



دانشگاه کاشان
University of Kashan

مجله محاسبات نرم

SOFT COMPUTING JOURNAL

تارنمای مجله: scj.kashanu.ac.ir



یک الگوریتم عددی برای تعیین ضریب وابسته به زمان در یک مساله معکوس سهموی با استفاده از پایه موجک چندگانه لژاندر

حمیدرضا تبریزی دوز^{۱*}، استادیار، فاطمه حاجی‌رمضانعلی^۱، دانشجوی کارشناسی ارشد
^۱ گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.

چکیده

در این مقاله، توابع موجک چندگانه لژاندر را معرفی کرده و از آنها به عنوان یک مجموعه از توابع پایه‌ای برای تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل سهموی با ضریب مجهول وابسته به زمان در یک مساله معکوس، استفاده می‌کنیم. با استفاده از فرمول بسط یک تابع مفروض برحسب پایه موجک چندگانه لژاندر، به تعریف ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصلضرب از یک دیدگاه کلی می‌پردازیم. با کمک این ماتریس‌ها، مساله مورد نظر را به یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل می‌کنیم. با حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده توسط الگوریتم‌های بهینه‌سازی موجود، تقریبی برای جواب مساله به صورت بسط آن برحسب پایه موجک چندگانه لژاندر ارائه می‌نماییم. علاوه بر بیان الگوریتم روش عددی پیشنهاد شده، آن را بر روی دو مثال بررسی کرده و نتایج عددی آن را گزارش می‌کنیم. همچنین نتایج روش پیشنهاد شده را با نتایج گزارش شده از سایر روش‌ها مقایسه می‌کنیم.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۷ آذر ماه ۱۴۰۰

پذیرش ۲۶ مرداد ماه ۱۴۰۱

کلمات کلیدی:

موجک‌های چندگانه

چندجمله‌ای‌های لژاندر

ماتریس‌های عملیاتی

مسائل معکوس سهموی

پایه‌های متعامد

© ۱۴۰۱ - مجله محاسبات نرم، کلیه حقوق محفوظ است.

۱. مقدمه

موجک‌های چندگانه لژاندر^۲ معرفی شدند و در مرجع [۷] برای حل عددی معادلات انتگرال، مورد استفاده قرار گرفتند. از زمان پیدایش موجک‌های چندگانه لژاندر، کاربرد پایه متشکل از این نوع جدید موجک‌ها به منظور گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل، در نشریات مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است که به عنوان نمونه می‌توان به مراجع [۸-۱۱] اشاره کرد. دلیل موفق بودن موجک‌های چندگانه لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل را می‌توان در این دانست که این موجک‌ها بر اساس خاصیت‌هایی چون تعامد^۳، تقارن^۴، محمل فشرده^۵ و گشتاورهای

ایده استفاده از پایه‌های موجک^۱ برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل توسط محققین زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است [۱-۶]. علی‌رغم کاربردهای فراوان این پایه‌ها، عدم وجود فرمول بسته برای موجک‌ها باعث به وجود آمدن مشکلاتی جهت محاسبه آنها در نقاط خاص و همچنین محاسبه مشتق و انتگرال آنها شده است. در راستای برطرف کردن این معایب،

✦ نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

پست(های) الکترونیک: fhtabrizidooz@kashanu.ac.ir (تبریزی دوز)

fatemehhajiramezanali@yahoo.com (حاجی‌رمضانعلی)

^۱ Wavelet bases

² Legendre multiwavelets

³ Orthogonality

⁴ Symmetry

⁵ Compact support

توابعی به نام توابع آزمون^{۱۰}، صادق باشد. روش تاو یک نمونه از روش باقیمانده‌های وزن‌دار است که در آن توابع پایه‌ای و آزمون در شرایط مرزی مساله صادق نیستند [۱۶]. به‌عنوان مثال، در مرجع [۱۷] یک روش تاو با در نظر گرفتن چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به‌عنوان توابع پایه‌ای و آزمون، برای حل عددی معادله موج یک بعدی بکار رفته است.

در مقاله حاضر، پایه موجک چندگانه لژاندر را به‌عنوان مجموعه توابع پایه‌ای و آزمون در روش تاو، بکار برده‌ایم و همچنین مراحل ساخت ماتریس‌های عملیاتی^{۱۱} انتگرال و حاصل ضرب مربوط به این پایه را که برای گسسته‌سازی مساله مورد نیاز می‌باشند، بیان کرده‌ایم. لازم به ذکر است که ما برای تعریف ماتریس‌های عملیاتی انتگرال از یک دیدگاه کلی استفاده کرده‌ایم. در واقع، روش بیان شده در مقاله حاضر برای تعریف ماتریس‌های عملیاتی، تنها مختص به پایه موجک چندگانه لژاندر نبوده و برای هر پایه دیگری که در شرایط تعامد و یکه بودن صادق است، قابل اجرا است. توجه کنید که در مرجع [۹]، ساختار ماتریس عملیاتی انتگرال برای پایه موجک چندگانه لژاندر معرفی شده و استفاده از آن در افزایش کارایی و کاهش زمان محاسبه ماتریس عملیاتی انتگرال بسیار مؤثر است. همچنین در مراجع [۱۸-۱۹] ساختار ماتریس عملیاتی انتگرال برای پایه موجک چندگانه خطی لژاندر معرفی و مورد استفاده قرار گرفته است.

این مقاله به شرح زیر تنظیم شده است. بخش ۲، به مرور مراحل ساخت توابع مقیاس چندگانه لژاندر و موجک‌های چندگانه لژاندر می‌پردازد. بخش ۳، مفهوم ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل ضرب را برای پایه موجک چندگانه لژاندر و از یک دیدگاه کلی‌تر برای یک پایه متعامد و یکه توضیح می‌دهد. بخش ۴، با در نظر گرفتن پایه موجک لژاندر به‌عنوان مجموعه توابع پایه‌ای و آزمون در روش تاو، روش گسسته‌سازی و حل یک مساله معکوس سهموی را توضیح می‌دهد. در بخش ۵، الگوریتم روش پیشنهادی شرح داده می‌شود. در بخش ۶، نتایج

صفر با مرتبه بالا^۱ ساخته می‌شوند. توجه کنید که پایه متشکل از این نوع جدید موجک، چندجمله‌ای‌های لژاندر یکه شده را نیز شامل می‌شود و در واقع می‌توان آن را به‌عنوان تعمیمی از پایه چندجمله‌ای‌های لژاندر یکه شده در نظر گرفت.

با پیدایش رایانه‌های دیجیتال، الگوریتم‌ها در محاسبات مربوط به حل مسائل واقعی نقش بسزایی ایفا می‌کنند. الگوریتم‌ها در ابتدا برای حل مسائل مرتب‌سازی^۲ توسعه داده شدند، ولی امروزه مبنای فناوری‌هایی همچون یادگیری ماشین^۳، هوش مصنوعی^۴ و علم داده^۵ قرار گرفته‌اند [۱۲-۱۵]. در این مقاله، با استفاده از پایه موجک چندگانه لژاندر، به بیان الگوریتم یک روش عددی برای تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل سهموی^۶ با ضریب مجهول وابسته به زمان در یک مساله معکوس^۷ می‌پردازیم. برای این منظور، ابتدا بسط تابع جواب مساله را برحسب پایه موجک لژاندر و با ضرایب مجهول در نظر می‌گیریم و سپس با کمک ماتریس‌های عملیاتی به گسسته‌سازی مساله می‌پردازیم. بر این اساس، مساله به دستگامی متشکل از معادلات جبری غیرخطی برحسب ضرایب مجهول در بسط تابع تبدیل می‌شود. با حل دستگام به دست آمده و مشخص شدن ضرایب مجهول، بسط تابع جواب به‌عنوان تقریبی برای مساله معرفی می‌گردد.

