

دریافت مقاله: ۱۳۹۶/۲/۸

پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۱۲/۲

پلی‌نومیونگاری به وسیله یک روش تکراری جدید

مرتضی بیشه‌نیاسر

استادیار گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

mbisheh@kashanu.ac.ir

چکیده

اهمیت و کاربرد ریاضی و تکنیک‌های مبتنی بر آن در بسیاری از علوم انکارناپذیر است. یکی از این کاربردها پلی‌نومیونگاری است. پلی‌نومیونگاری فرایند تجسم ریشه‌های یک چندجمله‌ای مختلط است که از منظر علوم و هنر حائز اهمیت است. در این مقاله قصد داریم پلی‌نومیونگاری حاصل از یک روش تکراری جدید را ارائه کنیم. طی مثال‌های بیان‌شده، مشاهده خواهیم کرد که با اعمال این تکنیک، طرح و الگوهای زیبایی حاصل خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: پلی‌نومیونگاری، چندجمله‌ای، روش‌های تکراری، طرح و الگو.

را به کاربر می‌دهد که با اعمال روش‌های تکراری مختلف بر روی چندجمله‌ای‌ها، به‌وسیله کامپیوتر، طرح و الگوهای زیبا تولید کند. این طرح‌های زیبا که پلی‌نومیوگراف^۲ نامیده برخلاف تصاویر فرکتالی بیشتر قابل کنترل‌اند؛ یعنی شخص کاربر می‌تواند با ابزارهای گوناگونی همچون چندجمله‌ای، روش تکراری و معیارهای دیگر، طرح تولیدی را طبق سلیقه خود کنترل کند. نمونه‌ای از کاربرد پلی‌نومیونگاری در قالی‌بافی را در شکل (۲) می‌توانید مشاهده کنید.



شکل (۲): نمونه‌ای از کاربرد پلی‌نومیونگاری در قالی‌بافی

در [۳، ۴ و ۵]، کلاتری به توصیف پلی‌نومیوگرافی به‌عنوان فصل مشترک ریاضی و هنر پرداخته و در این حین، طرح و الگوهای بسیار زیبایی را ارائه کرده است. بعد از ابداع پلی‌نومیونگاری توسط کلاتری، بسیاری از محققان و علاقه‌مندان، به بسط و گسترش این تکنیک پرداختند، که نمونه‌هایی از آن در بخش بعد بیان می‌شود.

ادامه این مقاله به این صورت است که در بخش دو، کلیاتی از پلی‌نومیونگاری را بیان می‌کنیم و ضمن معرفی یک روش تکراری جدید، یک الگوریتم جامع برای پلی‌نومیونگاری ارائه می‌کنیم. در بخش سوم، با معرفی MNI, CAI ، تأثیر پارامترهای موجود در روش را طی چند مثال مشاهده خواهیم کرد. سرانجام، مقاله را با بخش نتیجه‌گیری به پایان می‌رسانیم.

۲. پلی‌نومیونگاری

بنا به قضیه اساسی جبر، هر چندجمله‌ای مختلط از درجه n با ضرایب مختلط به شکل $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ دارای n ریشه در صفحه مختلط است که این ریشه‌ها می‌تواند متمایز یا غیر متمایز باشد. یافتن تقریب ریشه‌های چندجمله‌ای،

۱. مقدمه

نیاز به استفاده از کامپیوتر در بسیاری از امور صنعتی و اقتصادی انکارناپذیر است، به‌طوری که امروزه روی آوردن به برخی نوآوری‌های تکنیکی، سخت‌افزاری و نرم‌افزاری در عرصه‌های رقابتی به‌منظور ارتقا و تنوع محصولات، امری ضروری و عاقلانه است. یکی از این موارد پراهمیت، استفاده از کامپیوتر و الگوریتم‌های مختلف در عرصه پردازش تصاویر و بزرگ‌نمایی تصاویر و رمزنگاری تصاویر در زمینه‌های مختلف پزشکی و نظامی است [۱-۲]. از دیگر موارد جالب، استفاده از کامپیوتر در تولید طرح‌ها و الگوها در صنایعی همچون جواهرسازی، قالی‌بافی و نساجی است. لذا یک طراح در چنین صنایعی برای تولید طرح و الگوهای متنوع به‌وسیله کامپیوتر، می‌بایست با انواع روش‌ها و تکنیک‌ها آشنایی داشته باشد. تولید تصاویر فرکتالی می‌تواند به‌عنوان یک ابزار ریاضی برای تولید طرح‌های متنوع در نظر گرفته شود. این تصاویر که با اعمال روابط تکراری بر روی توابع مختلط حاصل می‌شود، کاربردهای فراوانی در هنر دارد. یکی از کاربردهای جذاب تولید تصاویر فرکتالی، استفاده از آن‌ها در صنعت جواهرسازی به‌منظور تولید زیورآلات زیباست (شکل ۱).



