

دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۹/۱۸

پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۷/۱۲

خواص متریک و ترکیباتی مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس

خدیجه فتحعلیخانی^{۱*}، علیرضا اشرفی^۲

^۱ محقق دورهٔ پسادکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

fathalikhani.kh@ut.ac.ir

^۲ استاد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

ashrafi@kashanu.ac.ir

چکیده

یک ابرمکعب n -بُعدی Q_n گرافی است که رأس‌های آن n -تایی‌های دودویی هستند و دو رأس با یکدیگر مجاورند، هرگاه به‌طور دقیق در یک مؤلفه متفاوت باشند. ابرمکعب‌ها و نیز زیرگراف‌های آن‌ها به‌دلیل کاربردهای فراوان در علوم مختلف، به‌خصوص در علم کامپیوتر، بسیار مورد توجه دانشمندان مختلف بوده‌اند. برخی از زیرگراف‌های آن‌ها مانند مکعب‌های فیوناتچی و مکعب‌های لوکاس در شبکه‌های ارتباطی به‌کار می‌روند. در این مقاله، پس از بیان مختصری از کاربردهای این دو دسته از مکعب‌ها، به گزارش یافته‌های متریک و ترکیباتی خود و دیگران دربارهٔ آن‌ها می‌پردازیم. سپس، برخی مسائل باز در این رابطه را که خود به بررسی آن‌ها پرداخته و نتایج یافته‌ایم، مطرح می‌کنیم. در ادامه، نرم‌افزار Sage که در محاسبات مربوط به این مکعب‌ها در ابعاد بالا به‌کار می‌رود، به‌طور خلاصه و گذرا معرفی خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: ابرمکعب، مکعب فیوناتچی، مکعب لوکاس.

۱. مفاهیم مقدماتی

ابتدا به بیان مفاهیم مقدماتی از نظریهٔ گراف که مورد نیازند، می‌پردازیم. گفتنی است که در سراسر این مقاله منظور از گراف، یک گراف ساده (بدون طوقه و یال مکرر)، همبند و غیرجهت‌دار است. مجموعه رأس‌های گراف G را با $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را با $E(G)$ نشان می‌دهیم. گراف G' را که مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های آن به ترتیب زیر مجموعه‌هایی از مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های G هستند، یک زیرگراف از G می‌نامیم. همچنین، منظور از یک رشته، دنباله‌ای از یکسری حروف و اعداد است. تعداد این حروف و اعداد را طول رشته می‌گوییم. اگر عناصر رشته فقط 0 و 1 باشند، آن را یک رشتهٔ دودویی می‌نامیم. به بیان دیگر، هر عضو از $\{0,1\}^n$ یک رشتهٔ دودویی به طول n است؛ برای مثال، 101001 و 111 رشته‌های دودویی به ترتیب، به طول‌های شش و سه هستند. فاصلهٔ همینگ بین دو رشته با طول برابر، تعداد مکان‌ها (مؤلفه‌ها) بی است که این دو رشته با یکدیگر تفاوت دارند؛ برای مثال، فاصلهٔ همینگ بین دو رشته 105647 و 107847، دو است.

برای هر $n \geq 1$ ، قرار دهید:

$$B_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid b_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$$

که در آن، $B = \{0,1\}$. یک n -مکعب Q_n گرافی است که مجموعه رأس‌های آن B_n است و در آن، دو رأس $b_1 b_2 \dots b_n$ و $b'_1 b'_2 \dots b'_n$ مجاورند اگر و تنها اگر به‌طور دقیق یک $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ موجود باشد که به‌ازای آن نابرابری $b_i \neq b'_i$ رخ دهد. به عبارتی، فاصلهٔ همینگ آن‌ها برابر با یک باشد. به این گراف ابرمکعب n -بعدی نیز گفته می‌شود. روشن است که $|V(Q_n)| = 2^n$.

یک مسیر در گراف G دنباله‌ای از یال‌های G است؛ به‌طوری‌که دنباله‌ای از رأس‌های متمایز آن‌ها را به یکدیگر وصل می‌کنند. یک مسیر همیلتنی در گراف جهت‌دار یا غیرجهت‌دار G مسیری است که از هر رأس G به‌طور دقیق یک بار بگذرد. یک دور همیلتنی، یک مسیر همیلتنی است که دور باشد. گرافی را که یک دور همیلتنی داشته باشد، یک گراف همیلتنی می‌نامیم.

ثابت می‌شود که ابرمکعب‌ها مسیر همیلتنی و نیز دور همیلتنی دارند.

فاصلهٔ بین دو رأس u و v از گراف G را با $d_G(u, v)$ نشان می‌دهیم و آن را طول کوتاه‌ترین مسیر موجود بین این دو رأس تعریف می‌کنیم. در صورتی که گراف با توجه به متن مشخص باشد، برای سادگی از نماد $d(u, v)$ استفاده می‌کنیم. در [۱] و [۲] نشان داده شده است که اگر u و v دو رأس مجزا از ابرمکعب n -بعدی Q_n باشند، $d(u, v) = j$ اگر و تنها اگر u و v به‌طور دقیق در j مؤلفه از هم متفاوت باشند. خروج از مرکز رأس v از گراف همبند G را با $e_G(v)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت بزرگ‌ترین فاصله بین رأس v و هر رأس دیگر از گراف G تعریف می‌کنیم. قطر گراف G ، $diam(G)$ ، بزرگ‌ترین مقدار خروج از مرکز در میان تمام رأس‌های گراف و به‌عبارتی، بزرگ‌ترین فاصلهٔ بین هر دو رأس دلخواه از گراف است. شعاع G کوچک‌ترین خروج از مرکز موجود در گراف است و با $rad(G)$ نشان داده می‌شود. مرکز گراف G ، $Z(G)$ مجموعه تمام رأس‌هایی از G است که خروج از مرکز آن‌ها برابر با شعاع است، و رأس v را مرکزی می‌نامیم هرگاه خروج از مرکز آن برابر با شعاع باشد.

گراف همبند G میانی نامیده می‌شود هرگاه هر سه‌تایی u, v و w از رأس‌های آن یک رأس میانی یکتا داشته باشند. رأس میانی رأسی مانند x است؛ به‌طوری‌که:

$$d(u, x) + d(x, v) = d(u, v),$$

$$d(v, x) + d(x, w) = d(v, w),$$

$$d(u, x) + d(x, w) = d(u, w).$$

به‌راحتی ثابت می‌شود که ابرمکعب‌ها گراف‌های میانی هستند. برای این کار، رأس میانی x از یک سه‌تایی u, v و w با استفاده از قاعدهٔ اکثریت در هریک از مؤلفه‌های آن‌ها به‌دست می‌آید. قاعدهٔ اکثریت چنین عمل می‌کند که اگر حداقل دو تا از u_i, v_i و w_i برابر با صفر باشند، $x_i = 0$ و در غیراین صورت $x_i = 1$. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه [۲] را ببینید.

فرض کنیم G گرافی همبند است. زیرگراف H از G را

بستار متعددی این رابطه را که به صورت کوچکترین رابطه متعددی شامل Θ تعریف می‌شود، با Θ^* نشان می‌دهیم. اگر G یک دور با طول زوج باشد، Θ شامل تمام زوج یال‌های مقابل هم است. بنابراین، Θ^* دارای n کلاس هم‌ارزی است و در واقع در این حالت $\Theta^* = \Theta$. از طرف دیگر، هر یال از یک دور با طول فرد با دو یال مقابل آن در رابطه Θ است. در این حالت، Θ^* تنها یک کلاس هم‌ارزی دارد. وینکلر در سال ۱۹۸۴ نشان داد که گراف همبند G مکعب جزئی است اگر و تنها اگر G دوبخشی بوده و $\Theta^* = \Theta$ [۵]. بنابراین، برای مکعب‌های جزئی می‌توان از Θ -کلاس‌ها به جای Θ^* -کلاس‌ها صحبت کرد. همچنین، یال‌های e و f از گراف G در رابطه τ هستند هرگاه $e = f$ و یا آن‌ها مسیری محذب روی سه رأس تشکیل دهند. به بیان دیگر، اگر $e = uv$ و $f = vw$ ، آن‌گاه ef ، اگر $e = f$ و یا $uw \notin E(G)$ و v تنها همسایه مشترک u و w باشد [۶].