روش حاضر را می‌توان در زمره روش باقیمانده‌های وزن‌دار^۸ و به طور خاص یک روش تاو^۹ دانست. در روش باقیمانده‌های وزن‌دار، بسط تابع جواب برحسب یک مجموعه از توابع پایه‌ای و با ضرایب مجهول در نظر گرفته می‌شود و در تعیین ضرایب مجهول تلاش می‌شود که بسط تابع جواب تا حد ممکن در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی داده شده، صدق کند. به عبارت معادل، ضرایب مجهول را به گونه‌ای به دست می‌آورند که باقیمانده حاصل از جایگذاری بسط تابع جواب در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی در شرایط تعامدی مناسبی برحسب

¹ High order of vanishing moments

² Sorting

³ Machine learning

⁴ Artificial intelligence

⁵ Data science

⁶ Parabolic differential equation

⁷ Inverse problem

⁸ Weighted residuals method

⁹ Tau method

¹⁰ Test functions

¹¹ Operational matrices

را معرفی می‌کنیم (توضیحات تکمیلی را در مراجع [۷، ۱۱، ۲۱] مشاهده کنید).

۲.۱. توابع مقیاس چندگانه لژاندر

توابع مقیاس چندگانه لژاندر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi^m(x) = \begin{cases} \sqrt{2m-1} P_{m-1}(2x-1), & x \in [0,1] \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (6)$$

$m = 1, 2, \dots$

در این صورت، بنا به رابطه (۴) این چندجمله‌ای‌ها بر روی بازه $[0,1]$ در خاصیت تعامد و یکه بودن زیر صادق‌اند:

$$\langle \phi^m, \phi^n \rangle = \int_0^1 \phi^m(x) \phi^n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (7)$$

اکنون فرض کنید $r > 1$ یک عدد صحیح و $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^r$ تابع اول از توابع مقیاس چندگانه لژاندر باشد. در این صورت، این r تابع یک پایه متعامد و یکه برای فضای

$$V_0 = \overline{\text{span}\{\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^r\}} \quad (8)$$

تشکیل می‌دهد. فرض کنید $\vec{\phi}$ بردار متشکل از این r تابع به صورت $\vec{\phi} = (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^r)^T$ باشد. برای هر عدد صحیح $z \geq 0$ و $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ فرض می‌کنیم

$$\vec{\phi}_{jk}(x) = (\phi_{jk}^1(x), \phi_{jk}^2(x), \dots, \phi_{jk}^r(x))^T, \quad (9)$$

بردار حاصل از اتساع‌ها^۸ و انتقال‌های^۹ توابع $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^r$ باشد، که در آن برای هر $m = 1, 2, \dots, r$

$$\phi_{jk}^m(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi^m(2^j x - k) \quad (10)$$

تابعی تعریف شده بر روی بازه $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ است. در این صورت، برای یک $z \geq 0$ ثابت، مجموعه تمام مؤلفه‌های بردار $\vec{\phi}_j(x) = (\vec{\phi}_{j0}^T(x), \vec{\phi}_{j1}^T(x), \dots, \vec{\phi}_{jL}^T(x))^T$ که در آن $L = 2^j - 1$ یک پایه متعامد و یکه برای فضای $2^j r$ -بعدی

$$V_j = \overline{\text{span}\{\vec{\phi}_{j0}^T, \vec{\phi}_{j1}^T, \dots, \vec{\phi}_{jL}^T\}} \quad (11)$$

⁸ Dilates
⁹ Translates

عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهاد شده بر روی دو مثال گزارش می‌گردد. سرانجام، در بخش ۷، نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲. موجک‌های چندگانه لژاندر

فرض کنید $L^2[0,1]$ فضای هیلبرت^۱ مجهز به ضرب داخلی^۲

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(x)v(x) dx, \quad u, v \in L^2[0,1] \quad (1)$$

و نرم

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in L^2[0,1] \quad (2)$$

باشد. چندجمله‌ای‌های لژاندر را با استفاده از فرمول رودریگس^۳ به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۲۰]:

$$P_0(x) := 1, \\ P_m(x) := \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} [(x^2 - 1)^m], \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

در این صورت، برای هر m یک چندجمله‌ای از درجه m است. برخی از ویژگی‌های این چندجمله‌ای‌ها بر روی بازه $[-1,1]$ عبارتند از:

• خاصیت تعامد

$$\langle P_m, P_n \rangle := \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1}, & m = n \end{cases} \quad (4)$$

• رابطه بازگشتی^۴

$$(m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)xP_m(x) - mP_{m-1}(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5)$$

در این بخش، ابتدا توابع مقیاس چندگانه لژاندر^۵ و سپس توابع موجک چندگانه لژاندر^۶ را تعریف می‌کنیم. همچنین با استفاده از توابع مقیاس چندگانه لژاندر، مفهوم تقریب تجزیه چندگانه^۷ $L^2[0,1]$ را توضیح می‌دهیم. در انتها پایه موجک چندگانه لژاندر

¹ Hilbert space
² Inner product
³ Rodrigues formula
⁴ Recurrence relation
⁵ Legendre multiscaling functions
⁶ Legendre multiwavelet functions
⁷ Multiresolution approximation

تشکیل می دهد. می توان تحقیق کرد که

(الف) برای هر $V_j \subseteq V_{j+1}$, $j \geq 0$

(ب) $\overline{\cup_{j \geq 0} V_j} = L^2[0,1]$

(ج) برای هر $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$, $j \geq 0$

خاصیت (ب) به این معنی است که برای هر $f(x) \in L^2[0,1]$

و هر $\varepsilon > 0$ دلخواه، یک عدد صحیح $J \geq 0$ و یک $p(x) \in V_J$

به صورت

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2^J-1} \sum_{m=1}^r d_{jk}^m \phi_{jk}^m(x), \quad (12)$$

وجود دارد به طوری که $\|f - p\| < \varepsilon$.

خانواده متشکل از فضاهای V_0, V_1, \dots تعریف شده در این

بخش را یک تقریب تجزیه چندگانه $L^2[0,1]$ با چندگانگی r

می نامند.

۲.۲. توابع موجک چندگانه لژاندر

همانطور که در بخش قبل دیدیم، $V_0 \subseteq V_1$ است. فرض می کنیم

W_0 متمم متعامد^۲ فضای V_0 در فضای V_1 باشد و می نویسیم

$V_1 = V_0 \oplus W_0$. در این بخش قصد داریم یک پایه متعامد و

یکه برای فضای r -بعدی W_0 به دست آوریم. فرض کنید r

تابع $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^r$ توابعی در فضای W_0 باشند. بنابراین، هر

کدام از این توابع بر فضای V_0 متعامد است و از آنجایی که

$W_0 \subseteq V_1$ ، برای هر $i = 1, 2, \dots, r$ می توان نوشت

$$\psi^i(x) = \sum_{m=1}^r q_{i,m} \phi^m(2x) + \sum_{m=1}^r q_{i,m+r} \phi^m(2x-1). \quad (13)$$

اکنون $2r$ ضریب مجهول $\{q_{i,m}\}$ و $\{q_{i,m+r}\}$ را به گونه ای تعیین

می کنیم که توابع $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^r$ یک پایه متعامد و یکه برای

فضای W_0 تشکیل دهد. برای انجام این کار از $2r^2$ شرط که در

ادامه بیان می شود، استفاده می کنیم.

• گشتاورهای صفر

$$\int_0^1 \psi^i(x) x^j dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (14)$$

$$j = 0, 1, \dots, r + i - 2$$

• خاصیت تعامد و یکه بودن^۳

$$\int_0^1 \psi^i(x) \psi^j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad (15)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, r.$$

با تعیین ضرایب مجهول $\{q_{i,m}\}$ و $\{q_{i,m+r}\}$ ، توابع ψ^1, ψ^2, \dots

به عنوان یک پایه متعامد و یکه برای فضای W_0 به دست

می آیند. این r تابع را توابع موجک چندگانه لژاندر می نامند.