شکل (۱): نمونه‌ای از کاربرد فرکتال در جواهرسازی

یکی دیگر از تکنیک‌ها در تولید طرح و الگو، پلی‌نومیونگاری^۱ است. پلی‌نومیونگاری آخرین دستاورد مربوط به چندجمله‌ای‌هاست که تقریباً در سال ۲۰۰۰ میلادی توسط کلاتری ابداع شد [۳-۴]. در واقع پلی‌نومیونگاری به‌عنوان هنر و علم تجسم تقریب ریشه‌های یک چندجمله‌ای مختلط، از طریق تصاویر فرکتالی و غیرفرکتالی تولیدشده به‌وسیله خواص همگرایی توابع تکراری، مطرح می‌شود. این تکنیک، این امکان

در [۴-۳]، کلانتری به کمک توابع فوق، یک خانواده از روش های تکراری به شکل $\{B_m(z)\}$ معرفی کرده است، که

$$B_m(z) = z - \frac{p(z)D_{m-2}(z)}{D_{m-1}(z)}, m = 2, 3, \dots \quad (2)$$

خانواده $\{B_m(z)\}$ ، خانواده اساسی نامیده می شود. مشهود است که

$$B_2(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)},$$

روش تکراری نیوتن است و

$$B_3(z) = z - \frac{2p(z)p'(z)}{2p'^2(z) - p(z)p''(z)},$$

روش تکراری هالی است. واضح است که برای $m > 3$ روش های حاصل شده از خانواده اساسی پیچیده تر خواهد شد. لذا می توان از روش های تکراری از خانواده نیوتن برای ساخت یک رابطه تکراری به منظور تقریب ریشه ها استفاده کرد. برای مثال:

$$\begin{cases} y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(\frac{x_n + y_n}{2})}. \end{cases}$$

نمونه هایی بیشتر از این روش ها را در [۱۲] مشاهده کنید. در [۱۳]، نویسنده از روش زیر که از خانواده نیوتن است، برای پلی نومیونگاری استفاده کرده و طرح ها و الگوهای زیبایی را ارائه نموده است:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{6p(x_n)}{p'(x_n) + 4p'(\frac{x_n + y_n}{2}) + p'(y_n)}, \\ y_n = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

اساس کار پلی نومیونگاری، بر عهده روش تکراری است. اگر $z_{n+1} = T(z_n)$ یک رابطه تکراری به منظور تقریب ریشه z^* باشد، می توان بر اساس این رابطه، روابط تکراری غیراستاندارد دیگری همچون روش تکرار مان^۴،

$$z_{n+1} = (1 - \alpha)z_n + \alpha T(z_n), n = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

روش تکرار ایشیکاوا^۵،

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha)z_n + \alpha T(v_n) \\ v_n = (1 - \beta)z_n + \beta T(z_n), n = 0, 1, \dots; \end{cases} \quad (4)$$

یک مسئله تاریخی است، به طوری که طی مدارک تاریخی به دست آمده، سومریان و مردم یونان باستان نیز با آن سروکار داشتند [۳]. تاریخچه چنین مسائلی را می توانید در [۶-۷] مشاهده کنید. در تقریب ریشه های یک چندجمله ای، برخی روش ها رفتار یکسانی از خود نشان نمی دهند؛ یعنی ممکن است یکی از ریشه ها را به طور مناسب تقریب بزند، اما در مورد بقیه ریشه ها، دقت تقریب ها کاهش یابد. تنها روش جامع و کلی برای تقریب یافتن ریشه های چندجمله ای، استفاده از روش های تکراری $z_{n+1} = T(z_n)$ روی صفحه مختلط است. یکی از پرکاربردترین این روش ها روش نیوتن می باشد:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{p(z_n)}{p'(z_n)} \quad (1)$$

این روش، تقریب مناسب همه ریشه ها را به شرط انتخاب مناسب نقطه آغازین تضمین می کند. علاقه مندان برای مطالعه تاریخچه روش نیوتن می توانند مراجع [۸-۹] را مطالعه کنند. استفاده از روش های تکراری در تقریب ریشه های چندجمله ای، خود سرآغازی بر کشفیات و نتایج جدید شد. برای مثال برای اولین بار رفتار غیرقابل پیش بینی روش نیوتن در صفحه مختلط بر روی چندجمله ای $p(z) = z^3 + 1$ ، توسط کیلی^۱ در سال ۱۸۷۹ مورد توجه قرار گرفت که سال ها بعد این مسئله توسط جولیا^۲ [۱۰] و مندلبرات^۳ [۱۱] حل شد.

شاید یکی از جامع ترین مجموعه روش های تکراری برای تقریب تمام ریشه های چندجمله ای، خانواده روش های تکراری توصیف شده توسط کلانتری باشد. فرض کنید $D_0(z) = 1$ برای $m \geq 1$ تابع $D_m(z)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$D_m(z) = \det \begin{pmatrix} p'(z) & \frac{p''(z)}{2!} & \dots & \frac{p^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} & \frac{p^{(m)}(z)}{m!} \\ p(z) & p'(z) & \dots & \frac{p^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} & \\ 0 & p(z) & \dots & p'(z) & \frac{p''(z)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \dots & p(z) & p'(z) \\ 0 & 0 & \dots & p(z) & p'(z) \end{pmatrix}$$

1. Cayley
2. Julia
3. Mandelbrot

4. Mann iteration
5. Ishikawa iteration

روش s -تکرار،

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \beta)T(z_n) + \beta T(v_n) \\ v_n = (1 - \alpha)z_n + \alpha T(z_n), n = 0, 1, \dots; \end{cases} \quad (5)$$

را برای تقریب ریشه‌ها استفاده کرد. واضح است که با انتخاب $\beta = 0, \alpha = 1$ روش غیراستاندارد مورد نظر، به همان روش استاندارد اولیه کاهش می‌یابد. هرچند ممکن است مرتبه همگرایی روش‌های غیراستاندارد بیان شده، با روش استاندارد مورد نظر متفاوت باشد، اما هدف از پلی‌نومیونگاری، ایجاد طرح‌ها و الگوهای جدید و زیباست، نه بهبود مرتبه همگرایی روش‌ها.