حاصل ضرب دکارتی دو گراف G و H که با $G \square H$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن حاصل ضرب دکارتی $V(G) \times V(H)$ بوده و در آن دو رأس (g, h) و (g', h') مجاورند، هرگاه $g = g'$ یا $hh' \in E(H)$ یا $gg' \in E(G)$ و $h = h'$. گفتنی است که بعضی از نویسندگان به جای حاصل ضرب دکارتی، از اصطلاح حاصل ضرب مربع استفاده می‌کنند. عمل حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها، در حد یک‌ریختی، جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است و به همین دلیل، برای نشان دادن حاصل ضرب دکارتی گراف‌های G_1, G_2, \dots, G_k از نماد $\square_{i=1}^k G_i$ استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ رأسی از $G = \square_{i=1}^k G_i$ است. زیرگرافی از G که در آن تمام مؤلفه‌های v به جز v_i را ثابت نگه داشته‌ایم، با G_i یک‌ریخت است. ساده‌ترین گراف‌های حاصل از ضرب دکارتی، ابرمکعب‌ها هستند. فرض کنیم S مجموعه‌ای از q عنصر و d یک عدد صحیح مثبت است، گراف همینگ $H(d, q)$ گرافی است با مجموعه رأس‌های S^d ، رشته‌های به طول d از عناصر S که در آن، دو رأس با هم مجاورند هرگاه فاصله همینگ آن‌ها برابر با یک باشد. به بیان

یک زیرگراف طول-پایا از G می‌نامیم، اگر برای هر دو رأس $u, v \in V(H)$ منظور از یک زیرگراف محذب از G ، زیرگرافی است که با در نظر گرفتن هر دو رأس دلخواه از آن، تمام کوتاه‌ترین مسیرهای ممکن بین آن دو رأس در G ، در آن زیرگراف نیز باشند. یک زیرگراف طول-پایا از ابرمکعب را مکعب جزئی می‌نامیم. توجه به این نکته مهم است که گراف‌های میانی، مکعب‌های جزئی هستند. (بخش ۳، ۲ از [۲] را ببینید.)

اگر G یک گراف باشد، زیرمجموعه D از مجموعه رأس‌های G را مجموعه غالب می‌نامیم اگر هر رأس در $V(G) \setminus D$ حداقل با یکی از رأس‌های D مجاور باشد. عدد غالب که با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین اندازه مجموعه غالب در G است. عدد ۲-بسته‌بندی، متغیری از گراف، بسیار شبیه به عدد غالب است. مجموعه $X \subseteq V(G)$ را ۲-بسته‌بندی می‌نامیم اگر برای هر دو رأس متمایز u و v از X ، $d(u, v) > 2$ عدد ۲-بسته‌بندی $\rho(G)$ بزرگ‌ترین اندازه ۲-بسته‌بندی‌های G است. ایمریچ و همکارانش در [۳] ثابت کرده‌اند که برای هر گراف G ، $\gamma(G) \geq \rho(G)$.

یک مجموعه رأسی مستقل از گراف G ، زیرمجموعه‌ای از رأس‌های آن است؛ به طوری که هیچ دو عضو از آن یالی از G نباشند. عدد استقلال رأسی یا به طور خلاصه، عدد استقلال گراف G اندازه بزرگ‌ترین مجموعه رأسی مستقل در آن است. این عدد را با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم. به طور مشابه، یک مجموعه یالی مستقل در گراف G ، زیرمجموعه‌ای از یال‌های آن است؛ به طوری که هیچ دو یال از آن رأس مشترک نداشته باشند. عدد استقلال یالی گراف G ، اندازه بزرگ‌ترین مجموعه یالی مستقل از آن است. این عدد را با $\beta(G)$ نشان می‌دهیم.

رابطه ژوکویچ-وینکلر که با Θ نشان داده می‌شود، روی مجموعه یال‌های گراف به صورت زیر تعریف می‌شود [۴ و ۵]:
 یال‌های $e = xy$ و $f = uv$ از G در رابطه Θ هستند و می‌نویسیم $e \Theta f$ ، اگر و تنها اگر

$$d(x, u) + d(y, v) \neq d(x, v) + d(y, u).$$

Θ انعکاسی و تقارنی است، اما لزوماً متعددی نیست.

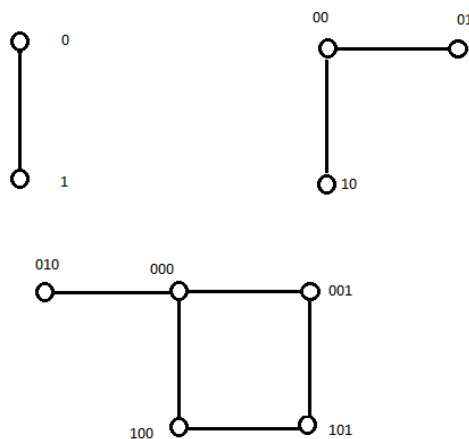
به‌طور طبیعی بر Q_n نشانده [۹].

دربارهٔ مکعب‌های فیبوناتچی لازم است بدانیم علاوه بر اینکه بسیاری از خواص ابرمکعب‌ها را دارند و بسیاری از الگوریتم‌های ابرمکعب‌ها درخصوص آن‌ها نیز صادق‌اند، خود نیز ویژگی‌های خاصی دارند که مطالعهٔ آن‌ها را پراهمیت می‌کند [۸ و ۱۰]. برای مثال، مرتبهٔ آن‌ها بسیار آرام‌تر از ابرمکعب‌ها رشد می‌کنند و این خاصیتی بسیار مهم برای شبکه‌های اتصالی داخلی است. به همین دلیل، مکعب‌های فیبوناتچی به‌عنوان مدلی برای این نوع شبکه‌ها به‌کار می‌روند [۸ و ۱۱].

اعداد فیبوناتچی به‌صورت $F_0 = 0, F_1 = 1$ و برای $n \geq 2$ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ تعریف می‌شوند. تابع مولد دنبالهٔ $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ به‌صورت زیر است:

$$\sum_{n \geq 0} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$$

برای هر $n \geq 1$ ، رشته‌های دودویی به طول n را که در آن‌ها هیچ دو ۱ متوالی وجود ندارد، رشته‌های فیبوناتچی به طول n نامیده و با C_n نشان می‌دهیم. در [۱۲] ثابت شده که F_{n+2} اندازهٔ مجموعه رشته‌های دودویی به طول n است که دو ۱ متوالی ندارند. به عبارتی، برای هر $n \geq 1$ ، $|C_n| = F_{n+2}$. بنابراین، تعریف، $\Gamma_2 = K_2$ که در آن K_n گراف کامل n رأسی است و یا Γ_2 مسیری با سه رأس است. همچنین، برای سهولت قرار می‌دهیم $\Gamma_0 = K_1$. در شکل‌های (۱) و (۲) و (۳) مکعب‌های Γ_n برای n ‌های کوچک رسم شده‌اند.



شکل (۱): مکعب Γ_n برای $n = 1, 2, 3$

دیگر، گراف همینگ $H(d, q)$ حاصل ضرب دکارتی d گراف کامل K_q است. با توجه به تعریف، $H(d, 2)$ ابرمکعب Q_d است. در واقع، ابرمکعب Q_d حاصل ضرب دکارتی d کپی K_2 است.

عدد رنگی گراف G که با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین تعداد رنگ‌هایی است که می‌توان به‌وسیلهٔ آن‌ها رأس‌های G را چنان رنگ کرد که هیچ دو رأس مجاور، رنگ یکسان نداشته باشند. شاخص رنگی یا همان عدد رنگی یالی، کمترین تعداد رنگ‌هایی است که بتوان به‌وسیلهٔ آن‌ها یال‌های گراف G را چنان رنگ کرد که هیچ دو یال مجاوری هم‌رنگ نباشند. این عدد با $\chi'(G)$ نشان داده می‌شود.

۲. مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس

در این بخش، پس از تعریف مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس، به بیان خواص ترکیباتی آن‌ها می‌پردازیم. شایان ذکر است که برخی از ویژگی‌های مکعب‌های فیبوناتچی در [۷] جمع‌آوری شده‌اند، اما آنچه در این مجموعه انجام شده، گردآوری خواص بیشتری از مکعب‌های فیبوناتچی و نیز خواص مکعب‌های لوکاس و در واقع ارائهٔ مقایسه‌ای از آن‌هاست.

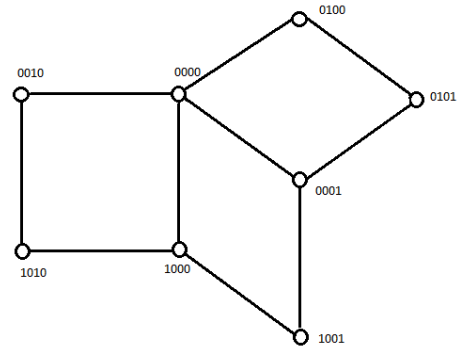
۱.۲. تعریف مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس

هسو در سال ۱۹۹۳ مکعب‌های فیبوناتچی را تعریف کرد [۸]. هدف او از این کار، یافتن گراف‌ها (یا شبکه‌های) بیشتری بود که خواصی مشابه با خواص ابرمکعب‌ها داشته باشند، ولی مرتبه مجموعه رأس‌های آن‌ها توانی از دو نباشد. برای $n \geq 1$ قرار دهید:

$$\mathcal{F}_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \in \mathbf{B}_n \mid b_i b_{i+1} = 0, 1 \leq i \leq n-1\}$$