راه جایگزین دیگر برای ساخت توابع موجک چندگانه لژاندر

استفاده از فرآیند گرام-اشمیت^۴ به شرح زیر است.

برای $m = 1, 2, \dots, r$ ، به صورت استقرایی تعریف می کنیم:

$$y^m = \phi_{10}^m - \sum_{i=1}^r \langle \phi_{10}^m, \phi^i \rangle \phi^i - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \phi_{10}^m, \psi^i \rangle \psi^i, \quad (16)$$

$$\psi^m = \frac{y^m}{\|y^m\|}.$$

برای نمونه، هنگامی که $r = 3$ می باشد، با استفاده از رابطه (۵)،

چندجمله ای های لژاندر به صورت

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x, \quad (17)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

به دست می آیند. همچنین، با استفاده از رابطه (۶)، توابع مقیاس

چندگانه لژاندر بر روی بازه $[0,1]$ به صورت

$$\phi^1(x) = 1,$$

$$\phi^2(x) = \sqrt{3}(2x - 1), \quad (18)$$

$$\phi^3(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1),$$

تعریف می شوند. با استفاده از فرآیند گرام-اشمیت، توابع موجک

چندگانه لژاندر برای حالت $r = 3$ ، به شکل رابطه (۱۹) ساخته

می شوند.

³ Orthonormality condition

⁴ Gram-Schmidt process

¹ Multiplicity

² Orthogonal complement

یک پایه متعامد و یکه (علاوه بر پایه متشکل از تمام مؤلفه‌های بردار $(\Phi_j(x))$ برای فضای $2^j r$ -بعدی V_j تشکیل می‌دهد. علاوه بر این، از آنجایی که خانواده متشکل از فضاها V_0, V_1, \dots یک تقریب تجزیه چندگانه $L^2[0,1]$ است، بنا به خاصیت (ب)،

$$\{\phi^m, \psi_{jk}^m, m = 1, 2, \dots, r, j = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\} \quad (26)$$

یک پایه متعامد و یکه برای $L^2[0,1]$ تشکیل می‌دهد. این پایه را پایه موجک چندگانه لژاندر برای $L^2[0,1]$ می‌نامند. بنابراین، برای هر $f(x) \in L^2[0,1]$ می‌توان نوشت

$$f(x) = \sum_{m=1}^r c_m \phi^m(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{m=1}^r c_{jk}^m \psi_{jk}^m(x). \quad (27)$$

که در آن برای هر $m = 1, \dots, r$ و $j = 0, 1, \dots$ همچنین برای هر $k = 0, 1, \dots$

$$c_m = \langle f, \phi^m \rangle = \int_0^1 f(x) \phi^m(x) dx, \quad (28)$$

$$c_{jk}^m = \langle f, \psi_{jk}^m \rangle = \int_0^1 f(x) \psi_{jk}^m(x) dx.$$

همچنین، تصویر $f(x)$ در فضای V_j را به صورت

$$\begin{aligned} (\Pi_j f)(x) &= \sum_{m=1}^r c_m \phi^m(x) \\ &+ \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{m=1}^r c_{jk}^m \psi_{jk}^m(x) \\ &= C^T \Psi_j(x) \end{aligned} \quad (29)$$

می‌نویسیم، که در آن با قرار دادن $l = 2^{J-1} - 1$

$$C = (c_1, \dots, c_r, c_{00}^1, \dots, c_{00}^r, c_{10}^1, \dots, c_{10}^r, \dots, c_{n-1,0}^1, \dots, c_{n-1,0}^r)^T. \quad (30)$$

از آنجایی که برای هر $m = 1, 2, \dots, r-1$ گشتاور اول ψ^m برابر صفر است (یعنی، برای هر $i = 0, 1, \dots, r-1$ داریم $\int_0^1 \psi^m(x) x^i dx = 0$ در این صورت برای تابع مفروض $f(x) \in C^r[0,1]$ می‌توان ثابت کرد:

$$\|f - \Pi_j f\| \leq \frac{c}{2^r j} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(r)}(x)|. \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \psi^1(x) &= \begin{cases} 6x - 1, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 6x - 5, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ \psi^2(x) &= \begin{cases} \sqrt{3}(30x^2 - 14x + 1), & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \sqrt{3}(30x^2 - 46x + 17), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ \psi^3(x) &= \begin{cases} \sqrt{5}(24x^2 - 12x + 1), & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\sqrt{5}(24x^2 - 36x + 13), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

۲.۳. پایه موجک چندگانه لژاندر

فرض کنید $\vec{\psi}$ بردار متشکل از توابع موجک چندگانه لژاندر به صورت $\vec{\psi} = (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^r)^T$ باشد. برای هر عدد صحیح $z \geq 0$ و $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ فرض می‌کنیم

$$\vec{\psi}_{jk}(x) = (\psi_{jk}^1(x), \psi_{jk}^2(x), \dots, \psi_{jk}^r(x))^T, \quad (20)$$

بردار حاصل از اتساع‌ها و انتقال‌های توابع $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^r$ باشد، که در آن برای هر $m = 1, 2, \dots, r$

$$\psi_{jk}^m(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi^m(2^j x - k) \quad (21)$$

تابعی تعریف شده بر بازه $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ است. برای هر عدد صحیح $z, j \geq 0$ قرار می‌دهیم $l = 2^j - 1$

$$\vec{\psi}_j^T(x) = (\vec{\psi}_{j0}^T(x), \vec{\psi}_{j1}^T(x), \dots, \vec{\psi}_{jl}^T(x))^T \quad (22)$$

و تعریف می‌کنیم

$$W_j = \overline{\text{span} \{\vec{\psi}_{j0}^T, \vec{\psi}_{j1}^T, \dots, \vec{\psi}_{jl}^T\}}. \quad (23)$$

در این صورت، برای هر $z, j \geq 0$ فضای W_j متمم متعامد فضای V_j در فضای V_{j+1} است؛ یعنی، $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. اکنون برای عدد صحیح $J \geq 1$ با استقرای ریاضی، داریم:

$$\begin{aligned} V_j &= V_{j-1} \oplus W_{j-1} \\ &= V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \\ &= \dots \\ &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{j-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

بنابراین، مجموعه تمام مؤلفه‌های بردار

$$\Psi_j(x) = (\vec{\phi}^T(x), \vec{\psi}^T(x), \vec{\psi}_1^T(x), \dots, \vec{\psi}_{j-1}^T(x))^T, \quad (25)$$

۳. ماتریس‌های عملیاتی

$$(\Pi_J u_i)(x) = \sum_{i'=1}^n P_{ii'} B_{i',j}(x), \quad (36)$$

که در این رابطه برای هر $i, i' = 1, 2, \dots, n$ را برابر با $\int_0^1 u_i(x) B_{i',j}(x) dx$ قرار داده‌ایم.

اگر بخواهیم روابط بالا را به‌طور فشرده بیان کنیم، می‌توان گفت $\int_0^x \Psi_j(x') dx'$ را می‌توان به صورت $P \Psi_j(x)$ برحسب پایه موجک چندگانه لژاندر بسط داد که در آن P یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های $P_{ii'}, i, i' = 1, 2, \dots, n$ است. ماتریس P را ماتریس عملیاتی انتگرال برای پایه موجک چندگانه لژاندر $\{B_{1,j}(x), B_{2,j}(x), \dots, B_{n,j}(x)\}$ می‌نامیم.