کلاتتری در [۱۴]، پلی‌نومیونگاری را روی چندجمله‌ای‌های علامت متناوب مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است. در [۱۵]، کانگ^۱ و همکاران روش s -تکرار مبتنی بر روش نیوتن را به کار برده‌اند و پلی‌نومیونگاری این روش را روی برخی چندجمله‌ای‌های مبتنی بر ماتریس‌های آشفتگی به دست آورده‌اند. در [۱۶]، تنویر^۲ و همکاران از یک روش تکراری جدید در فرم s -تکرار استفاده کرده و به بررسی پلی‌نومیوگراف‌های حاصل از آن پرداخته‌اند. در [۱۷]، روش ایشیکاوا و مان مبتنی بر روش نیوتن روی چندجمله‌ای $z^3 - 1$ و چندجمله‌ای‌های مبتنی بر ماتریس‌های تصادفی دوتایی و آشفتگی مورد استفاده قرار گرفته است. در [۱۸]، ابتدا خانواده جدیدی از روش‌های تکراری، به نام خانواده اوایلر-اسشرودر^۳ (که از خانواده نیوتن هستند) بیان شده است. سپس روش‌های غیراستاندارد دیگری همچون روش SP -تکرار و کاراکایا^۴ معرفی شده و روابط بین روش‌های تکراری غیراستاندارد، طی یک نمودار بیان شده است. سپس نویسندگان، چندین پلی‌نومیوگراف حاصل از این روش‌های غیراستاندارد را ارائه کرده‌اند. در [۱۹]، رفیق و همکاران از روش تکراری جانک در فرم استاندارد، مان و ایشیکاوا برای پلی‌نومیوگرافی استفاده کردند. گداویس^۵ در [۲۰] از شیوه نوین آشفتگی برای پلی‌نومیونگاری استفاده کرده است.

به زبان ساده، یعنی به جای رابطه تکراری $z_{n+1} = T(z_n)$ ، از رابطه $z_{n+1} = T(\rho(z_n))$ استفاده کرده است که ρ تابع آشفتگی است. در [۲۱]، گداویس با اعمال روش‌های غیر استاندارد مان و ایشیکاوا مبتنی بر نیوتن، روی یک سیستم غیرخطی دوتایی، به تولید پلی‌نومیوگراف پرداخته است. در [۲۲]، نسیم و همکاران از روش تکراری اصلاح‌شده گل‌بابایی و جاویدی که شامل مشتقات اول و دوم است، برای پلی‌نومیونگاری استفاده کرده‌اند. فرض کنید که $z_{n+1} = T(z_n)$ یک رابطه تکراری به منظور تقریب ریشه z^* باشد، اکثر محققان از الگوریتم کلی زیر برای پلی‌نومیونگاری استفاده کرده‌اند:

مرحله (۱): $k \in N, z_0 \in A \subset C$ را دریافت کن و $i = 0$ قرار بدهید.

مرحله (۲): اگر $i \leq k$ به مرحله (۳) بروید، در غیر این صورت به مرحله (۶) بروید.

مرحله (۳): $z_{i+1} = T(z_i)$ و به مرحله (۴) بروید.

مرحله (۴): اگر شرط توقف برقرار است به مرحله (۶) بروید، در غیر این صورت به مرحله (۵) بروید.

مرحله (۵): $i = i + 1$ و به مرحله (۲) بروید.

مرحله (۶): نقطه z_0 را با رنگ i -ام نمایش دهید.

کافی است هر نقطه z_0 از دامنه مورد نظر در الگوریتم بالا قرار گیرد تا رنگ متناظر با این نقطه مشخص شود. به‌ازای هر $z_0 \in A$ دنباله تولیدی $\{z_n\}_{n=0}$ توسط روش تکراری مورد نظر را اربیت^۶ نقطه آغازین z_0 می‌نامیم. در صورت همگرایی دنباله مورد نظر به ریشه z^* ، نقطه z_0 را جذب‌شده z^* می‌نامیم. مجموعه تمام نقاط آغازین z_0 را به طوری که دنباله تولیدی $\{z_n\}_{n=0}$ به z^* همگرا باشد، ناحیه جذب z^* می‌نامیم. در [۲۳] می‌توانید ناحیه جذب روش‌هایی از خانواده نیوتن را مشاهده کنید. در الگوریتم بیان‌شده، k حداکثر تکرار در نظر گرفته شده برای فرایند تکراری است. چنان‌که طی k تکرار، شرط توقف برقرار نباشد، فرض بر همگرا نبودن دنباله تولیدی به یکی از ریشه‌های $p(z)$ خواهد بود. برای شرط

1. Kang
2. Tanveer
3. Euler-Schroder
4. Karakaya
5. Gdawiec

6. Orbit
7. Basin attraction

مختلط به 85×85 زیر مستطیل یکسان تقسیم کرده و مجموعه نقاط آغازین را از نقاط شبکه‌ای حاصل شده انتخاب می‌کنیم. تمام نتایج حاصل شده در این بخش، به وسیله نرم افزار متلب حاصل شده و در تمام مثال‌ها $\epsilon = 0.001$ در نظر گرفته شده است. مثال ۱: چند جمله‌ای $p(z) = z^5 - 1$ را در نظر بگیرید.

برای تابع فوق $k = 10$ و شرط توقف

$$|z_{n+1}^2 - z_n^2| < \epsilon \quad (v)$$

را در نظر بگیرید. در جدول (۱) و (۲) می‌توانید پارامتر MNI و CAI حاصل شده را برای چندین انتخاب β, α مشاهده کنید.

جدول (۱): MNI مربوط به مثال ۱

	$\beta = 0.4$		$\beta = 0.8$	
	رابطه (۶)	رابطه (SN)	رابطه (۶)	رابطه (SN)
$\alpha = 0.5$	5.607	6.264	4.915	5.755
$\alpha = 0.75$	5.185	5.908	3.958	5.346
$\alpha = 1$	4.781	5.613	3.322	4.952

همان طور که از جدول‌های (۱) و (۲) مشهود است، در روش تکراری (۶) برخلاف SN ، تمام نقاط دامنه همگراست و برای همگرایی، تعداد تکرار کمتری لازم است.