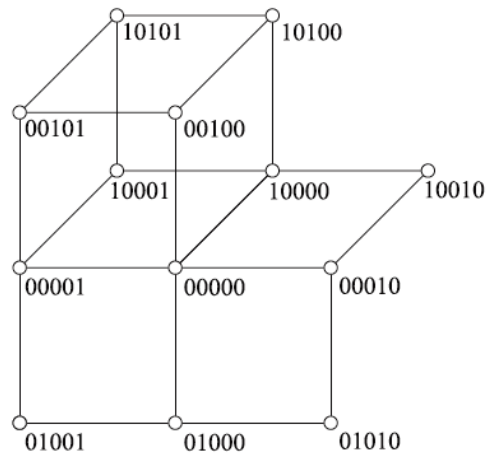
درواقع \mathcal{F}_n شامل تمام رشته‌های دودویی با طول n است که هیچ دو ۱ متوالی ندارند. مکعب فیبوناتچی Γ_n ($n \geq 1$)، گرافی است با مجموعه رأس‌های \mathcal{F}_n که در آن دو رأس مجاورند هرگاه به‌طور دقیق در یک مؤلفه متفاوت باشند یا به‌عبارتی، فاصلهٔ همینگ آن‌ها برابر با یک باشد. در واقع، Γ_n گرافی است دوبخشی که از Q_n با حذف تمام رأس‌هایی که حداقل دو ۱ متوالی دارند، به‌دست می‌آید. توجه داریم که Γ_n را می‌توان

باشد. با توجه به تعریف و همان‌طور که شکل (۴) نشان می‌دهد،
 $\Lambda_1 = K_1$ ، $\Lambda_2 = P_3$ و $\Lambda_3 = K_{1,3}$. رأس‌های مکعب
 لوکاس را رشته‌های لوکاس می‌نامیم. اگر \hat{C}_n مجموعه همه
 رشته‌های لوکاس به طول n باشد، از [۱۲] داریم $|\hat{C}_n| = L_n$.
 همچنین در این مرجع ثابت شده است که بیشترین تعداد 1ها که
 در یک رشته لوکاس به طول n قرار می‌گیرند، برابر با $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$



شکل (۲): مکعب فیوناتچی Γ_4

است. رأس‌های مکعب لوکاس Λ_n را می‌توان از رأس‌های
 مکعب‌های فیوناتچی Γ_{n-1} و Γ_{n-3} به‌صورت
 $V(\Lambda_n) = 0V(\Gamma_{n-1}) \cup 10V(\Gamma_{n-3})$ به‌دست آورد. جالب
 توجه است که مکعب‌های لوکاس نیز کاربردهای وسیعی در
 زمینه‌های مختلف دارند [۹، ۱۲-۱۷]؛ برای مثال، این مکعب‌ها در
 سیستم‌های چندپردازنده، بسیار پر کاربردند [۱۲].



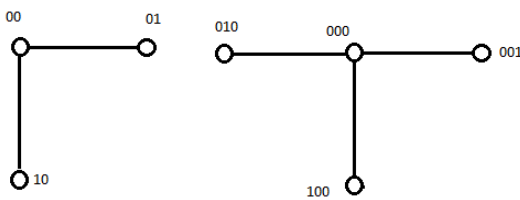
شکل (۳): مکعب فیوناتچی Γ_5

برای $n \geq 1$ و $0 \leq k \leq n$ ، منظور از $\Gamma_{n,k}$ مجموعه
 رأس‌هایی از Γ_n است که شامل k تا 1 هستند. بنابراین،
 $\Gamma_{n,k}$ مجموعه رأس‌هایی از Γ_n است که در فاصله k از 0^n قرار
 دارند. $\Lambda_{n,k}$ نیز به‌طور مشابه تعریف می‌شود. در حالت خاص،
 $\Gamma_{n,0} = \Lambda_{n,0} = \{0^n\}$ همچنین،

$$\Gamma_{n,1} = \Lambda_{n,1} = \{10^{n-1}, 010^{n-2}, \dots, 0^{n-1}1\}.$$

از تعریف نتیجه می‌شود که هر رأس از $\Gamma_{n,k}$ با k رأس از

$$|V(\Gamma_{n,k})| = \binom{n-k+1}{k}, \text{ همچنین، } \Gamma_{n,k-1} \text{ مجاور است.}$$



شکل (۴): مکعب Λ_n برای $n = 2, 3$

برای رشته دودویی $b = b_1 b_2 \dots b_n$ ، مکمل دودویی آن را
 با \bar{b} نشان می‌دهیم که در آن به‌جای هر مؤلفه، مکمل دودویی آن
 را قرار می‌دهیم. منظور از مکمل دودویی 0، 1 و مکمل دودویی
 1، 0 است. همچنین، $b^R = b_n b_{n-1} \dots b_1$ معکوس b است.
 اگر b و c دو رشته دودویی با طول یکسان باشند، $b+c$

به‌طور مشابه، اعداد لوکاس به‌صورت
 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ ($n \geq 2$) که در آن $L_0 = 2$ و $L_1 = 1$
 تعریف می‌شوند. درواقع، L_n را می‌توان اندازه خانواده‌ای از
 زیرمجموعه‌های $\{1, \dots, n\}$ در نظر گرفت که در آن‌ها هیچ دو
 عدد صحیح متوالی و نیز زوج 1 و n همزمان موجود نباشند
 [۱۲]. تابع مولد دنباله $\{L_n\}_{n=0}^\infty$ برابر است با:

$$\sum_{n \geq 0} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

از Γ_n همه رأس‌هایی را که مؤلفه‌های ابتدایی و انتهایی آن‌ها
 همزمان 1 هستند، حذف می‌کنیم. به زیرگراف حاصل، مکعب
 لوکاس با بعد n می‌گوییم و آن را با Λ_n نشان می‌دهیم. به بیان
 دیگر، Λ_n گرافی است که رأس‌های آن رشته‌های دودویی به
 طول n هستند؛ به‌طوری‌که دو 1 متوالی ندارند و نیز مؤلفه‌های
 ابتدایی و انتهایی آن‌ها به‌طور همزمان 1 نیستند. همچنین، دو رأس
 با هم مجاورند هرگاه فاصله همینگ آن‌ها به‌طور دقیق با یک برابر

همچنین، هر رأس 1α از \mathcal{A}_n به‌طور دقیق با یک رأس از \mathcal{B}_n ، رأس 0α مجاور است. به این ترتیب، Γ_n به زیرگراف‌های Γ_{n-1} و Γ_{n-2} و F_n یال بین این دو زیرگراف تجزیه می‌شود. این تجزیه را به صورت $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \hat{+} \Gamma_{n-2}$ نشان می‌دهیم. بنابراین،

$$|E(\Gamma_n)| = |E(\Gamma_{n-1})| + |E(\Gamma_{n-2})| + F_n \quad (1)$$

که در آن، $|E(\Gamma_1)| = 1$ و $|E(\Gamma_0)| = 0$ ، $n \geq 2$.

توجه داریم که تجزیه Γ_n به Γ_{n-1} و Γ_{n-2} یکتا نیست [۱۸]؛ برای مثال، $\Gamma_4 = \Gamma_3 \hat{+} \Gamma_2$ را در نظر بگیرید که در آن Γ_3 و Γ_2 از رأس‌هایی حاصل شده‌اند که نخستین مؤلفه آن‌ها ۰ یا ۱ هستند. اما Γ_3 و Γ_2 را می‌توان با رأس‌هایی که مؤلفه انتهایی آن‌ها ۰ یا ۱ هستند، نیز به‌دست آورد. به بیان دیگر، می‌توان هر رشته از رأس‌های Γ_n را با معکوس آن جابه‌جا کرد. از تجزیه اساسی گراف Γ_n نتایج بسیاری به‌دست می‌آید؛ برای مثال، از اینکه $|V(\Gamma_0)| = 1$ و $|V(\Gamma_1)| = 2$ ، تجزیه اساسی نتیجه می‌دهد که $|V(\Gamma_n)| = F_{n+2}$. با توجه به این رابطه، استفاده از نام مکعب فیبوناتچی برای این گراف‌ها طبیعی جلوه می‌کند.

درباره مکعب‌های لوکاس نیز باید بگوییم که یک مکعب لوکاس با بعد n را می‌توان به‌طور بازگشتی به دو زیرگراف متمایز و یک‌ریخت با مکعب‌های فیبوناتچی به بعد $n-1$ و $n-3$ تجزیه کرد. به عبارتی، چون مجموعه \hat{C}_{n+3} را می‌توان به صورت $10C_n + 0C_{n+2}$ نوشت، پس $\Lambda_n = \Gamma_{n-1} \hat{+} \Gamma_{n-3}$. (یادآوری می‌کنیم که C_n مجموعه تمام رشته‌های فیبوناتچی به طول n و \hat{C}_n مجموعه تمام رشته‌های لوکاس به طول n است.)

توجه داریم که هر رأس از Γ_{n-3} به‌طور دقیق با یک یال به یک رأس از Γ_{n-1} وصل می‌شود؛ این یال در واقع یالی است که $10v0$ را به $00v0$ وصل می‌کند. بنابراین برای هر $n \geq 3$ ،

$$|E(\Lambda_n)| = |E(\Gamma_{n-1})| + |E(\Gamma_{n-3})| + F_{n-1}. \quad (2)$$

همچنین، به‌طور مستقیم می‌توان دید که $|E(\Lambda_1)| = 0$ و $|E(\Lambda_2)| = 2$. حال از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

جمع آن‌هاست که به‌طور مؤلفه‌ای و در پیمانه عدد دو محاسبه می‌شود. برای $1 \leq i \leq n$ ، منظور از e_i رشته دودویی به طول n است که در مکان i آن ۱ و در بقیه مکان‌ها ۰ قرار دارد. پس می‌توان نوشت:

$$\Gamma_{n,1} = \Lambda_{n,1} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

بین اعداد فیبوناتچی و اعداد لوکاس و همچنین مکعب‌های فیبوناتچی و مکعب‌های لوکاس روابط مهمی برقرارند که در بخش‌های بعدی به بیان آن‌ها می‌پردازیم.