۳.۲. ماتریس عملیاتی حاصل ضرب

فرض کنید A بردار n تایی با مؤلفه‌های a_1, a_2, \dots, a_n است. برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ قرار می‌دهیم

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^n a_j B_{j,j}(x) B_{i,j}(x). \quad (37)$$

در این صورت، می‌توان نوشت

$$\Psi_j(x) \Psi_j^T(x) A = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x))^T. \quad (38)$$

با بسط دادن $B_{i,j}(x) B_{j,j}(x)$ ، $i, j = 1, 2, \dots, n$ برحسب پایه موجک چندگانه لژاندر می‌نویسیم

$$\Pi_j(B_{i,j} B_{j,j})(x) = \sum_{i'=1}^n d_{i',j}^{i,j} B_{i',j}(x), \quad (39)$$

که در این رابطه برای هر $i', i = 1, 2, \dots, n$ را برابر با $\int_0^1 B_{i,j}(x) B_{j,j}(x) B_{i',j}(x) dx$ قرار داده‌ایم.

بنابراین، برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$\begin{aligned} \Pi_j(v_i)(x) &= \sum_{j=1}^n a_j \sum_{i'=1}^n d_{i',j}^{i,j} B_{i',j}(x) \\ &= \sum_{i'=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j d_{i',j}^{i,j} \right) B_{i',j}(x). \end{aligned} \quad (40)$$

اگر بخواهیم روابط بالا را به‌طور فشرده بیان کنیم، می‌توان گفت بسط $\Psi_j(x) \Psi_j^T(x) A$ برحسب پایه موجک چندگانه لژاندر $\{B_{1,j}(x), B_{2,j}(x), \dots, B_{n,j}(x)\}$ را می‌توان به صورت

همانطور که در بخش ۲ ملاحظه کردیم، برای هر عدد صحیح $J \geq 1$ مجموعه تمام مؤلفه‌های بردار $\Psi_j(x)$ یک پایه متعامد و یک فضای $2^J r$ -بعدی V_J تشکیل می‌دهد. از این به بعد برای سادگی در نمادگذاری، $n = 2^J r$ قرار داده و می‌نویسیم:

$$\Psi_j(x) = (B_{1,j}(x), B_{2,j}(x), \dots, B_{n,j}(x))^T. \quad (32)$$

بنابراین $\{B_{1,j}(x), B_{2,j}(x), \dots, B_{n,j}(x)\}$ مجموعه تمام مؤلفه‌های بردار $\Psi_j(x)$ است و یک پایه متعامد و یک فضای n -بعدی V_J تشکیل می‌دهد. با این نمادگذاری، برای هر $f(x) \in L^2[0,1]$ تصویر $f(x)$ در فضای V_J را به صورت

$$(\Pi_J f)(x) = \sum_{i=1}^n f_i B_{i,j}(x) = C^T \Psi_j(x) \quad (33)$$

می‌نویسیم و آن را بسط تابع $f(x)$ برحسب پایه موجک چندگانه لژاندر $\{B_{1,j}(x), B_{2,j}(x), \dots, B_{n,j}(x)\}$ می‌نامیم. در اینجا، C یک بردار n تایی با مؤلفه‌های f_1, f_2, \dots, f_n است و برای هر $i = 1, 2, \dots, n$

$$f_i = \langle f, B_{i,j} \rangle = \int_0^1 f(x) B_{i,j}(x) dx. \quad (34)$$

در ادامه این بخش، به تعریف ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل ضرب برای پایه موجک چندگانه لژاندر می‌پردازیم. لازم به ذکر است که روش‌های بیان شده در این بخش تنها مختص به پایه موجک چندگانه لژاندر نیستند و برای هر پایه دیگری که در شرایط متعامد و یک بودن صادق باشند، نیز قابل اجرا هستند.

۳.۱. ماتریس عملیاتی انتگرال

برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ قرار می‌دهیم $u_i = \int_0^x B_{i,j}(x') dx'$ بنابراین، می‌توان نوشت

$$\int_0^x \Psi_j(x') dx' = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x))^T. \quad (35)$$

با بسط $u_i(x)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ برحسب پایه موجک چندگانه لژاندر $\{B_{1,j}(x), B_{2,j}(x), \dots, B_{n,j}(x)\}$ می‌نویسیم

پایه موجک چندگانه لژاندر به عنوان مجموعه توابع پایه‌ای و آزمون در روش تاو و با کمک ماتریس‌های عملیاتی مربوط به آن، مساله (۴۱)–(۴۵)، را به یک دستگاه متشکل از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌کنیم. در این صورت، با حل دستگاه به دست آمده، به تقریب‌هایی برای تابع‌های $u(x, t)$ و $a(t)$ دست می‌یابیم.

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۴۱) نسبت به متغیر t در بازه $[0, t]$ و با استفاده از شرط (۴۲)، به دست می‌آوریم

$$u(x, t) = \int_0^t a(t') u_{xx}(x, t') dt' + f(x). \quad (46)$$

اکنون تابع مجهول $u_{xx}(x, t)$ را نسبت به متغیرهای x و t برحسب موجک‌های چندگانه لژاندر بسط می‌دهیم

$$u_{xx}(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n u_{ii'} B_{i,j}(x) B_{i',j}(t) = \Psi_j^T(x) U \Psi_j(t), \quad (47)$$

که در آن U یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های مجهول $u_{ii'}$ است. با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۴۷) نسبت به متغیر x در بازه $[0, x]$ و با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال P به دست می‌آوریم

$$u_x(x, t) = \Psi_j^T(x) P^T U \Psi_j(t) + \Psi_j^T(x) V \Psi_j(t), \quad (48)$$

که در آن V یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های مجهول v_1, \dots, v_n واقع بر روی سطر اول و با مؤلفه‌های صفر واقع بر روی بقیه سطرها است. در واقع برای به دست آوردن رابطه (۴۸) تابع مجهول $u_x(0, t)$ را برحسب موجک‌های چندگانه لژاندر بسط داده و نوشته‌ایم

$$u_x(0, t) = \sum_{i=1}^n v_i B_{i,j}(t) = \Psi_j^T(x) V \Psi_j(t). \quad (49)$$

دوباره با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۴۸) نسبت به متغیر x در بازه $[0, x]$ و با استفاده از شرط (۴۳) و ماتریس عملیاتی انتگرال P ، به دست می‌آوریم

$$u(x, t) = \Psi_j^T(x) (P^2)^T U \Psi_j(t) + \Psi_j^T(x) P^T V \Psi_j(t) + g(t). \quad (50)$$

اکنون بسط توابع $f(x)$ را نسبت به متغیر x و بسط توابع $g(t)$

نوشت که در آن \hat{A} یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های $a_j d_{i,j}' = \sum_{j=1}^n a_j d_{i,j}'$ ، $i, i' = 1, 2, \dots, n$ است. ماتریس \hat{A} را ماتریس عملیاتی حاصل ضرب متناظر با بردار A برای پایه $\{B_{1,j}(x), B_{2,j}(x), \dots, B_{n,j}(x)\}$ می‌نامیم.

۴. روش عددی برای حل یک مساله معکوس

در این بخش به بیان یک مساله و روش حل آن با استفاده از موجک‌های چندگانه لژاندر می‌پردازیم. مساله عبارت است از یافتن تابع توزیع گرما $u(x, t)$ و همچنین ضریب گرمایی $a(t)$ به طوری که هر دو به طور همزمان در معادله دیفرانسیل سهموی

$$u_t(x, t) = a(t) u_{xx}(x, t), \quad (41)$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$$

همراه با شرایط

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (42)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (43)$$

$$u(1, t) = h(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (44)$$

$$u(x^*, t) = e(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (45)$$

صادق باشند. مساله بالا را یک مساله معکوس سهموی گویند. در اینجا تابع‌های $f(x)$ ، $g(t)$ ، $h(t)$ و $e(t)$ معلوم و تابع‌های $u(x, t)$ و $a(t)$ مجهول‌اند؛ همچنین x^* مقدار ثابتی در بین 0 و 1 است. توجه کنید برای اینکه یک زوج جواب یکتای (u, a) برای رابطه (۴۱) وجود داشته باشد، علاوه بر شرایط اولیه و مرزی (۴۲)–(۴۴)، به شرط اضافی (۴۵) نیز احتیاج داریم. بررسی وجود و یکتایی جواب برای مساله (۴۱)–(۴۵)، موضوع مراجع [۲۲–۲۳] بوده است. از طرف دیگر، حل عددی مساله (۴۱)–(۴۵) توسط مولفین بسیاری مورد بحث قرار گرفته است [۲۴–۲۸]. به عنوان نمونه، در مرجع [۲۴] یک روش شبه طیفی لژاندر و در مرجع [۲۷] یک روش عددی مبتنی بر روش تاو برای حل مساله (۴۱)–(۴۵) مورد بررسی قرار گرفته است.