جدول (۲): CAI مربوط به مثال ۱

	$\beta = 0.4$		$\beta = 0.8$	
	رابطه (۶)	رابطه (SN)	رابطه (۶)	رابطه (SN)
$\alpha = 0.5$	1	0.874	1	0.880
$\alpha = 0.75$	1	0.884	1	0.893
$\alpha = 1$	1	0.903	1	0.905

در حالت دوم برخلاف سایر مقالات مرتبط با روش‌های تکراری و پلی‌نومینگاری، پارامترهای β, α را در این مقاله به صورت توابع سینوسی و کسینوسی در نظر می‌گیریم. در جدول (۳) می‌توانید نتایج برخی انتخاب‌ها را ملاحظه کنید.

جدول (۳): MNI و CAI مربوط به مثال ۱

	رابطه (۶)		رابطه (SN)	
	MNI	CAI	MNI	CAI
$\alpha = \cos(n^2 + n)$ $\beta = \sin(n) \cos(n^2)$	7.594	0.999	7.416	0.681
$\alpha = \sin(n^2 - n + 1)$ $\beta = \cos(n^2 + n)$	5.958	1	6.465	0.829

توقف بیان شده در الگوریتم، استفاده از شرایط

$$|p(z_n)| < \epsilon, \quad |z_{n+1} - z_n| < \epsilon$$

به‌ازای $1 \ll \epsilon$ معقولانه است. از آنجایی که هدف از پلی‌نومینگاری تولید طرح‌های متنوع است، می‌توان از شرایط غیرمتعارف دیگری نیز استفاده کرد. در [۲۴] نویسنده به‌ازای ثابت‌های c_1 و c_2 ، از شرایط توقف غیرمتعارفی همچون

$$|c_1|z_{n+1}|^2 - c_2|z_n|^2| < \epsilon$$

$$\left| \frac{c_1}{|z_{n+1}|^2} - \frac{c_2}{|z_n|^2} \right| < \epsilon$$

به‌منظور ایجاد طرح و الگوها استفاده کرده است. تغییر هریک از قسمت‌های الگوریتم، منجر به تولید یک طرح زیبا خواهد شد. در [۲۵]، نویسنده فرایند سویچینگ را روی قسمت‌های مختلف الگوریتم پلی‌نومینگرافی اعمال و در نتیجه طرح‌های بسیار زیبایی را ارائه کرده است. همچنین در [۲۶]، با الهام از مجموعه‌های جولیا و مندلیبات، الگوریتم بیان‌شده را تغییر داده و الگوریتم‌های جدیدی را ارائه کرده است.

درخصوص پلی‌نومینگاری، برای اولین بار در این مقاله از

روش تکراری جدید [۲۷]:

$$\begin{cases} z_{n+1} = (1 - \alpha)F(z_n) + \alpha F(v_n) \\ v_n = (1 - \beta)z_n + \beta F(z_n) \end{cases} \quad (6)$$

که $F(z) = \frac{p'(z)}{p''(z)} \ln\left(1 - \frac{p(z)p''(z)}{p'^2(z)}\right)$ استفاده می‌کنیم و با استفاده از الگوریتم بیان‌شده به بررسی کیفی و کمی طرح‌های تولید شده می‌پردازیم.

۳. مثال‌ها

در این بخش قصد داریم به‌وسیله الگوریتم بیان‌شده در بخش قبل، مقایسه‌ای بین روش تکراری (۶) و S-تکرار روش نیوتن (SN) انجام دهیم و پلی‌نومینگاری چندین چندجمله‌ای را بررسی کنیم. به‌منظور بررسی نقش پارامترهای β, α در همگرایی نقاط دامنه از پارامترهای MNI و CAI به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$CAI = \frac{\text{تعداد نقاط همگرا}}{\text{تعداد کل نقاط}}$$

$$MNI = \frac{\text{مجموع تعداد تکرارهای لازم برای نقاط همگرا}}{\text{تعداد نقاط همگرا}}$$

در تمام مثال‌ها، مستطیل $[-2, 2] \times [-2, 2]$ از صفحه

$$\left| \frac{0.05}{|z_{n+1}|^2} - \frac{0.05}{|z_n|^2} \right| < \epsilon \quad (۸)$$

بیان می‌کند. چنانچه از شرط توقف (۷) استفاده کنیم نتایج جدول (۴) و (۵) حاصل می‌شود.

جدول (۴): MNI مربوط به مثال ۲، شرط توقف (۷)

	$\beta = 0.4$		$\beta = 0.8$	
	رابطه (۶)	رابطه (SN)	رابطه (۶)	رابطه (SN)
$\alpha = 0.5$	6.777	5.045	6.273	4.752
$\alpha = 0.75$	6.400	4.822	5.794	3.934
$\alpha = 1$	6.098	4.439	5.363	3.598

جدول (۵): CAI مربوط به مثال ۲، شرط توقف (۷)

	$\beta = 0.4$		$\beta = 0.8$	
	رابطه (۶)	رابطه (SN)	رابطه (۶)	رابطه (SN)
$\alpha = 0.5$	1	0.870	1	0.884
$\alpha = 0.75$	1	0.881	1	0.885
$\alpha = 1$	1	0.895	1	0.892

از جدول‌های فوق مشاهده می‌شود که در صورت استفاده از رابطه (۶)، تمام نقاط دامنه و با تعداد تکرار کمتری همگرا خواهد بود. حال اگر از شرط توقف (۸) استفاده کنیم و سایر پارامترها را مانند قبل در نظر بگیریم، نتایج به‌صورت جدول‌های (۶) و (۷) به دست می‌آید.

