹ شخص دیگر را بیمار کند. در عین حال، اگر اثربخشی درمان بدون واکسیناسیون و بدون اجرای پروتکل‌های بهداشتی ۲۰ درصد باشد، می‌تواند تعداد اولیه تولید مثل را به ۲/۱۳ کاهش دهد، به طوری که فرد مبتلا به کرونا می‌تواند دو نفر دیگر را آلوده کند. اگر اثربخشی درمان به ۸۵ درصد برسد، آنگاه عدد مولد پایه برابر ۰/۵۸ خواهد بود، یعنی انتشار بیماری کنترل شده است. به علاوه اگر اثربخشی واکسیناسیون یا اجرای پروتکل‌های بهداشتی به بیشتر از ۱۰ درصد برسد، آنگاه عدد مولد پایه برابر ۰/۴۳ می‌شود، یعنی بیماری کووید دیگر در جمعیت وجود نخواهد داشت.

بر اساس نتایج جدول (۳)، اگر میزان ویروس کرونا برابر ۱۰۰ باشد، شیوع کووید ۱۹ در بین جمعیت هرگز از بین نمی‌رود و نرخ بهبودی تمایل به باقی ماندن دارد. در همین حال اگر میزان ویروس برابر ۵۰ باشد، آنگاه اپیدمیکی میل به کاهش دارد و اگر

از آنجا که نقطه تعادل عاری از بیماری پایدار است زمانی که $R_0(\eta) < 1$ و برای $R_0(\eta) > 1$ ناپایدار است، آنگاه دستگام معادلات (۷)–(۹) در $R_0(\eta) = 1$ دارای یک نقطه انشعاب است. یعنی جایی که تغییر وضعیت اتفاق می‌افتد. فرض کنید η^* مقدار انشعاب دستگام باشد آنگاه:

$$\eta^* = \frac{[\phi\eta_{min} + \eta_0\psi(\kappa_0^c + 1)]}{[\phi - \psi(1 - \zeta - \kappa_0^c)(1 - \theta) + (\gamma_0 - 1)(1 - \theta)]} \quad (38)$$

که در آن

$$\phi = \kappa((1 - \tau)(1 - \pi))^2 \eta_0 \quad (39)$$

$$\psi = (\eta_0 - \eta_{min})(\pi + \tau + \kappa)$$

نتیجه ۴،۵. تعادل عاری از بیماری دستگام (۷)–(۹) برای $\eta^* < \eta$ به طور مجانبی موضعی پایدار است.

نتیجه ۴،۶. تعادل اندمیک دستگام (۷)–(۹) برای $\eta^* > \eta$ به طور مجانبی موضعی پایدار است.

۵. نتایج عددی

مقادیر اولیه برای N ، S ، I و R (جدول (۱))، بر اساس مرجع [۲۱] انتخاب شده و سایر متغیرهای (جدول (۲) و (۳)) با توجه به توابع عضویت فازی تعریف شده برای آنها در بخش قبل محاسبه شده‌اند.

جدول (۱): مقادیر اولیه در مدل اپیدمیکی فازی

متغیر	مقدار
N	۲۶۹۶۰۰۰۰
S	۲۶۸۷۵۷۱۷۱
I	۴۵۷۷۳۵
R	۳۸۵۰۹۴

جدول (۲): مقادیر پارامترها در مدل اپیدمیکی فازی

متغیر	مقدار
κ_0^c	2.2114×10^{-4}
γ_0	1.042×10^{-3}
κ	6.25×10^{-3}

برای متغیرهای کنترلی اثربخشی واکسن، میزان اطاعت در اجرای پروتکل‌های بهداشتی، اثربخشی درمان و میزان ویروس

واکسیناسیون، اجرای پروتکل‌های بهداشتی و میزان ویروس کرونا ارائه شده است. متغیرهای β ، γ و κ^c به عنوان توابع عضویت توابع اعداد فازی معرفی شده‌اند، که وابسته به η میزان ویروس کرونا هستند. نقاط تعادل در حالت عاری از بیماری $(R_0(\eta) < 1)$ و اندمیک $(R_0(\eta) > 1)$ به طور مجانبی موضعی پایدار هستند. بر اساس نتایج شبیه‌سازی مشاهده شد که اجرای پروتکل‌های بهداشتی و واکسیناسیون تاثیر بسزایی در کاهش یا توقف انتشار بیماری کرونا در یک جمعیت دارند. اگرچه درمان نیز در کاهش یا توقف بیماری مهم است اما به اندازه رعایت پروتکل‌های بهداشتی یا واکسیناسیون تاثیرگذار نیست.