در این بخش، کاربرد موجک‌های چندگانه لژاندر را برای تقریب جواب مساله (۴۱)–(۴۵) توضیح می‌دهیم. در واقع با استفاده از

که در آن \hat{A} ماتریس عملیاتی حاصل ضرب متناظر با بردار A است. با جایگذاری روابط (۵۷)، (۵۱) و (۵۹) در (۴۶) و با

استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال P به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Psi_J^T(x)((P^2)^T U + P^T V + G)\Psi_J(t) \\ = \Psi_J^T(x)U\hat{A}P\Psi_J(t) \\ + \Psi_J^T(x)F\Psi_J(t). \end{aligned} \quad (60)$$

بنابراین، با ضرب کردن طرفین رابطه (۶۰) از سمت راست در مؤلفه‌های بردار $\Psi_J(t)$ و از سمت چپ در مؤلفه‌های بردار $\Psi_J(x)$ و انتگرال‌گیری روی بازه $[0,1]$ به دستگاه زیر که از n^2 معادله جبری غیرخطی تشکیل شده است، دست می‌یابیم

$$(P^2)^T U + P^T V + G = U\hat{A}P + F. \quad (61)$$

از آنجایی که n^2 مؤلفه ماتریس U ، n مؤلفه ماتریس V و n مؤلفه بردار A یعنی، $u_{i'}$ برای $i, i' = 1, \dots, n$ و v_1, \dots, v_n و a_1, \dots, a_n مجهولند، بنابراین علاوه بر n^2 معادله جبری به دست آمده در رابطه (۶۱) به $2n$ معادله جبری دیگر احتیاج داریم. اما از شرایط (۴۴) و (۴۵) هنوز استفاده نکرده‌ایم. با جایگذاری روابط (۵۷)، (۵۳) و (۵۴) در شرایط (۴۴) و (۴۵)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \Psi_J^T(1)((P^2)^T U + P^T V + G)\Psi_J(t) \\ = \Psi_J^T(1)H\Psi_J(t), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \Psi_J^T(x^*)((P^2)^T U + P^T V + G)\Psi_J(t) \\ = \Psi_J^T(x^*)E\Psi_J(t). \end{aligned}$$

با ضرب کردن طرفین رابطه‌های بالا در مؤلفه‌های بردار $\Psi_J(t)$ و انتگرال‌گیری نسبت به متغیر t روی بازه $[0,1]$ ، $2n$ معادله مورد نیاز به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\Psi_J^T(1)((P^2)^T U + P^T V + G) = \Psi_J^T(1)H, \quad (63)$$

$$\Psi_J^T(x^*)((P^2)^T U + P^T V + G) = \Psi_J^T(x^*)E. \quad (64)$$

معادلات (۶۱)–(۶۴) یک دستگاه از $n^2 + 2n$ معادله جبری بر حسب $n^2 + 2n$ مجهول u_{ij} برای $i, j = 1, \dots, n$ و v_1, \dots, v_n و a_1, \dots, a_n است. با حل این دستگاه از معادلات جبری، جواب‌های تقریبی برای $u(x, t)$ و $a(t)$ با استفاده از روابط (۵۷) و (۵۸) به دست می‌آیند.

$h(t)$ و $e(t)$ را نسبت به متغیر t برحسب موجک‌های چندگانه لژاندر می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i B_{i,J}(x) = \Psi_J^T(x)F\Psi_J(t), \quad (51)$$

$$g(t) = \sum_{i=1}^n g_i B_{i,J}(t) = \Psi_J^T(x)G\Psi_J(t), \quad (52)$$

$$h(t) = \sum_{i=1}^n h_i B_{i,J}(t) = \Psi_J^T(x)H\Psi_J(t), \quad (53)$$

$$e(t) = \sum_{i=1}^n e_i B_{i,J}(t) = \Psi_J^T(x)E\Psi_J(t). \quad (54)$$

در اینجا F یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های معلوم f_1, \dots, f_n واقع بر روی ستون اول و با مؤلفه‌های صفر واقع بر بقیه ستون‌ها است؛ که در آن، برای هر $i = 1, \dots, n$

$$f_i = \langle f, B_{i,J} \rangle = \int_0^1 f(x)B_{i,J}(x) dx. \quad (55)$$

همچنین G یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های معلوم g_1, \dots, g_n واقع بر روی سطر اول و یا مؤلفه‌های صفر واقع بر روی بقیه سطرها است؛ که در آن، برای هر $i = 1, \dots, n$

$$g_i = \langle g, B_{i,J} \rangle = \int_0^1 g(t)B_{i,J}(t) dt. \quad (56)$$

ماتریس‌های H و E همانند G به ترتیب متناظر با توابع $h(t)$ و $e(t)$ به دست می‌آیند. سپس با جایگذاری رابطه (۵۲) در (۵۰) به دست می‌آوریم

$$u(x, t) = \Psi_J^T(x)((P^2)^T U + P^T V + G)\Psi_J(t). \quad (57)$$

اکنون تابع مجهول $a(t)$ را برحسب موجک‌های چندگانه لژاندر بسط می‌دهیم

$$a(t) = \sum_{i=1}^n a_i B_{i,J}(t) = A^T \Psi_J(t), \quad (58)$$

که در آن A یک بردار $n \times 1$ با مؤلفه‌های مجهول a_1, \dots, a_n است. با استفاده از رابطه‌های (۴۷) و (۵۸) و ماتریس عملیاتی حاصل ضرب، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a(t)u_{xx}(x, t) &= \Psi_J^T(x)U\Psi_J(t)\Psi_J^T(t)A \\ &= \Psi_J^T(x)U\hat{A}\Psi_J(t), \end{aligned} \quad (59)$$

کنید که حالت $r = 2$ مربوط به پایه موجک چندگانه لژاندر خطی است، حالت $r = 3$ مربوط به پایه موجک چندگانه لژاندر درجه دو است، حالت $r = 4$ مربوط به پایه موجک چندگانه لژاندر درجه سه است و الی آخر).

مرحله دوم: قرار دهید $n = 2^J r$ و پایه متعامد یکه زیر را مطابق مطالب بخش ۲ تعریف کنید.

$$\Psi_J(x) = (B_{1,J}(x), B_{2,J}(x), \dots, B_{n,J}(x))^T. \quad (۶۵)$$

مرحله سوم (تعریف ورودی‌های مساله): توابع $f(t), g(t), h(t)$ و $e(t)$ را همانگونه که در مساله معکوس سهموی (۴۱) - (۴۵) مشخص شده‌اند، وارد کنید و ماتریس‌های F, G, H و E را به‌عنوان ماتریس‌های $n \times n$ و مطابق با معادلات (۵۱) - (۵۴) تعریف کنید.

مرحله چهارم (تعریف مقادیر مجهول مساله):

الف) ماتریس U را به‌عنوان یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های مجهول $u_{ii'}$ برای $i, i' = 1, \dots, n$ ، تعریف کنید؛

ب) ماتریس V را به‌عنوان یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های مجهول v_1, \dots, v_n واقع بر روی سطر اول و مؤلفه‌های صفر واقع بر روی بقیه سطرها، تعریف کنید؛

ج) بردار A را به‌عنوان یک بردار $n \times 1$ با مؤلفه‌های مجهول a_1, \dots, a_n تعریف کنید.