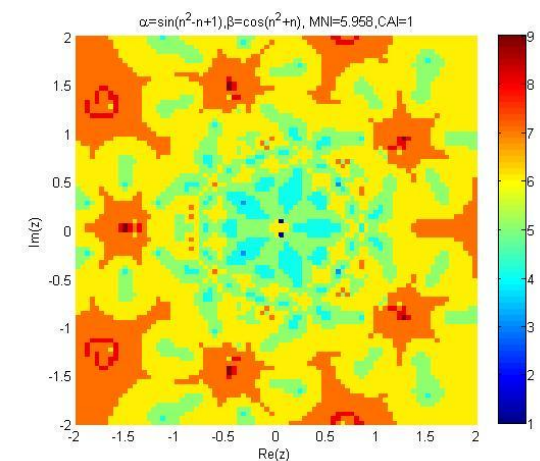
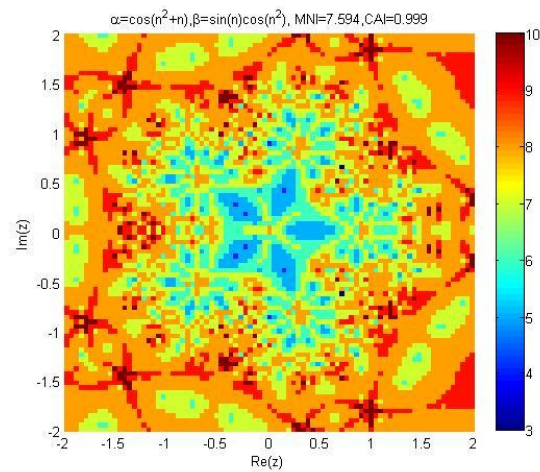
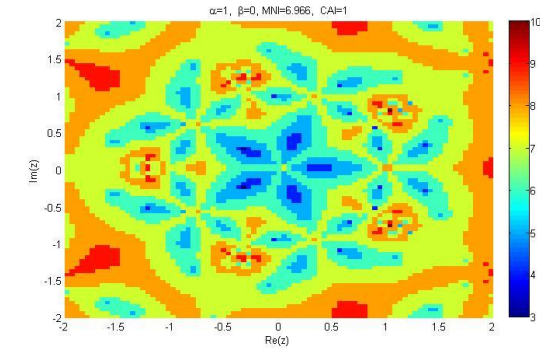
جدول (۶): MNI مربوط به مثال ۲، شرط توقف (۸)

	$\beta = 0.4$		$\beta = 0.8$	
	رابطه (۶)	رابطه (SN)	رابطه (۶)	رابطه (SN)
$\alpha = 0.5$	5.475	5.029	5.015	4.572
$\alpha = 0.75$	5.237	4.850	4.693	3.783
$\alpha = 1$	4.970	4.482	4.507	3.433

جدول (۷): CAI مربوط به مثال ۲، شرط توقف (۸)

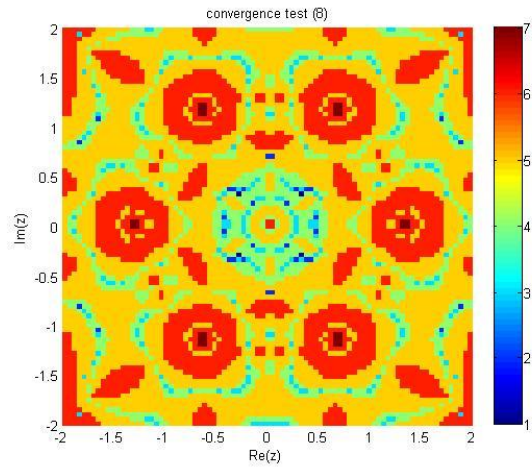
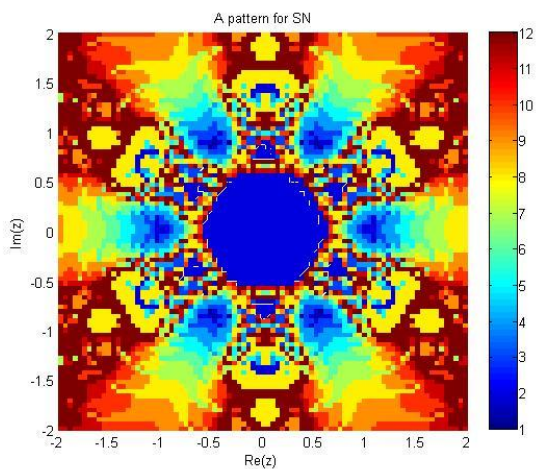
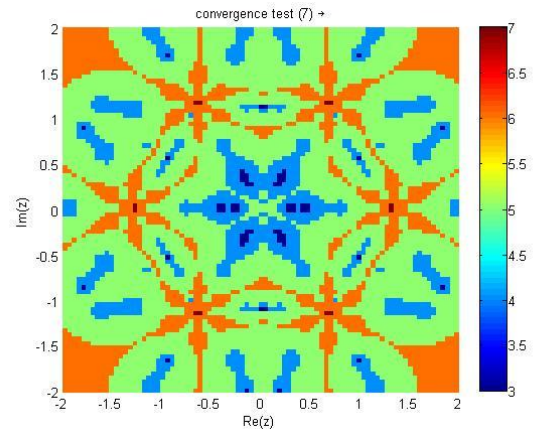
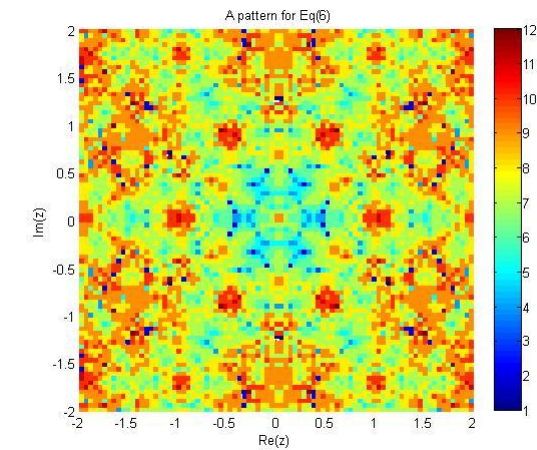
	$\beta = 0.4$		$\beta = 0.8$	
	رابطه (۶)	رابطه (SN)	رابطه (۶)	رابطه (SN)
$\alpha = 0.5$	1	0.977	1	0.988
$\alpha = 0.75$	1	0.983	1	0.992
$\alpha = 1$	1	0.986	1	0.993