۲.۲. تجزیه اساسی

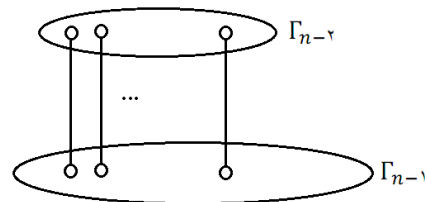
در این بخش، تجزیه اساسی مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس را که در یافتن خواص این مکعب‌ها بسیار مفیدند، ارائه می‌کنیم. برای هر $n \geq 1$ ، گراف Γ_n را می‌توان به گراف‌های Γ_{n-1} و Γ_{n-2} طوری تجزیه کرد که هر رأس از Γ_{n-2} به‌طور دقیق به یک رأس از Γ_{n-1} متصل باشد. این ساختار بازگشتی را که در شکل (۵) نشان داده شده است، تجزیه اساسی مکعب فیبوناتچی Γ_n می‌نامیم. در واقع، برای هر $n \geq 1$ ، مجموعه \mathcal{F}_n (که در بخش ۱.۲ معرفی شد) را می‌توان به دو مجموعه $\mathcal{B}_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \in \mathcal{F}_n \mid b_1 = 1\}$ و $\mathcal{A}_n = \{a_1 a_2 \dots a_n \in \mathcal{F}_n \mid a_1 = 0\}$ افزایش کرد. حال اگر تعریف کنیم $\mathcal{B}_0 = \{\lambda\}$ و $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ ، برای هر $n \geq 1$ می‌توان \mathcal{A}_n و \mathcal{B}_n را به‌صورت بازگشتی زیر تعریف کرد:

$$\mathcal{A}_n = \{1\alpha \mid \alpha \in \mathcal{B}_{n-1}\}$$

و

$$\mathcal{B}_n = \{0\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}_{n-1} \cup \mathcal{B}_{n-1}\}$$

چون رشته‌های \mathcal{A}_n با ۱۰ شروع می‌شوند، \mathcal{A}_n در واقع زیرگرافی از Γ_n را که با Γ_{n-2} یک‌ریخت است، القا می‌کند. به‌طور مشابه، \mathcal{B}_n نیز Γ_{n-1} از Γ_n را القا می‌کند.



شکل (۵): ساختار بازگشتی Γ_n

برقرارند. نخستین رابطه را به شکل زیر مطرح می‌کنیم:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_{n+2} - F_{n-2} \quad (n \geq 1)$$

از [۱۲] داریم:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}, \quad n \geq -1, \quad (4)$$

$$L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

توجه داریم که برای اثبات رابطه (۵) کافی است دو بار از

رابطه (۴) استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-k-2}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{k}{n-k} + 1 \right) \binom{n-k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}. \end{aligned}$$

اضافه می‌کنیم که در [۱۹] ثابت شده است که برای هر

$$F_{n+2} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{i+1}{n-k-i+1} \binom{n-2i}{k-i}, \quad n \geq 0$$

همچنین در [۹] با فرض اینکه $n \geq 4$ ، برای هر

$$F_{i-1} F_{n-i+1} + F_{i-2} F_{n-i} = F_{n-1}, \quad 3 \leq i \leq n-3$$

در همان مرجع [۹] برای هر $n \geq 2$ ، ثابت شده است:

$$F_{n-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} F_i L_{n-1-i}$$

در [۱۵] آمده است که برای هر $n \geq 1$ و $n \neq 5$ ،

$$F_{n+1} = \frac{5 \sum_{i=1}^{n-2} F_i F_{n+1-i} - 2(n+1)F_n}{n-5}$$

همچنین برای هر $n \geq 2$

$$F_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} F_i L_{n-i}$$

$$|E(\Gamma_{n-1})| < |E(\Lambda_n)| < |E(\Gamma_n)|$$

۳. برخی نتایج محاسباتی

در این بخش، چند نتیجه محاسباتی درباره این مکعب‌ها ارائه می‌دهیم. ابتدا از تعداد رأس‌ها، یال‌ها و مربع‌های آن‌ها شروع

می‌کنیم. در گراف G از نمادهای $V(G)$ ، $E(G)$ و $S(G)$ به ترتیب برای نمایش مجموعه رأس‌ها، مجموعه یال‌ها و مجموعه مربع‌ها (۴-دورها) استفاده می‌کنیم. همچنین، اگر A یک

مجموعه باشد، $|A|$ اندازه آن است. از [۸] و [۱۲] داریم:

$$\text{الف. برای هر } n \geq 0, |V(\Gamma_n)| = F_{n+2}.$$

$$\text{ب. برای هر } n \geq 0, |E(\Gamma_n)| = (nF_{n+1} + 2(n+1)F_n)/5.$$

$$\text{ج. برای هر } n \geq 1, |V(\Lambda_n)| = L_n \text{ و } |V(\Lambda_0)| = 1.$$

$$\text{د. برای هر } n \geq 0, |E(\Lambda_n)| = nF_{n-1}.$$

توجه داریم که روابط دیگری نیز برای تعداد رأس‌ها و یال‌ها

در مراجع مختلف ارائه شده‌اند. در [۹] و [۱۵] ثابت شده است که

$$\text{برای هر } n \geq 1, |E(\Gamma_n)| = \sum_{i=1}^n F_i F_{n-i+1}, \text{ همچنین، در}$$

[۱۵] آمده است که برای هر $n \geq 2$ ،

$$|E(\Lambda_n)| = \sum_{i=1}^{n-1} F_i L_{n-1-i}.$$

تعداد مربع‌های Γ_n ارائه شده است: برای هر $n \geq 1$ ،

$$|S(\Gamma_n)| = -\frac{3n}{25} F_{n+1} + \left(\frac{n^2}{10} + \frac{3n}{50} - \frac{1}{25} \right) F_n \quad (3)$$

رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد: برای هر

$$|S(\Gamma_n)| = \sum_{i=1}^{n-2} F_i |E(\Gamma_{n-1-i})|, \quad n \geq 3$$

به‌طور مشابه، برای تعداد مربع‌های مکعب لوکاس داریم: برای

$$\text{هر } n \geq 5, |S(\Lambda_n)| = \sum_{i=0}^{n-4} L_i |E(\Gamma_{n-3-i})|$$

همچنین، روابط زیر بین تعداد رأس‌ها، یال‌ها و مربع‌های

مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس برقرارند [۱۵]:

$$|E(\Gamma_n)| = |E(\Gamma_{n-1})| + |E(\Gamma_{n-2})| + |V(\Gamma_{n-2})|,$$

$$|S(\Gamma_n)| = |S(\Gamma_{n-1})| + |S(\Gamma_{n-2})| + |E(\Gamma_{n-2})|,$$

$$|E(\Lambda_n)| = |E(\Gamma_{n-1})| + |E(\Gamma_{n-3})| + |V(\Gamma_{n-3})|,$$

$$|S(\Lambda_n)| = |S(\Gamma_{n-1})| + |S(\Gamma_{n-3})| + |E(\Gamma_{n-3})|.$$

بین اعداد و رشته‌های فیوناتچی و لوکاس روابطی جالب

چند مقدار نخست از این دنباله‌ها را از [۱۲] و [۱۸] در جدول (۱) جمع‌آوری کرده‌ایم.

جدول (۱): مقادیر نخست از دنباله‌ها											
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	0	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
e_n	1	1	1	2	4	7	11	17	27	44	72
o_n	0	1	2	3	4	6	10	17	28	45	72
h_n	1	0	-1	-1	0	1	1	0	-1	-1	0
\hat{e}_n	1	1	1	1	3	6	10	15	23	37	61
\hat{o}_n	0	0	2	3	4	5	8	14	24	39	62
\hat{h}_n	1	1	-1	-2	-1	1	2	1	-1	-2	-1

در [۱۸] ثابت شده است که $h_{n+2} = h_{n+1} - h_n$ و سپس نتیجه شده است:

$$\hat{h}_{n+3} = h_{n+2} - h_n = -\hat{h}_n$$

و

$$\hat{h}_n = h_{n-1} - h_{n-3} = \hat{h}_{n-1} - \hat{h}_{n-2}.$$

همچنین،

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} h_n x^n = \frac{1-x}{1-x+x^2},$$

$$\sum_{n \geq 0} e_n x^n = \frac{1-x+x^4}{(1-x+x^2)(1-x-x^2)},$$

$$\sum_{n \geq 0} o_n x^n = \frac{x}{(1-x+x^2)(1-x-x^2)}.$$

به‌طور مشابه،

قضیه ۱.۳. [۱۲] دنباله $\{\hat{h}_n\}$ خواص زیر را دارد:

الف. برای $n \geq 1$ ، $\hat{h}_{n+6} = \hat{h}_n$ و مقادیر تکراری آن $1, -1, -2, -1, 1, 2$ هستند.