مرحله پنجم (ساخت ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل ضرب):

الف) ماتریس عملیاتی انتگرال: ماتریس P را به‌عنوان یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های

$$P_{ii'} = \int_0^1 u_i(x) B_{i',J}(x) dx, \quad (۶۶)$$

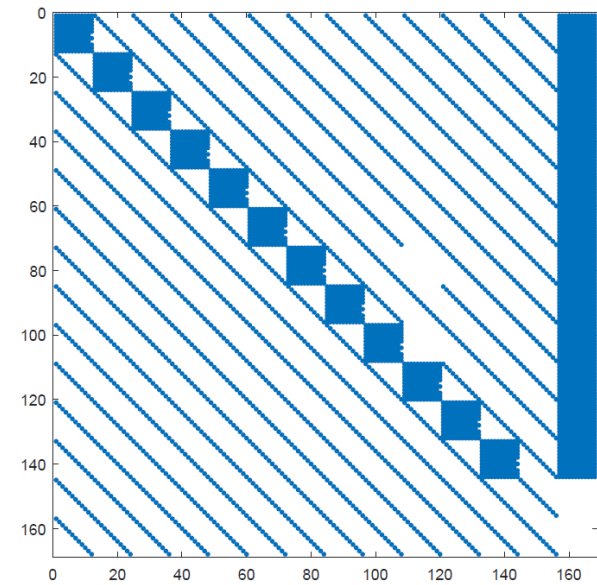
$$i, i' = 1, 2, \dots, n$$

تعریف کنید، که در آن

$$u_i(x) = \int_0^x B_{i,J}(x') dx', \quad i = 1, \dots, n. \quad (۶۷)$$

ب) ماتریس عملیاتی حاصل ضرب: ماتریس \hat{A} را به‌عنوان یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های

دستگاه معادلات غیرخطی (۶۱) - (۶۴) را می‌توان با کمک روش‌هایی همانند روش نیوتن^۱ حل کرد. برای سرعت بخشیدن به اجرای الگوریتم‌های موجود مبتنی بر این روش‌ها، به‌طور معمول ماتریس ژاکوبی^۲ متناظر با دستگاه معادلات غیرخطی مورد نظر را تهیه و به‌عنوان ورودی در اختیار این الگوریتم‌ها قرار می‌دهند. بر این اساس، ما ماتریس ژاکوبی متناظر با دستگاه معادلات غیرخطی (۶۱) - (۶۴) را تهیه کردیم. در شکل (۱)، ساختار تنک بودن^۳ ماتریس ژاکوبی متناظر با دستگاه معادلات غیرخطی (۶۱) - (۶۴) را به ازای $r = 3$ و $J = 2$ نشان داده‌ایم. ملاحظه می‌شود که در این حالت ماتریس ژاکوبی یک ماتریس با بعد 168×168 و دارای ساختار تنک است. لازم به ذکر است که ساختار تنک بودن ماتریس ژاکوبی در کاهش زمان محاسبات در هر تکرار روش نیوتن، بسیار مفید است.



۵. الگوریتم روش پیشنهاد شده

در این بخش، الگوریتم روش عددی پیشنهاد شده در بخش ۴ را شرح می‌دهیم.

مرحله اول: مقادیر صحیح $J \geq 1$ و $r \geq 2$ را وارد کنید (توجه

¹ Newton method

² Jacobian matrix

³ Sparseness matrix

۶. مثال‌های عددی

در این بخش، روش پیشنهاد شده در بخش ۴ را روی دو مثال انجام داده و نتایج عددی آن را گزارش می‌کنیم. لازم به ذکر است که برای مدل‌سازی مثال‌ها از نرم‌افزار متلب^۱ استفاده شده است. همچنین برای حل دستگاه‌های معادلات جبری غیرخطی به دست آمده، دستور fsolve را بکار برده‌ایم.

مثال ۶،۱. مساله (۴۱)–(۴۵) را در نظر می‌گیریم که در آن $x^* = 0.3$

$$f(x) = \cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad (70)$$

$$g(t) = h(t) = 0,$$

$$e(t) = e^{-t^2} \cos(0.2\pi).$$

جواب دقیق مساله در این مثال عبارت است از [۲۴]:

$$u(x, t) = e^{-t^2} \cos\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right), \quad (71)$$

$$a(t) = \frac{2}{\pi^2 t}.$$

مثال ۶،۲. مساله (۴۱)–(۴۵) را در نظر می‌گیریم که در آن $x^* = 0.25$

$$f(x) = 2e^x, g(t) = 1 + \frac{1 + 2t^3}{1 + t^3}, \quad (72)$$

$$h(t) = e + \frac{e(1 + 2t^3)}{1 + t^3},$$

$$e(t) = e^{\frac{1}{4}} + \frac{e^{\frac{1}{4}}(1 + 2t^3)}{1 + t^3}.$$

جواب دقیق مساله برای این مثال عبارت است از [۲۴]:

$$u(x, t) = e^x + \frac{e^x(1 + 2t^3)}{1 + t^3}, \quad (73)$$

$$a(t) = \frac{3t^2}{2 + 5t^3 + 3t^6}.$$

روش پیشنهادی در بخش ۴ را روی مثال‌های ۶،۱ و ۶،۲ انجام می‌دهیم. فرض کنید $u_j(x, t)$ و $a_j(t)$ جواب‌های به دست آمده برای مساله با استفاده از روش پیشنهادی و همچنین $u(x, t)$ و $a(t)$ جواب‌های دقیق داده شده برای مساله باشند. مقدار خطای

$$t_{ii'} = \sum_{j=1}^n a_j d_{i,j}^{i'}, \quad i, i' = 1, \dots, n \quad (68)$$

تعریف کنید، که در آن

$$d_{i,j}^{i'} = \int_0^1 B_{i,j}(x) B_{j,j}(x) B_{i',j}(x) dx, \quad (69)$$

$$i, i', j = 1, 2, \dots, n.$$

مرحله ششم: دستگاه معادلات جبری (۶۱)–(۶۴) را به منظور به دست آوردن مقادیر مجهول $u_{i,j}$ به ازای $i, j = 1, \dots, n$ حل کنید (برای حل دستگاه معادلات جبری از الگوریتم‌های بهینه‌سازی موجود استفاده می‌شود).

مرحله هفتم: جواب‌های تقریبی متناظر با $u(x, t)$ و $a(t)$ برای مساله (۴۱)–(۴۵) را با استفاده از معادلات (۵۷)–(۵۸) به دست آورید.

مراحل مختلف روش پیشنهادی به طور خلاصه در الگوریتم (۱) نمایش داده شده است.

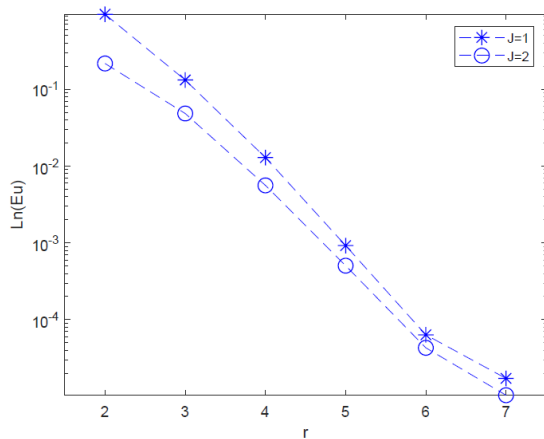
الگوریتم (۱): مراحل مختلف روش پیشنهادی

۱. مقادیر صحیح $J \geq 1$ و $r \geq 2$ را وارد کنید.
۲. قرار دهید $n = 2Jr$ و مطابق با مطالب بخش ۲، یک پایه متعامد و یک فضای V_J به صورت زیر تشکیل دهید:
$$\Psi_J(x) = (B_{1,J}(x), B_{2,J}(x), \dots, B_{n,J}(x))^T.$$
۳. توابع $f(t), g(t), h(t), e(t)$ را همانگونه که در مساله معکوس سهموی (۴۱)–(۴۵) مشخص شده‌اند، وارد کنید و ماتریس‌های G, F, H را به عنوان ماتریس‌های $n \times n$ و مطابق با معادلات (۵۱)–(۵۴) تعریف کنید.
۴. مقادیر مجهول مساله را به شکل زیر وارد کنید.