در این حالت نیز مشاهده می‌شود که روش (۶) بهتر از روش (SN) عمل می‌کند. در ادامه می‌توانید در شکل (۳) چندین طرح زیبای حاصل‌شده برای مثال (۱) را مشاهده کنید.



شکل (۳): نمونه‌ای از طرح‌های حاصل‌شده در مثال (۱)

مثال ۲: فرض کنید $p(z) = z^6 - 1$ برای این چندجمله‌ای تعداد تکرار $k = 12$ را در نظر می‌گیریم. جداول (۴-۷) شاخص MNI و CAI را برای برخی مقادیر β, α به‌ازای شرط توقف (۷) و شرط توقف



شکل (۵): دو طرح متناظر با روش (۶) و SN

شکل (۴): طرح‌های حاصل شده در مثال (۲) با شرایط توقف متفاوت

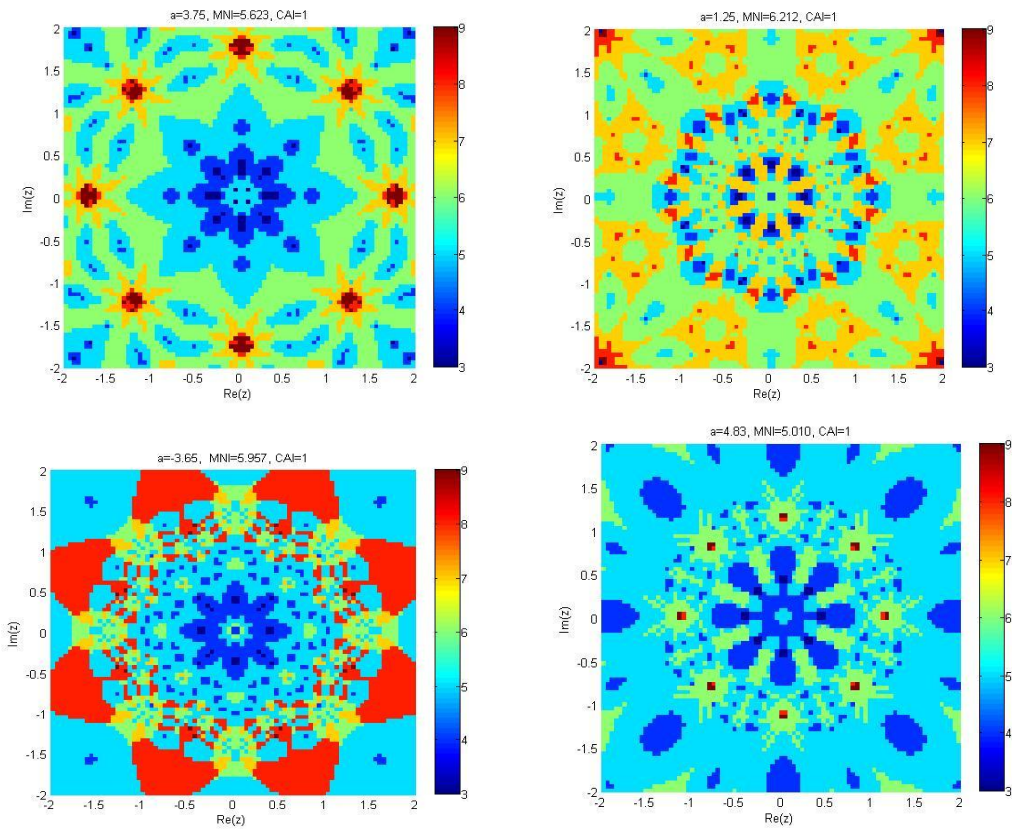
جدول (۸): نتایج مربوط به مثال ۲، شرط توقف (۸)

	رابطه (۶)	رابطه (SN)
$\alpha = \cos(n^2 + n)$	MNI=6.706	MNI=6.380
$\beta = \cos(n) \sin(n)$	CAI=1	CAI=0.950
$\alpha = \sin(5n + 1)$	MNI=7.7166	MNI=7.434
$\beta = \sin(\sqrt{n^2 + 1})$	CAI=1	CAI=0.849