ب. تابع مولد $\hat{H}(x)$ برابر است با: $\hat{H}(x) = \frac{1}{1-x+x^2}$

اضافه می‌کنیم که در [۱۲] و [۱۸] روابط زیر نیز آمده‌اند:

حالت شاخص‌های $i(\Gamma_n) = \frac{|E(\Gamma_n)|}{F_{n+2}}$ و

$$i(\Lambda_n) = \frac{|E(\Lambda_n)|}{L_n}$$

الف. $i(\Gamma_{n-1}) < i(\Lambda_n) < i(\Gamma_n)$

ب. $\lim_{n \rightarrow \infty} i(\Lambda_n) = +\infty$

مجموعه رشته‌های فیبوناتچی به طول n را که در آن‌ها تعداد 1 عددی زوج است، با E_n و مجموعه رشته‌های فیبوناتچی به طول n را که تعداد 1 در آن‌ها عددی فرد است، با O_n نشان می‌دهیم. همچنین، اندازه این مجموعه‌ها را به ترتیب با e_n و o_n نشان می‌دهیم. به‌طور مشابه، \hat{E}_n و \hat{O}_n برای نشان دادن مجموعه رشته‌های لوکاس به طول n به‌کار می‌روند که تعداد 1 در آن‌ها به ترتیب زوج و فرد است. \hat{e}_n و \hat{o}_n نیز اندازه این مجموعه‌ها هستند. از [۱۸]

$$e_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k+1}{2k}, \quad (6)$$

$$o_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k}{2k+1}. \quad (7)$$

همچنین، از [۱۲] برای هر $n \geq 2$ داریم:

$$\hat{e}_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k}{2k} \frac{n}{n-2k}, \quad (8)$$

$$\hat{o}_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k-1}{2k+1} \frac{n}{n-2k-1}. \quad (9)$$

از [۱۲] و [۱۸] می‌دانیم که e_n و o_n در رابطه بازگشتی

زیر نیز صدق می‌کنند:

$$e_{n+2} = e_{n+1} + o_n,$$

$$o_{n+2} = o_{n+1} + e_n,$$

که در آن، $e_0 = 1$ ، $e_1 = 1$ و $o_0 = 0$ ، $o_1 = 1$. همچنین،

$$\hat{o}_n = o_{n-1} + e_{n-3},$$

$$\hat{e}_n = e_{n-1} + o_{n-3},$$

که در آن، $\hat{e}_0 = 1$ ، $\hat{o}_0 = 0$. روشن است که $\hat{e}_n + \hat{o}_n = L_n$

می‌خواهیم مقادیر e_n ، o_n و نیز \hat{e}_n و \hat{o}_n را با یکدیگر

مقایسه کنیم. برای این منظور، بگیرد $h_n = e_n - o_n$ و

حال به بررسی خاصیتی دیگر از مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس می‌پردازیم. در حالت کلی، یک خصوصیت ساختاری مهم گراف‌ها، تعداد رأس‌های موجود از یک درجه داده شده است. برای $n \geq 1$ و $0 \leq k \leq n$ ، فرض کنیم $a_{n,k}$ معرف تعداد رأس‌های درجه k از Γ_n است که با 1 شروع می‌شوند. به‌طور مشابه، فرض کنیم $b_{n,k}$ تعداد رأس‌های درجه k از Γ_n است که با 0 شروع می‌شوند. رأس x از درجه k را چنان اختیار می‌کنیم که با 1 شروع شود. در این صورت، این رأس در زیرگراف Γ_{n-2} از Γ_n از درجه $k-1$ است؛ بنابراین $a_{n,k} = a_{n-2,k-1} + b_{n-2,k-1}$. به‌طور مشابه، اگر y رأسی باشد که با 0 شروع شده و به‌عبارتی $y \in \mathcal{B}_n$ ، دو حالت ممکن است: اگر این رأس یک همسایه در \mathcal{A}_n داشته باشد، y در واقع با 00 شروع شده و رأسی از مجموعه \mathcal{B}_{n-1} است. در صورتی که y هیچ همسایه‌ای در \mathcal{A}_n نداشته باشد، رأسی از \mathcal{A}_{n-1} است. به این ترتیب، $b_{n,k} = b_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}$. بنابراین دنباله درجات در زیرگراف‌های القایی توسط \mathcal{A}_n و \mathcal{B}_n در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= a_{n-2,k-1} + b_{n-2,k-1} \quad (n \geq 2, k \geq 1), \\ b_{n,k} &= b_{n-1,k-1} + a_{n-1,k} \quad (n \geq 1, k \geq 1), \\ a_{0,k} &= a_{n,0} = 0 \quad (n \geq 0, k \geq 0), \\ a_{1,1} &= 1, \quad a_{1,k} = 0 \quad (k \geq 2), \\ b_{0,0} &= 1, \quad b_{0,k} = b_{n,0} = 0 \quad (n \geq 1, k \geq 1). \end{aligned}$$

همچنین، توابع مولد $a(x, y) = \sum_{n,k \geq 0} a_{n,k} x^n y^k$ و $b(x, y) = \sum_{n,k \geq 0} b_{n,k} x^n y^k$ در روابط زیر صدق می‌کنند [۱۹]:

$$\begin{aligned} a(x, y) - xy &= x^2 ya(x, y) + x^2 yb(x, y), \\ b(x, y) - 1 &= xyb(x, y) + xa(x, y) \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \frac{xy(1+x-xy)}{(1-xy)(1-x^2y) - x^3y}, \\ b(x, y) &= \frac{1}{(1-xy)(1-x^2y) - x^3y} \end{aligned}$$

در قضیه زیر، تعداد رأس‌های درجه k در مکعب‌های فیوناتچی محاسبه شده است.

$$e_n = \frac{F_n + h_n}{2},$$

$$o_n = \frac{F_n - h_n}{2},$$

$$\hat{e}_n = \frac{L_n + \hat{h}_n}{2},$$

$$\hat{o}_n = \frac{L_n - \hat{h}_n}{2}.$$

سپس در همان مرجع‌ها، با استفاده از روابط (۶)، (۷)، (۸) و (۹) فرمول‌های جدید زیر برای اعداد فیوناتچی و لوکاس ارائه شده‌اند:

$$\begin{aligned} F_n &= 2 \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k+1}{2k} - h_n \\ &= 2 \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k}{2k+1} + h_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_n &= 2 \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k}{2k} \frac{n}{n-2k} - \hat{h}_n \\ &= 2 \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k-1}{2k+1} \frac{n}{n-2k-1} + \hat{h}_n \end{aligned}$$

همچنین، در [۲۱] ثابت شده است که $h_n = 2e_n - F_{n+2}$ و سپس در [۱۲] روابط زیر برای F_{n+2} ارائه شده‌اند:

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k+3}{2k} \frac{n+3}{n-2k+3} - \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k+3}{2k} + \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k+1}{2k}, \\ F_{n+2} &= \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k}{2k+1} \frac{n+1}{n-2k} - \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k+1}{2k} - \sum_{k \geq 0} \binom{n-2k-1}{2k}. \end{aligned}$$

در ادامه، یادآوری می‌کنیم که رشته $a_1 a_2 \dots a_n$ متقارن نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $a_i = a_{n-i}$. تعداد رشته‌های متقارن در Γ_n برای هر $n \geq 2$ برابر است با $F_{\lfloor n/2 \rfloor - (-1)^n}$ [۱۸]. تعداد رشته‌های متقارن از Λ_n نیز در [۱۲] محاسبه شده است؛ این مقدار با $F_{\lfloor n/2 \rfloor + 1 - (-1)^n}$ برابر است.

هرگاه m زوج باشد و $\frac{\lfloor m/2 \rfloor + 1}{\lfloor m/2 \rfloor!}$ است هرگاه m فرد باشد.

وزن رأس $b_1 b_2 \dots b_n \in V(\Gamma_n)$ را به صورت $\sum_{i=1}^n b_i$ تعریف می‌کنیم. در [۱۹] آمده است که اگر k, n, w اعداد صحیحی باشند؛ به طوری که $k, w \leq n$ ، آنگاه تعداد رأس‌های Γ_n از درجه k و وزن w برابر است با:

$$\binom{w+1}{n-w-k+1} \binom{n-2w}{k-w}$$

همچنین، در همان [۱۹] آمده است که اگر $w \geq 0$ ، $n \geq k$ و $n \geq 2$ ، تعداد رأس‌های Λ_n از درجه k و وزن w برابر است با:

$$\binom{w-1}{2w+k-n} \binom{n-2w}{k-w} + 2 \binom{w}{2w+k-n} \binom{n-2w-1}{k-w}$$

به طور مشابه، تعداد رأس‌های Λ_n از درجه k و وزن w را با $l_{n,k,w}$ نشان می‌دهیم. در این صورت، با فرض اینکه $n \geq 1$ ، تعداد رأس‌های با وزن $w \leq n$ از Λ_n برابر است با:

$$\sum_{k=0}^n l_{n,k,w} = \binom{n-w}{w} + \binom{n-w-1}{n-2w}$$

با تعریف $\Lambda'_{n,2} = \{0^a 1010^{n-a-3} \mid 0 \leq a \leq n-1\}$ در Λ_n ، قضیه زیر اثبات شده است. (توجه داریم که $\Lambda'_{n,2}$ در واقع زیرمجموعه‌ای از $\Lambda_{n,2}$ است؛ به طوری که اگر عناصر آن را به صورت دایره‌ای قرار دهیم، زیررشته دودویی 101 ظاهر می‌شود.)