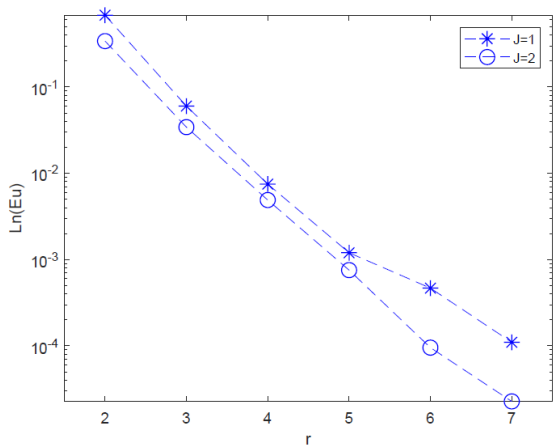
 - (الف) ماتریس U را به عنوان یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های مجهول $u_{ii'}$ برای $i, i' = 1, \dots, n$ تعریف کنید؛
 - (ب) ماتریس V را به عنوان یک ماتریس $n \times n$ با مؤلفه‌های مجهول v_1, \dots, v_n واقع بر روی سطر اول و مؤلفه‌های صفر واقع بر روی بقیه سطرها، تعریف کنید؛
 - (ج) بردار A را به عنوان یک بردار $n \times 1$ با مؤلفه‌های مجهول a_1, \dots, a_n تعریف کنید.

۵. ماتریس عملیاتی انتگرال P را مطابق با بخش ۳،۱ و ماتریس عملیاتی حاصل ضرب \hat{A} را مطابق با مطالب بخش ۳،۲ تعریف کنید.
۶. دستگاه معادلات جبری (۶۱)–(۶۴) را برای به دست آوردن مقادیر مجهول $u_{i,j}$ برای $i, j = 1, \dots, n$ و $v_1, \dots, v_n, a_1, \dots, a_n$ حل کنید.
۷. جواب‌های تقریبی متناظر با $u(x, t)$ و $a(t)$ برای مساله (۴۱)–(۴۵) را با استفاده از معادلات (۵۷)–(۵۸) به دست آورید.

¹ Matlab software



شکل (۲): لگاریتم خطای E_u به ازای مقادیر r برای مثال ۶،۱



شکل (۳): لگاریتم خطای E_u به ازای مقادیر r برای مثال ۶،۲

جواب‌های به دست آمده را در رابطه (۷۴) تعریف می‌کنیم.

$$E_u = \left(\sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} \left[u_j \left(\frac{i}{10}, \frac{j}{10} \right) - u \left(\frac{i}{10}, \frac{j}{10} \right) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (74)$$

$$E_a = \left(\sum_{i=0}^{10} \left[a_j \left(\frac{i}{10} \right) - a \left(\frac{i}{10} \right) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

نتایج حاصل از روش پیشنهاد شده در بخش ۴ در جدول (۱) گزارش شده‌اند. توجه کنید که در این جدول، سطر $r = 2$ مربوط به پایه موجک چندگانه لژاندر خطی، سطر $r = 3$ مربوط به پایه موجک چندگانه لژاندر درجه دو، سطر $r = 4$ مربوط به پایه موجک چندگانه لژاندر درجه سه و الی آخر است. لازم به ذکر است که داده‌های گزارش شده در ستون CPU time، زمان حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی توسط دستور fsolve را نشان می‌دهد و برحسب ثانیه است.

در شکل‌های (۲) و (۳) به منظور مشاهده نرخ همگرایی روش پیشنهادی برای حل عددی دو مثال مورد نظر، نمودار مقادیر $\ln(E_u)$ را به‌عنوان تابعی از r رسم کرده‌ایم. همانطور که در این دو شکل مشاهده می‌شود با افزایش مقادیر r و J مقادیر خطا به صورت نمایی کاهش می‌یابد.

جدول (۱): نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی بر روی مثال‌ها

مثال ۶،۲			مثال ۶،۱			J	r
CPU time	E_a	E_u	CPU time	E_a	E_u		
۱۹/۸۷	۲/۴۵e-۰۱	۶/۷۹e-۰۱	۶/۹۷	۳/۹۲e-۰۱	۹/۴۴e-۰۱	۱	۲
۱/۶۹	۱/۹۹e-۰۱	۹/۴۰e-۰۱	۱/۰۹	۲/۹۲e-۰۲	۲/۱۶e-۰۱	۲	۲
۰/۸۳	۳/۱۴e-۰۲	۶/۰۱e-۰۲	۱/۱۹	۱/۷۵e-۰۲	۱/۳۱e-۰۱	۱	۳
۱/۳۱	۱/۰۹e-۰۲	۳/۴۳e-۰۲	۰/۹۶	۱/۱۰e-۰۲	۴/۸۳e-۰۲	۲	۳
۰/۸۷	۵/۲۰e-۰۳	۷/۵۰e-۰۳	۰/۸۲	۱/۱۳e-۰۲	۱/۲۹e-۰۲	۱	۴
۶/۱۸	۲/۹۵e-۰۲	۴/۹۰e-۰۳	۱/۵۶	۲/۵۰e-۰۳	۵/۶۰e-۰۳	۲	۴
۰/۹۳	۱/۲۰e-۰۳	۱/۲۰e-۰۳	۰/۸۶	۱/۵۰e-۰۳	۹/۲۳e-۰۴	۱	۵
۴/۹۵	۴/۱۶e-۰۴	۷/۵۵e-۰۴	۱/۹۲	۲/۰۱e-۰۵	۵/۰۵e-۰۴	۲	۵
۳/۶۴	۳/۶۶e-۰۴	۱/۱۰e-۰۴	۰/۹۳	۵/۷۵e-۰۵	۶/۳۶e-۰۵	۱	۶
۳/۵۶	۷/۶۲e-۰۴	۹/۵۴e-۰۵	۲/۳۶	۲/۶۶e-۰۵	۴/۳۱e-۰۵	۲	۶
۱/۷۱	۱/۵۰e-۰۳	۴/۶۷e-۰۴	۱/۳۶	۵/۲۶e-۰۶	۱/۷۲e-۰۵	۱	۷
۴/۳۰	۴/۳۰e-۰۴	۲/۲۷e-۰۵	۳/۳۹	۹/۰۶e-۰۶	۱/۰۴e-۰۵	۲	۷

چندگانه لژاندر به عنوان یک مجموعه از توابع پایه‌ای، تقریبی برای جواب یک معادله دیفرانسیل سهموی با ضریب مجهول وابسته به زمان در یک مساله معکوس، به دست آوردیم. برای این منظور، ابتدا بسط تابع جواب مساله را برحسب پایه موجک لژاندر و با ضرایب مجهول در نظر گرفتیم و در ادامه با کمک ماتریس‌های عملیاتی انتگرال و حاصل ضرب به گسسته‌سازی مساله پرداختیم. برای حل دستگاه معادلات جبری به دست آمده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی موجود استفاده کرده‌ایم. روش حاضر را می‌توان در زمره روش باقیمانده‌های وزن‌دار و به‌طور خاص یک روش تاو دانست. نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی روی دو مثال، نشان دادند که با افزایش مقادیر r و J مقادیر خطا به صورت نمایی کاهش می‌یابد. برای انجام یک مقایسه، نتایج روش پیشنهادی را با نتایج گزارش شده از سایر روش‌ها در مراجع دیگر برای یکی از دو مثال ارائه شده، گزارش کردیم.