$\eta = 20$ ، کرونا در جمعیت از بین خواهد رفت. از طرفی اگر درمان فقط ۲ درصد موثر باشد، بیماری اندمیک خواهد شد و در صورتی که به ۴/۵ درصد افزایش یابد بیماری ناپدید می‌شود. همچنین اگر میزان پیروی جمعیت در اجرای پروتکل‌ها به میزان ۲ درصد باشد، بیماری در جمعیت اندمیک خواهد بود اما اگر به ۴/۵ درصد افزایش یابد بیماری از بین خواهد رفت. با توجه به شبیه‌سازی نتایج، برای π و τ برابر، واکسیناسیون و سطح رعایت پروتکل‌ها تاثیر یکسانی بر انتشار ویروس در جمعیت دارند. به هر حال، با توجه به نحوه جمع‌آوری نتایج، دقت و صحت آنها ممکن است نتایج مورد بررسی دچار تغییر شوند که این یکی از نقاط ضعف روش می‌باشد.

۷. نتیجه‌گیری

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافی ندارند.

در این مقاله، یک مدل اپیدمیک فازی ریاضی برای انتشار ویروس کووید ۱۹ در یک جمعیت با توجه به فاکتورهای درمان،

مراجع

- [1] M. Parsamanesh, M. Erfanian, and A. Akrami, "Modeling of the propagation of infectious diseases: mathematics and population," *Ebnesina*, vol. 22, no. 4, pp. 60-74, 2021, doi: 10.22034/22.4.60 [In Persian].
- [2] M. Parsamanesh and M. Erfanian, "Global dynamics of a mathematical model for propagation of infection diseases with saturated incidence rate," *J. Adv. Math. Model.*, vol. 11, no. 1, pp. 69-81, 2021, doi: 10.22055/jamm.2020.33801.1822 [In Persian].
- [3] A. Akrami and M. Parsamanesh, "Comparison of Fuzzy and Non-Fuzzy Base Generators in an Epidemic Model for Virus Spread in Computer Networks," *Fuzzy Syst. Appl.*, vol. 2, No. 2, pp. 109-122, 2019. doi: 20.1001.1.27174409.1398.2.2.5.5 [In Persian].
- [4] R. Akhoondi and R. Hosseini, "A Novel Fuzzy-Genetic Differential Evolutionary Algorithm for Optimization of a Fuzzy Expert Systems Applied to Heart Disease Prediction," *Soft Comput. J.*, vol. 6, no. 2, pp. 32-47, 2017, doi: 20.1001.1.23223707.1396.6.2.3.7 [In Persian].
- [5] H. Abbasi, M. Shamsi, and A. Rasuli Kenari, "Approaches of user activity detection and a new fuzzy logic-based method to determine the risk amount of user unusual activity in the smart home," *Soft Comput. J.*, vol. 9, no. 2, pp. 2-13, 2020 doi: 10.22052/scj.2021.242812.0 [In Persian].
- [6] H. Moradi Farahani, J. Asgari, and M. Zakeri, "A Surveying on Type-2 Fuzzy Logic: Its Genesis and Its Application," *Soft Comput. J.*, vol. 2, no. 1, pp. 22-43, 2013 [In Persian].
- [7] M. Parsamanesh, "The role of vaccination in controlling the outbreak of infectious diseases: a mathematical approach," *Vaccine Res.*, vol. 5, no. 1, pp. 32-40, 2018, doi: 10.29252/vacres.5.1.32.
- [8] D.L. Urso, "Coronavirus disease 2019 (COVID-19): a brief report," *Clin. Manag. Issues*, vol. 14, no. 1, pp. 15-19, 2020, doi:10.7175/cmi.v14i1.1467.
- [9] U.A. Leon, A. Perez, and E. Vales, "An SEIARD epidemic model for COVID-19 in Mexico: mathematical analysis and state-level forecast," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 140, pp. 110-165, 2020, doi:10.1016/j.chaos.2020.110165.
- [10] K. Roosa, Y. Lee, R. Luo, A. Kirpich, R. Rothenberg, J.M. Hyman, P. Yan, and G. Chowell, "Short-term forecasts of the COVID-19 epidemic in Guangdong and Zhejiang, China," *J. Clin. Forensic Med.*, vol. 9, no. 2, pp. 13-23, 2020, doi:10.3390.jcm9020596.