فرض کنیم $n \geq 17$. در این صورت، برای مکعب لوکاس Λ_n شرایط زیر برقرارند:

الف. رأس 0^n تنها رأس از درجه ماکسیمم n است.

ب. رأس‌های $\Lambda_{n,1}$ از درجه $n-2$ هستند.

ج. در میان رأس‌های با حداقل دو 1، تنها رأس‌های $\Lambda'_{n,2}$ از درجه $n-3$ هستند و رأس‌های دیگر همگی از درجه حداکثر $n-4$ هستند.

۴ مکعب‌های فیبوناتچی تعمیم یافته و توسعه یافته

فرض کنیم f یک رشته دودویی دلخواه بوده و $n \geq 1$ ؛ مکعب

قضیه ۲.۳. [۱۹] فرض کنیم $n \geq k \geq 0$. در این صورت، تعداد رأس‌های درجه k از Γ_n برابر است با:

$$\sum_{i=0}^k \binom{n-2i}{k-i} \binom{i+1}{n-k-i+1}$$

در این قضیه، چون مقدار برخی از عوامل صفر است، می‌توان مجموع را در بازه $\lceil (n-k)/2 \rceil$ و $\min(k, n-k)$ نوشت. لازم است یادآوری شود که برای $m, k \in \mathbb{Z}$ و $k < 0$ ، $\binom{m}{k} = 0$ و $\binom{m}{0} = 1$ لوکاس داریم:

قضیه ۳.۳. [۱۹] فرض کنیم $n \geq k \geq 0$ و $n \geq 2$. در این صورت، تعداد رأس‌های درجه k از Λ_n برابر است با:

$$\sum_{i=0}^k [2 \binom{i}{2i+k-n} \binom{n-2i-1}{k-i} + \binom{i-1}{2i+k-n} \binom{n-2i}{k-i}]$$

حال اگر برای هر $n, k \geq 0$ ، تعداد رأس‌های درجه k از Γ_n را با $f_{n,k}$ نشان دهیم، داریم:

قضیه ۴.۳. [۱۹] برای $0 \leq m \leq n$

$$f_{n,n-m} = \sum_{i=\lfloor m/2 \rfloor}^{m+1} \binom{n-2i}{n-m-i} \binom{i+1}{m-i+1}$$

قضیه بالا به صورت زیر بازنویسی شده است:

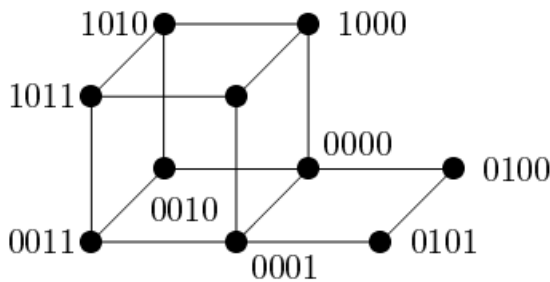
قضیه ۵.۳. [۱۹] فرض کنیم $m \geq 0$ و $n \geq 2m+2$. در این صورت، تعداد رأس‌های با درجه $n-m$ از Γ_n برابر است با:

$$f_{n,n-m} = \begin{cases} 1; & m = 0, \\ 2; & m = 1, \\ n+1; & m = 2, \\ 3n-8; & m = 3, \\ n^2/2 + 3n/2 - 21; & m = 4, \\ 2n^2 - 16n + 10; & m = 5. \end{cases}$$

به طور کلی، یک چندجمله‌ای برحسب n و از

درجه $\lfloor m/2 \rfloor$ است. بزرگ‌ترین ضریب آن $\frac{1}{(m/2)!}$ است

بعد n را با Γ_n^i ($0 \leq i \leq n$) و مجموعه رأس‌های آن را با V_n^i نشان می‌دهیم. V_n^i را به‌طور بازگشتی و به‌صورت $V_n^i = 0V_{n+1}^i \cup 10V_n^i$ تعریف می‌کنیم که در آن، V_{i+1}^i مجموعه تمام رشته‌های دودویی به طول i و V_{i+1}^i مجموعه تمام رشته‌های دودویی به طول $i+1$ است. توجه داریم $\Gamma_i^i = Q_i$ ، $\Gamma_n^0 = \Gamma_n$ و $\Gamma_{i+1}^i = Q_{i+1}$ در شکل (۶) نشان داده شده است.



شکل (۶): مکعب فیوناتچی توسعه‌یافته Γ_4^1

وایت‌هد و زاگالیا سالوی در قضیه ۲.۱ از [۲۷] ثابت کرده‌اند که مکعب‌های فیوناتچی توسعه‌یافته حاصل ضرب دکارتی مکعب‌های فیوناتچی و ابرمکعب‌ها هستند. به‌طور دقیق‌تر، آن‌ها ثابت کرده‌اند که $\Gamma_n^i = \Gamma_{n-1}^{i-1} \square K_2$ و از آنجا برای هر $0 \leq i \leq n$

$$\Gamma_n^i = \Gamma_{n-1}^{i-1} \square Q_i \quad (10)$$

بنابراین داریم:

$$\Gamma_n^i = \Gamma_{n-1}^0 \square Q_i = \Gamma_{n-1} \square Q_i \quad (11)$$

به این ترتیب، مطالعه مکعب‌های فیوناتچی توسعه‌یافته به مطالعه مکعب‌های فیوناتچی و ضرب دکارتی محدود می‌شود؛ برای مثال، می‌دانیم که اگر G و H مسیرهای همپلتنی داشته باشند، $G \square H$ یک دور همپلتنی دارد مگر آنکه G و H هر دو گراف‌هایی دوبخشی از مرتبه فرد باشند [۳]. حال چون مکعب‌های فیوناتچی و نیز ابرمکعب‌ها همگی مسیر همپلتنی دارند (ابرمکعب‌ها دور همپلتنی نیز دارند). بنابراین، مکعب‌های فیوناتچی توسعه‌یافته دور همپلتنی دارند. به‌طور مشابه، با توجه به اینکه حاصل ضرب دکارتی دو گراف میانی، میانی است، می‌توان نتیجه گرفت که مکعب‌های فیوناتچی توسعه‌یافته، میانی

فیوناتچی تعمیم‌یافته $Q_d(f)$ گرافی است که از Q_d با حذف تمام رأس‌هایی که f یک زیررشته از آن‌هاست، به‌دست می‌آید. به بیان دیگر، $Q_d(f)$ زیرگرافی از Q_d است که به‌وسیله تمام رشته‌های به طول d که f زیررشته آن‌ها نیست، القا شده است. بنابراین، $\Gamma_d = Q_d(11)$. این مکعب‌ها نخستین بار در [۲۲] تعریف شده‌اند. خیلی پیش‌تر، هسو و چانگ در سال ۱۹۹۳ در [۲۳] گراف‌هایی با تعریف مشابه معرفی کردند: گراف‌هایی که از Q_d با حذف تمام رأس‌هایی که دارای s تا 1 متوالی هستند، به‌دست می‌آیند. این گراف‌ها که با $Q_d(1^s)$ نشان داده شده‌اند، در [۲۰ و ۲۴] نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، مکعب فیوناتچی $Q_d(11)$ یک زیرگراف طول-پایا (و همچنین میانی) از Q_d است. تعیین کردن رشته‌های f و اعداد d که به‌زای آن‌ها $Q_d(f)$ زیرگرافی طول-پایا از Q_d باشد، مسئله‌ای مشکل است. در [۲۲] این مسئله برای تمام رشته‌های f با طول حداکثر پنج حل شده است.

آذریا و همکارانش در [۲۵] ثابت کرده‌اند که شرط لازم برای یک‌ریختی $Q_d(f)$ و $Q_d(f')$ آن است که $|f| = |f'|$ و سپس این سؤال مطرح شد که اگر $Q_d(f) \cong Q_d(f')$ ، آنگاه آیا بین $|f| (= |f'|)$ و d رابطه‌ای موجود است؟ حدس آن‌ها این بود که برای زوج دلخواه و غیربدیهی f و f' ، اگر $Q_d(f) \cong Q_d(f')$ ، $|f| \geq \frac{2}{3}(d+1)$. آن‌ها همچنین رشته‌های دودویی f و f' با طول $d-1$ که در آن‌ها $Q_d(f) \cong Q_d(f')$ مشخص کرده‌اند. این سؤال که آیا این دسته از مکعب‌ها همپلتنی هستند یا خیر، در [۲۰] پاسخ داده شده است. در آن مقاله، اثبات می‌شود که هر مکعب فیوناتچی تعمیم‌یافته یک مسیر همپلتنی دارد. شایان ذکر است که در [۲۰] مکعب‌هایی که دور همپلتنی می‌پذیرند، نیز مشخص شده‌اند.