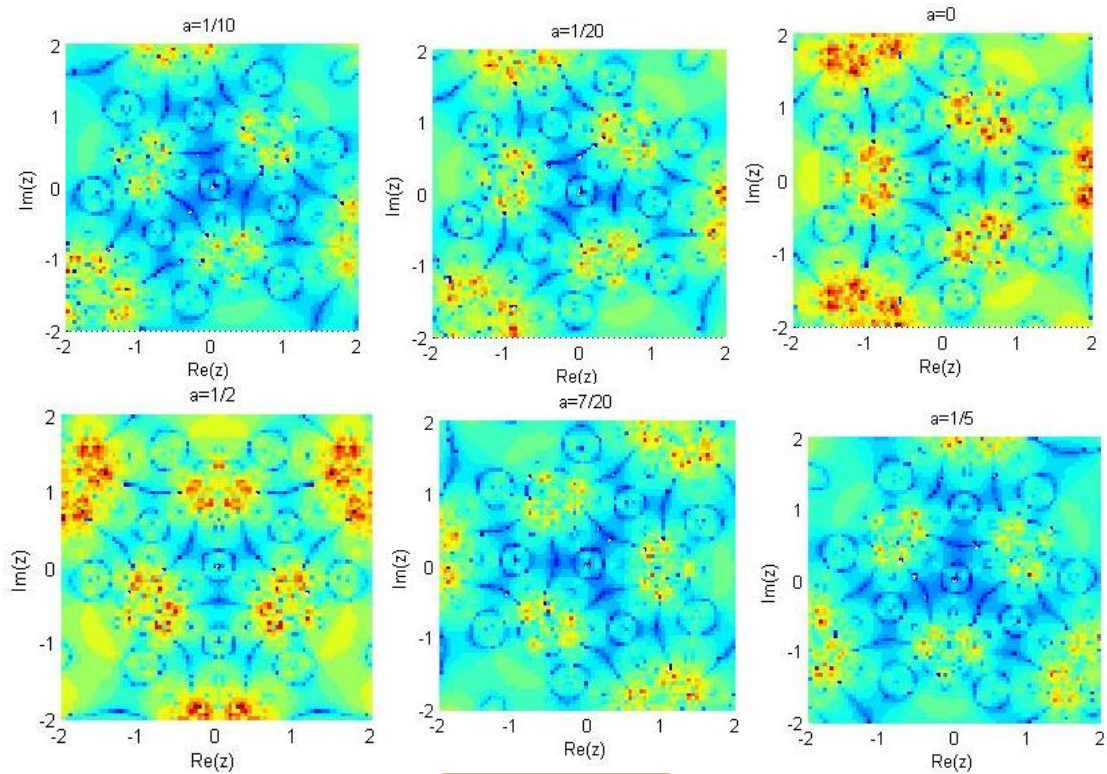
مثال ۳: چندجمله‌ای $p(z) = z^8 - 1$ را به همراه شرط توقف $|z_{n+1} - z_n| < \epsilon$ و $k = 12$ در نظر بگیرید. طرح‌ها و نتایج حاصل شده برای این چندجمله‌ای، به‌ازای پارامترهای $\alpha = \sin(a(n + 1)), \beta = \cos(a(n + 1))$ موجود در رابطه (۶) را می‌توانید در شکل‌های (۶) مشاهده کنید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، فقط با تغییر پارامتر a می‌توان طرح‌های متفاوت به دست آورد.

باز هم نتایج فوق بیانگر این است که استفاده از رابطه (۶)، موجب همگرایی تمام نقاط دامنه است. در شکل (۴) شما می‌توانید تفاوت طرح‌های ایجاد شده در حالت $\beta = 0.4$ را به‌ازای شرایط توقف (۷) و (۸) مشاهده کنید. به‌مانند مثال قبل، می‌توان از توابع مثلثاتی سینوس و کسینوس استفاده کرد. نتایج برخی انتخاب‌ها را در جدول (۸) مشاهده کنید. طرح‌های حاصل شده برای سطر آخر جدول (۸) را می‌توان در شکل (۵) مشاهده کرد.

مثال ۴: چندجمله‌ای $p(z) = (e^{ai\pi z})^3 - 1$ را در نظر بگیرید. اگر $k = 25, \alpha = 1, \beta = 0$ و شرط توقف $||z_{n+1}|^2 - |z_n|^2| < \epsilon$ را برای $a \in \{0, \frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{4}{20}, \frac{7}{20}, \frac{10}{20}\}$ به کار بگیریم، شکل‌های (۷) به دست می‌آید. نمایش متوالی این طرح‌ها بیانگر چرخش طرح به اندازه 90° - درجه است؛ یعنی با نمایش متوالی این طرح‌ها می‌توان یک تصویر متحرک زیبا تولید کرد.



شکل (۶): چندین طرح برای مثال ۳



شکل (۷): طرح‌های مثال ۴

۴. نتیجه گیری

از موارد جالب استفاده از پلی‌نومیونگاری، رمزگذاری اعداد می‌تواند باشد. برای مثال شماره کارت‌های اعتباری را می‌توان به یک طرح و الگو تبدیل کرد. در این حالت طرح مورد نظر کاربردی شبیه اثر انگشت خواهد داشت. برای این کار کافی است برای مثال عدد $a_8 a_7 \dots a_1 a_0$ را به صورت چندجمله‌ای

$$p(z) = a_8 z^8 + a_7 z^7 + \dots + a_1 z + a_0$$

در نظر گرفت. حال تکنیک پلی‌نومیونگاری را با یک روش مشخص، به همراه پارامترهای مشخص روی این چندجمله‌ای اعمال کرد تا یک طرح متناظر با آن عدد به دست آید. در مرحله بعد می‌بایست به وسیله اسکنرهای خاص، این طرح به عدد مورد نظر تبدیل شود.