- [11] N. Nuraini, K. Khairuddin, and M. Apri, "Modeling simulation of COVID-19 in Indonesia based on early endemic data," *Commun. Biomath. Sci.*, vol. 3, no. 1, pp. 1–8, 2020, doi:10.5614/cbms.2020.3.1.1.
- [12] A.S. Ahmar and E.B. Val, "Sutte-ARIMA: short-term forecasting method, a case: Covid-19 and stock market in Spain," *Sci. Total Environ.*, vol. 729, pp. 13-38, 2020, doi:10.1016/j.scitotenv.2020.138883.
- [13] S. He, Y. Peng, and K. Sun, "SEIR modeling of the COVID-19 and its dynamics," *Nonlinear Dyn.*, vol. 101, pp. 1667–1680, 2020, doi: 10.1007/s11071-020-05743-y.
- [14] A. Godio, F. Pace, and A. Vergnano, "SEIR modeling of the Italian epidemic of SARS-CoV-2 using computational swarm intelligence," *Int. J. Environ. Res. Public Health*, vol. 17, no. 10, pp. 3535, 2020, doi: 10.3390/ijerph17103535.
- [15] A. Ajbar and R.T.Alqahtani, "Bifurcation analysis of a SEIR epidemic system with governmental action and individual reaction," *Adv. Differ. Equ.*, vol. 541, 2020, doi: 10.1186/s13662-020-02997-z.
- [16] S. Annas, M.I. Pratama, M. Rifandi, W. Sanusi, and S. Side, "Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 139, 2020, doi: 10.1016/j.chaos.2020.110072.
- [17] M. Awais, F.S. Alshammari, S. Ullah, M.A. Khan, and S. Islam, "Modeling and simulation of the novel coronavirus in Caputo derivative," *Results Phys.*, vol. 19, 2020, doi: 10.1016/j.rinp.2020.103588.
- [18] M.A. Khan and A. Atangana, "Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-nCov) with fractional derivative," *Alex. Eng. J.*, vol. 59, no. 4, pp. 2379–2389, 2020, doi: 10.1016/j.aej.2020.02.033.
- [19] M.A. Khan, A. Atangana, E. Alzahrani, and Fatmawati, "The dynamics of COVID-19 with quarantined and isolation," *Adv. Differ. Equ.*, vol. 425, 2020, doi: 10.1186/s13662-020-02882-9.
- [20] L.C. Barros, R.C. Bassanezi, and M.B.F. Leite, "The SI epidemiological models with a fuzzy transmission parameter," *Comput. Math. Appl.*, vol. 45, pp. 1619–1628, 2003, doi:10.1016/S0898-1221(03)00141-X.
- [21] R. Jafelice, L.C. Barros, R.C. Bassanezi, and F. Gomide, "Fuzzy modeling in symptomatic HIV virus infected population," *Bull. Math. Biol.*, vol. 66, pp. 1597–1620, 2004, doi: 10.1016/j.bulm.2004.03.002.
- [22] E. Massad, M.N. Burattini, and N.R.S. Ortega, "Fuzzy logic and measles vaccination: designing a control strategy," *Int. J. Epidemiol.*, vol. 28, pp. 550–557, 1999, doi: 10.1093/ije/28.3.550.
- [23] E. Massad, N.R.S. Ortega, L.C. Barros, and C.J. Struchiner, *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond, Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Springer, Berlin, 2008, doi: 10.1007/978-3-540-69094-8.
- [24] R. Verma and R.K. Tiwari, Dynamical behaviors of fuzzy SIR epidemic model. In: *Advances in Fuzzy Logic and Technology*, Springer, 2017, doi: 10.1007/978-3-319-66827-7_45.
- [25] E. Massad, N.R.S. Ortega, L.C. de Barros, and C.J. Struchiner, "Fuzzy Dynamical Systems in Epidemic Modeling," In: *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond. Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 232, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, doi: 10.1007/978-3-540-69094-8_9.
- [26] P.K. Mondal, S. Jana, P. Haldar, and T.K. Kar, "Dynamical behavior of an epidemic model in a fuzzy transmission," *Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst.*, vol. 23, no. 5, pp. 651–665, 2015, doi: 10.1142/S0218488515500282.