با توجه به اینکه تنها یک‌سوم از مکعب‌های فیوناتچی همپلتنی هستند و در [۲۶] مکعب‌های فیوناتچی توسعه‌یافته را تعریف شده، فرض کنیم $V_i = V(\Gamma_i)$ و $V_{i+2} = 0V_{i+1} \cup 10V_i$ یک مکعب فیوناتچی توسعه‌یافته با

[۲۸] بررسی شده‌اند. برای $n \geq 1$ ، نگاشت معکوس β را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta: \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n$$

$$\beta(b_1 b_2 \dots b_n) = b^n = b_n b_{n-1} \dots b_1.$$

روشن است که β یک خودریختی از Γ_n است. در قضیه زیر ثابت شده است که β تنها خودریختی غیربدیهی از Γ_n است.

قضیه ۱.۵. [۲۸] برای هر $n \geq 1$ ، $Aut(\Gamma_n) \cong Z_2$.

گروه خودریختی مکعب‌های لوکاس نیز در [۱۷] بررسی شده است. ثابت شده است که $Aut(\Lambda_n)$ توسط β و α تولید می‌شود که در آن

$$\alpha: V(\Lambda_n) \rightarrow V(\Lambda_n)$$

$$\alpha(b_1 b_2 \dots b_n) = b_n b_1 \dots b_{n-1}$$

به این ترتیب برای هر $n \geq 3$ ، $Aut(\Lambda_n) \cong D_{2n}$.

لازم است یادآوری شود که دنباله‌های عددی مختلف به همراه خواص آن‌ها در سایت oeis.org جمع‌آوری شده‌اند و به این ترتیب، این سایت در واقع، دایرةالمعارفی از دنباله‌ها را به وجود آورده است [۲۹]. مدارهای مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس در [۳۰] مطالعه شده‌اند. از [۳۰] دنباله‌های مختلفی مانند A000358، A246998، A250114، A129526 و A001224 استخراج شده‌اند که همگی در این سایت و به نام نویسندگان آن موجودند.

مدار رأس $u \in V(G)$ را با نماد \bar{u} و اندازه آن را با $|\bar{u}|$ نشان می‌دهیم؛ برای مثال، رأس $u = 101010001$ را از Γ_9 در نظر می‌گیریم. همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، $Aut(\Gamma_9) \cong Z_2$. در واقع $Aut(\Gamma_9)$ توسط خودریختی‌های همانی و β تولید می‌شود که در آن $\beta(u_1 u_2 \dots u_n) = u_n u_{n-1} \dots u_1$. بنابراین

$$\overline{101010001} = \{101010001, 100010101\}$$

و در نتیجه $|\bar{u}| = 2$. به طور مشابه، $v = 101010000$ رأسی از Λ_9 است. در بخش پیش گفته شد که $Aut(\Lambda_9)$ توسط β و α تولید می‌شود. بنابراین،

$$Aut(\Lambda_9) = \{id, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^8, \beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \dots, \beta\alpha^8\}$$

در نتیجه،

هستند [۱۵]. (درباره همیلتنی و میانی بودن مکعب‌های فیبوناتچی در ادامه بحث خواهیم کرد.)

از رابطه (۱۰) روشن است که برای محاسبه تعداد رأس‌ها، تعداد یال‌ها و تعداد مربع‌ها در مکعب فیبوناتچی توسعه‌یافته، کافی است این اندازه‌ها را در مکعب فیبوناتچی متناظر بیابیم و سپس از خواص ضرب دکارتی [۲] استفاده کنیم. این اندازه‌ها در [۱۵] محاسبه شده‌اند:

$$|V(\Gamma_n^i)| = |V(\Gamma_{n-i})| \cdot |V(Q_i)| = F_{n+2-i} 2^i,$$

$$|E(\Gamma_n^i)| = |V(\Gamma_{n-i})| \cdot |E(Q_i)| + |E(\Gamma_{n-i})| \cdot |V(Q_i)|$$

$$= F_{n+2-i} i 2^{i-1} + |E(\Gamma_{n-i})| 2^i,$$

$$|S(\Gamma_n^i)| = |V(\Gamma_{n-i})| \cdot |S(Q_i)| + |E(\Gamma_{n-i})| \cdot |E(Q_i)|$$

$$+ |S(\Gamma_{n-i})| \cdot |V(Q_i)|$$

$$= F_{n+2-i} i(i-1) 2^{i-3} + |E(\Gamma_{n-i})| i 2^{i-1} + |S(\Gamma_{n-i})| 2^i$$

در آخر، همان‌طور که Γ_{n-1} بر Q_{n-1} می‌نشیند، Γ_n^i نیز بر Q_{n-1+i} می‌نشیند.

۵. مدارهای رأسی و تعبیرهای ترکیباتی آن‌ها

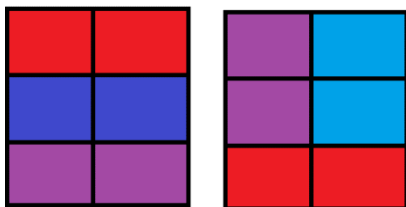
در این بخش، به برخی مفاهیم از نظریه گروه‌ها نیازمندیم که آن‌ها را به طور گذرا مطرح می‌کنیم. فرض کنیم Δ یک گروه و X یک مجموعه ناتهی هستند. می‌گوییم Δ بر X عمل می‌کند هرگاه تابع $\rho: \Delta \times X \rightarrow X$ که در آن $\rho(\delta, x) = x^\delta$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X$ و هر $\delta, \delta' \in \Delta$ ، $x^{\delta\delta'} = (x^\delta)^{\delta'}$ و نیز $x^e = x$. به این عمل، عمل گروه بر یک مجموعه می‌گوییم. در این عمل، منظور از مدار x مجموعه $\{x^\delta \mid \delta \in \Delta\}$ است. حال فرض کنیم G یک گراف است. عمل $Aut(G)$ بر $V(G)$ را در نظر بگیرید. مجموعه مدارهای حاصل از این عمل را با $O_V(G)$ و تعداد آن را با $|O_V(G)| = |o_V(G)|$ نشان می‌دهیم. این مدارها را مدارهای رأسی G می‌خوانیم. همچنین، از نماد $o_V(G, k) = |\{X \in O_V(G); |X| = k\}|$ برای نشان دادن تعداد مدارهای با اندازه k استفاده می‌کنیم.

گروه خودریختی مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس در [۱۷] و

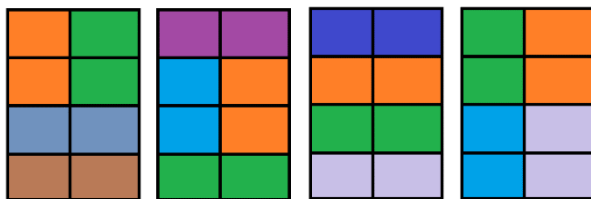
2×4 مستطیل‌ها به ترتیب، به دو و چهار روش متمایز توسط دو مینوها پوشانده می‌شوند که این اعداد نیز به ترتیب با $o_V(\Gamma_2)$ و $o_V(\Gamma_3)$ برابرند. در حالت کلی، این سؤال در [۳۰] پاسخ داده شده است. با توجه به آن، تعداد روش‌های مورد نظر برابر است با $o_V(\Gamma_n)$. (این نتیجه در [۲۹] با نام دنباله A001224 ثبت شده است.)

یکی دیگر از مسائل ترکیباتی که با $o_V(\Gamma_n)$ شمارش می‌شوند، افزایش‌های عددی مرتب‌شده از $n+1$ است؛ به طوری که جمع‌وندهای آن 1 و یا 2 باشند. در این باره، دو افزایش را متمایز گوئیم هرگاه یکی، از دیگری با انعکاس به دست نیاید؛ برای مثال، فرض کنیم $n=4$. افزایش‌های عددی مورد نظر از $n+1=5$ به ترتیب زیرند:

$$\begin{aligned} 5 &= 1+1+1+1+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+2+1+1 \\ &= 2+1+2 \\ &= 2+2+1 \end{aligned}$$



شکل (۷): پوشش‌های متمایز مستطیل 2×3 توسط دو مینوها



شکل (۸): پوشش‌های متمایز مستطیل 2×4 توسط دو مینوها

مشاهده می‌شود که به پنج روش متمایز می‌توان عدد 5 را چنان افزایش کرد که جمع‌وندهای افزایش از $\{1, 2\}$ باشند و ترتیب در آن‌ها اهمیت داشته باشد. توجه داریم که این عدد با $o_V(\Gamma_4)$ برابر است. این سؤال نیز در حالت کلی در [۳۰] پاسخ داده شده است. در این باره نیز پاسخ با $o_V(\Gamma_n)$ برابر است.

بنابراین $|\bar{v}|$ برابر است با هجده. توجه داریم که در Γ_9 و نیز در Λ_9 مدارهای مختلف با اندازه‌های متفاوت وجود دارند؛ برای مثال، مدار رأس $v' = 101010000$ دارای تنها سه عضو است:

$$\overline{101010000} = \{101010000, 010101000, 001010100, 000101010, 000010101, 100001010, 010000101, 101000010, 010100001\}.$$

مکعب فیبوناتچی دارای مدارهای رأسی از اندازه‌های یک و دو است. در قضیه زیر تعداد کل مدارهای رأسی و نیز تعداد مدارهای رأسی با اندازه‌های مختلف محاسبه شده است.