در این مقاله، پلی‌نومیونگاری به وسیله یک روش تکراری جدید را مورد بررسی قرار دادیم و مشاهده کردیم که با تغییر پارامترهای روش، می‌توان طرح‌های متنوع و گوناگونی را به دست آورد. قابل توجه است که با استفاده از شاخص MNI و CAI می‌توان از مجموعه پارامترهای α, β ، بهترین پارامتر را به منظور همگرایی سریع‌تر بیشتر نقاط انتخاب کرد.

باید در نظر گرفت که از پلی‌نومیونگاری می‌توان در مبحث آموزش نیز استفاده کرد. این امر باعث علاقه‌مندی دانش‌آموزان و دانشجویان به مباحثی همچون چندجمله‌ای، دنباله، همگرایی، روش‌های تکراری و قضایای مربوط به آن‌ها می‌شود. یکی دیگر

مراجع

- [۱] مهرنهاد زینب، لطیف علی محمد، «ارائه روشی برای رمزنگاری تصاویر با استفاده از اتوماتای سلولی ترکیبی»، نشریه علمی ترویجی محاسبات نرم، (۵)، ۶۱-۵۰، ۱۳۹۳.
- [۲] اسمعیلی زینی علی محمد، لطیف علی محمد، بریدلقمانی قاسم، «بزرگنمایی تصویر با استفاده از تقریب بهترین صفحه»، نشریه علمی ترویجی محاسبات نرم، سال پنجم، (۱)، ۳۵-۲۶، ۱۳۹۵.
- [3] Kalantari, B., "Polynomiography and applications in art, education and science", Computers & Graphics, Vol. 28, pp. 417-430, 2004.
- [4] Kalantari, B: *Polynomial root-finding and polynomiography*, World Scientific. singapore, 2009.
- [5] Kalantari, B., Polynomiography: A new intersection between mathematics and art, Technical Report DCS-TR 506, Department of computer science, Rutgers university, New Brunswick, New Jersey, 2002.
- [6] McNamee J.M., A bibliography on roots of polynomials, Journal of computational and applied mathematics, vol. 43, No. 3, pp.391-394, 1993.
- [7] Pan V.y., Solving a polynomial equation: some history and recent progress, SIAM Review, vol. 39, No. 2, pp.187-220, 1997.
- [8] Ypma T.J., Historical development of Newton-Raphson method, SIAM Review, vol. 37, No. 4, pp.531-551, 1995.
- [9] Traub J.F., Iterative methods for the solution of equation, Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall, 1964.
- [10] Julia G., sur les equations fonctionelles, Journal de mathematiques pures et appliquees, Vol. 4, pp.47-245, 1918.
- [11] Mandelbrot B., The fractal geometry of nature, W. H. Freeman and Company, New York, 1982.
- [12] Noor M. A., Waseem M., Noor I., Ali M. A., New iterative technique for solving nonlinear equations, Applied mathematics and computations, Vol. 265, pp.1115-1125, 2015.
- [13] Kang S. M., Ramay S. M., Tanveer M., Nazeer v., "Polynomiography via an iterative method corresponding to Simpson's 1/3 rule", Journal of Nonlinear Science and Applications, Vol. 9, pp.967-976, 2016.
- [14] Kalantari B., Alternating sign matrices and polynomiography, The Electronic Journal of combinatorics, Vol. 18, Issue (2), pp.1-22, 2011.
- [15] Kang S. M., Alsulami H. H., Rafiq A., Shahid A. A., "S-iteration scheme and polynomiography", Journal of Nonlinear Science and Applications, Vol. 8, pp.617-627, 2015.
- [16] Tanveer M., shahid A. A., Ali F., Kwun Y. Ch., New S-iteration scheme and polynomiography. Conference Paper, <https://www.researchgate.net/publication/275580067>
- [17] Kotarski W., Gdawiec K., Lisowska A., Polynomiography via Ishikawa and Mann Iterations, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7431, pp. 305-313, 2012.
- [18] Gdawiec K., Kotarski W., Lisowska A., Polynomiography Based on the Nonstandard Newton-Like Root Finding Methods, Abstract and

- Applied Analysis, Vol. (2015), Article ID 797594, pp.1-19, (2015).
- [19] Rafiq A., Tanveer M., Nazeer W., Polynomiography via modified Jungck, modified Jungck Mann and modified Jungck Ishikawa iteration schemes, Pan American methematical journal, vol. 24, No. 4, pp.66-95, 2014.
- [20] Gdawiec K., Perturbation Mappings in Polynomiography, Advances in Intelligent Systems and Computing, Vol. 391, pp. 499-506, 2015.
- [21] Gdawiec K., Kotarski W., Lisowska A., Polynomiography for Square Systems of Equations with Mann and Ishikawa Iterations, WSCG 2016 Short Papers Proceedings, pp. 1-5, 2016.
- [22] Naseem A., Attari M. Y., Awan M. W., "Polynomiography via modified Golbabai and Javidi's method", Science International (Lahore), Vol. 28, No. 2, pp.867-871, 2016.
- [23] Susanto, H., Karjanto, N., Newton's method's basins of attraction revisited, Applied mathematics and computations, Vol. 215, pp.1084-1090, 2009.
- [24] Gdawiec, K., Polynomigraphy and various convergence test, 21st international conference in central Europe on computer graphics, visualization and computer vision, plzen, Czech Republic, Vaclav Skala-Union Agency, pp 15-20, 2013.
- [25] Gdawiec, K. Switching Processes in Polynomiography, Nonlinear Dynamics 87(4), 2235-2249, 2017.
- [26] Gdawiec, K. Mandelbrot- and Julia-like Rendering of Polynomiographs. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8671, pp. 25-32, 2014.
- [27] Bisheh-Niasar, M., Saadatmandi A., Some Novel Newton-Type Methods for Solving Nonlinear Equations, Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, accepted, 2017.