سپاسگزاری

مولفین بر خود لازم می‌دانند از دانشگاه کاشان برای پشتیبانی مولفین در مقاله جاری، تشکر و قدردانی کنند.

تعارض منافع: نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ تعارض منافعی ندارند.

سرانجام برای انجام یک مقایسه مابین نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج به دست آمده از سایر روش‌ها، نتایج روش تفاضلات متناهی [۲۶، ۲۸]، نتایج روش شبه طیفی [۲۴] و همچنین نتایج روش پیشنهادی را که برای مثال ۶،۲ گزارش شده‌اند، در جدول (۲) آورده‌ایم.

جدول (۲): مقایسه روش پیشنهادی با سایر روش‌ها در مراجع دیگر برای مثال ۶،۲

E_a	E_u	خطای میانگین		روش
		$a(t)$	$u(x, 0.1)$	
				تفاضلات متناهی 50×1000 mesh
-	-	$4/9e-03$	$3/2e-03$	FTCS (1,3)
-	-	$5/4e-03$	$2/7e-03$	BTCS (3,1)
-	-	$5/0e-03$	$3/6e-03$	Crank-Nikolson (3,3)
				شبه طیفی
$7/21e-03$	$1/81e-03$	$4/1e-03$	$1/9e-03$	3×3 mesh
$8/99e-04$	$7/15e-04$	$3/8e-04$	$3/3e-04$	5×5 mesh
$1/29e-04$	$1/02e-04$	$4/7e-05$	$3/5e-05$	7×7 mesh
				پیشنهادی
$1/09e-02$	$3/43e-02$	$2/15e-04$	$3/2e-04$	$r = 3, J = 2$
$4/16e-04$	$7/55e-04$	$3/42e-05$	$1/7e-06$	$r = 5, J = 2$
$4/30e-04$	$2/27e-05$	$2/10e-05$	$5/7e-08$	$r = 7, J = 2$

۷. نتیجه‌گیری

در سال‌های اخیر، پایه موجک چندگانه لژاندر به منظور گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل توسط محققین زیادی مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله، با استفاده از توابع موجک

مراجع

- [1] Beylkin G., "On wavelet-based algorithms for solving differential equations," in Wavelets, pp. 449-466, CRC Press, 2021.
- [2] Glowinski R., "Wavelet solution of linear and nonlinear elliptic," Parabolic and Hyperbolic

Problems in One Space Dimension, pp.1-79, 1989.

- [3] Goswami J. C., Chan A. K., and Chui C. K., "On solving first-kind integral equations using wavelets on a bounded interval," IEEE Transactions on antennas and propagation, 43(6): 614-622, 1995.

- [4] Dahmen W., Kunoth A., and Urban K., "A wavelet Galerkin method for the Stokes equations," *Computing*, 56(3): 259–301, 1996.
- [5] Lin E. and Zhou X., "Connection coefficients on an interval and wavelet solutions of Burgers equation," *Journal of computational and applied mathematics*, 135(1): 63–78, 2001.
- [6] Xu J. -C. and Shann W. -C., "Galerkin-wavelet methods for two-point boundary value problems," *Numerische Mathematik*, 63(1): 123–144, 1992.
- [7] Alpert B. K., "A class of bases in L2 for the sparse representation of integral operators," *SIAM journal on Mathematical Analysis*, 24(1): 246–262, 1993.
- [8] Alpert B. K., Beylkin G., Gines D., and Vozovoi L., "Adaptive solution of partial differential equations in multiwavelet bases," *Journal of Computational Physics*, 182(1): 149–190, 2002.
- [9] Lakestani M., Saray B. N., and Dehghan M., "Numerical solution for the weakly singular Fredholm integro-differential equations using Legendre multiwavelets," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(11): 3291–3303, 2011.
- [10] Shamsi M. and Razzaghi M., "Solution of Hallen's integral equation using multiwavelets," *Computer Physics Communications*, 168(3): 187–197, 2005.
- [11] Zhou X., "Legendre multiwavelet Galerkin methods for differential equations," *Journal of applied mathematics and informatics*, 32(12): 267–284, 2014.
- [۱۲] شیخان م.، عباسی ع.، «راهکار ترکیبی نوین جهت تشخیص نفوذ در شبکه‌های کامپیوتری با استفاده از الگوریتم‌های هوش محاسباتی»، *مجله محاسبات نرم*، جلد ۶، شماره ۱، ص. ۴۸–۶۵، ۱۳۹۶.
- [۱۳] محمدپور م.، مینایی بیدگلی ب.، پروین ح.، «ارائه یک الگوریتم فرااکتشافی جدید مبتنی بر رفتار پرنده تیهو برای حل مسائل بهینه‌سازی پویا»، *مجله محاسبات نرم*، جلد ۸، شماره ۲، ص. ۳۸–۶۵، ۱۳۹۸.
- [۱۴] خسروی ا.، عبدالمالکی ه.، فیاضی م.، «پیش‌بینی وضعیت تحصیلی متقاضیان پذیرش‌شده دانشگاه، مبتنی بر داده‌های آموزشی و پذیرشی با استفاده از تکنیک‌های داده کاوی»، *مجله محاسبات نرم*، جلد ۹، شماره ۲، ص. ۹۴–۱۱۳، ۱۳۹۹.
- [۱۵] ویسی ه.، قایدشرف ح.، ابراهیمی م.، «بهبود کارایی الگوریتم‌های یادگیری ماشین در تشخیص بیماری‌های قلبی با بهینه‌سازی داده‌ها و ویژگی‌ها»، *مجله محاسبات نرم*، جلد ۸، شماره ۱، ص. ۷۰–۸۵، ۱۳۹۸.
- [16] Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., and Zang T. A., *Spectral methods: fundamentals in single domains*, Springer Science and Business Media, 2007.
- [17] Saadatmandi A. and Dehghan M., "Numerical solution of the one-dimensional wave equation with an integral condition," *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 23(2): 282–292, 2007.
- [18] Abbas Z., Vahdati S., Atan K., and Long N. N., "Legendre multi-wavelets direct method for linear integro-differential equations," *Applied Mathematical Sciences*, 3(14): 693–700, 2009.
- [19] Khellat F. and Yousefi S. A., "The linear legendre mother wavelets operational matrix of integration and its application," *Journal of the Franklin Institute*, 343(2): 181–190, 2006.
- [20] Rivlin T. J., *An introduction to the approximation of functions*, Courier Corporation, 1981.
- [21] Ueda M. and Lodha S., *Wavelets: An elementary introduction and examples*, University of California, Santa Cruz, US, 1995.
- [22] Cannon J. R. and Rundell W., "Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 160(2): 572–582, 1991.
- [23] MacBain J. A. and Bednar J. B., "Existence and uniqueness properties for the one-dimensional magnetotellurics inversion problem," *Journal of mathematical physics*, 27(2): 645–649, 1986.
- [24] Shamsi M. and Dehghan M., "Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic equation from overspecified boundary data using the pseudospectral legendre method," *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 23(1): 196–210, 2007.
- [25] Thapa N., "On the numerical solution of coefficient identification problem in heat equation," *Applied Mathematical Sciences*, 8(122): 6081–6092, 2014.
- [26] Dehghan M., "Identification of a time-dependent coefficient in a partial differential equation subject to an extra measurement," *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 21(3): 611–622, 2005.
- [27] Saadatmand A. and Dehghan M., "A method based on

the tau approach for the identification of a time-dependent coefficient in the heat equation subject to an extra measurement,” *Journal of Vibration and Control*, 18(8): 1125–1132, 2012.

- [28] Dehghan M., “A computational study of the one-dimensional parabolic equation subject to nonclassical boundary specifications,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 22(1): 220–257, 2006.