قضیه ۲.۵. [۳۰] با فرض $n \geq 2$ داریم:

$$\begin{aligned} o_V(\Gamma_n, 1) &= F_{\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \rfloor + 2}, \\ o_V(\Gamma_n, 2) &= \frac{1}{2} \left(F_{n+2} - F_{\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \rfloor + 2} \right), \\ o_V(\Gamma_n) &= \frac{1}{2} \left(F_{n+2} + F_{\lfloor \frac{n-(-1)^n}{2} \rfloor + 2} \right). \end{aligned}$$

نکته قابل توجه این است که اعداد $o_V(\Gamma_n)$ در حل برخی از مسائل شمارشی ترکیباتی به کار می‌روند. یکی از این مسائل ترکیباتی، مسئله‌ای است که پتن و گلمب در سال ۱۹۶۲ مطرح کردند [۳۱]: به چند روش می‌توان یک مستطیل $2 \times (n+1)$ را توسط دو مینوها پوشاند؟ (منظور از یک دو مینو، مستطیلی با ابعاد 2×1 و یا 1×2 است.) مسئله از تعداد روش‌های متمایز پوشش می‌پرسد. دو پوشش را متمایز گوئیم اگر یکی را نتوان از دیگری با انعکاس و یا چرخش به دست آورد؛ برای مثال، برای $n=2$ و $n=3$ مستطیل‌های مورد بررسی به ترتیب 2×3 و

گردنبندهای متمایز با n مهره سفید و سیاه که هیچ دو مهره سیاه در آن‌ها مجاور نیستند، در شکل (۱۰) نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که تعداد چنین گردنبندهایی ده است و این عدد با $c(9)$ برابر است. در حالت کلی، $c(n)$ تعداد گردنبندهای سفید و سیاه متمایز را می‌شمارد که در آن‌ها هیچ دو مهره سیاه مجاور نیستند [۳۰]. این دسته از اعداد نیز با نام دنباله $A000358$ در [۲۹] ثبت شده‌اند.

۶. کدهای تام در مکعب‌های فیبوناتچی

پیش از شروع بحث درباره وجود یا عدم وجود کدهای تام در مکعب‌های فیبوناتچی، به بیان مفاهیم موردنیاز می‌پردازیم. رأس دلخواه x از گراف G را در نظر بگیرید. منظور از همسایه‌های x ، مجموعه $N_G(x) = \{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$ است. همچنین، برای عدد صحیح نامنفی r و رأس u از G ، توپ به شعاع r و مرکز u ، مجموعه رأس‌هایی چون v است؛ به طوری که $d(u, v) \leq r$. برای سادگی، توپ‌های به شعاع یک را توپ می‌نامیم. منظور از یک کد در یک گراف، زیرمجموعه C از مجموعه رأس‌های گراف است که در آن هر دو رأس از C در فاصله حداقل سه هستند. به بیان دیگر، توپ‌های به مرکز این رأس‌ها، مجموعه‌های مجزا ایجاد می‌کنند.

می‌گوییم رأس u ، رأس v را می‌پوشاند، هرگاه v به توپی که u مرکز آن است، متعلق باشد. همچنین، زیرمجموعه S از مجموعه رأس‌های گراف G را یک مجموعه غالب می‌گوییم هرگاه هر رأس از G توسط حداقل یک رأس از S پوشانده شود. یک کد را تام می‌نامیم هرگاه یک مجموعه غالب نیز باشد. به طور معادل، توپ‌های ایجادشده به مرکز رأس‌های کد، یک افزاز از مجموعه همه رأس‌های گراف ایجاد کنند. به بیان دیگر، یک کد تام از یک گراف، زیرمجموعه C از مجموعه رأس‌های آن گراف است به طوری که هر رأس از گراف یا عضوی از C است و یا به طور دقیق با یک عضو از C مجاور است. به طور دقیق‌تر، برای $r \geq 1$ می‌توان r -کد تام را تعریف کرد که در آن، 1-کد تام همان مفهوم کد تام است که پیش‌تر معرفی کردیم.

حال در قضیه زیر تعداد مدارهای رأسی مکعب‌های لوکاس را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۳.۵. [۳۰] برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$o_V(\Lambda_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) L_d + F_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2} \right)$$

جالب توجه است که تعداد مدارهای رأسی مکعب‌های لوکاس نیز با برخی از مسائل شمارشی ترکیباتی متناظر است [۳۰]. توجه داریم که بین مجموعه‌رشته‌های لوکاس به طول n و مجموعه‌رشته‌های دوری از n مهره سفید و سیاه؛ به طوری که هیچ دو مهره سیاه مجاور نباشند، یک دوسویی برقرار است. منظور از دو دستبند متمایز سفید و سیاه با n مهره، رشته‌های دوری با n مهره سفید و سیاه هستند که با چرخش یا انعکاس یکی، دیگری حاصل نشود؛ برای مثال، مجموعه دستبندها با ده مهره سفید و سیاه در شکل (۹) نشان داده شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود، هیچ‌یک از آن‌ها با چرخش یا انعکاس از دیگری حاصل نمی‌شود. بنابراین، تعداد دستبندهای متمایز برابر با چهارده است. توجه داریم که هریک از دستبندهای شکل (۹)، در واقع نماینده یک مدار از Λ_{10} است. در نتیجه، $o_V(\Lambda_{10}) = 14$ تعداد دستبندهای سفید و سیاه متمایز با ده مهره را که دو مهره سیاه متوالی ندارند، می‌شمارد. این مسئله نیز در حالت کلی در [۳۰] با $o_V(\Lambda_n)$ پاسخ داده شده است. از قضیه ۳.۵ مقدار $o_V(\Lambda_n)$ برای n ‌های مختلف به صورت زیر است:

$$1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 9, 14, 16, \dots$$

این دنباله با نام $A129526$ در [۲۹] مشخص شده است. در روند اثبات یکی از قضیه‌ها در [۳۰] رابطه زیر معرفی می‌شود:

$$c(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) L_d. \quad (12)$$

عناصر دنباله حاصل از $c(n)$ به صورت زیرند:

$$1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 10, 15, \dots$$

منظور از دو گردنبند سفید و سیاه متمایز با n مهره، رشته‌های دوری با n مهره سفید و سیاه هستند که با چرخش یکی، دیگری حاصل نشود؛ برای مثال، فرض کنید $n = 9$. تمام

Γ_n برای $n \leq 3$ کد تام دارد. مکعب فیوناتچی Γ_4 در شکل (۲) و مکعب فیوناتچی Γ_5 در شکل (۳) نشان داده شده‌اند. از این شکل‌ها روشن است که Γ_4 و Γ_5 کد تام ندارند. در قضیه زیر اثبات می‌شود که برای $n \geq 6$ نیز مکعب فیوناتچی Γ_n کد تام ندارد.

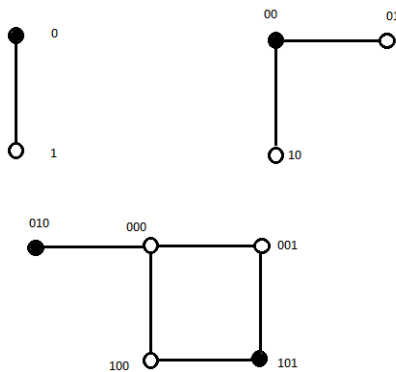
قضیه ۱.۶. [۳۲] فرض کنیم $n \geq 0$ عددی صحیح است. مکعب فیوناتچی Γ_n کد تام دارد اگر و تنها اگر $n \leq 3$.

۷. خواص متریک مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس

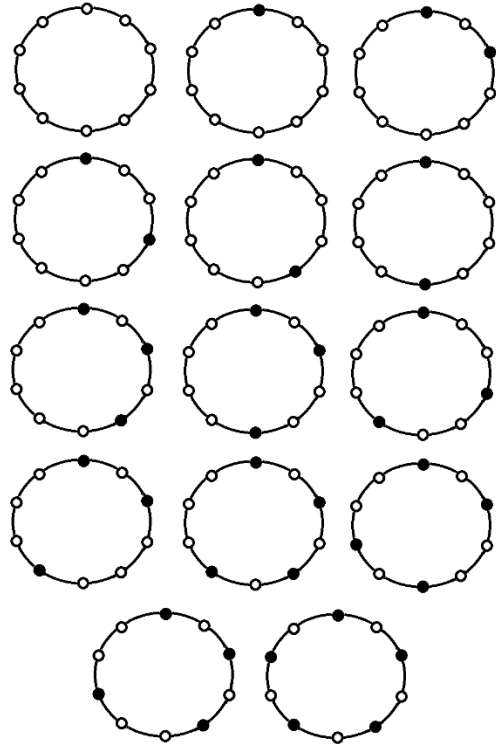
در [۸] هسو ثابت کرده که قطر Γ_n برابر با n است. همچنین، مونارینی و زاگالیا سالوی در [۱۸] نشان داده‌اند که شعاع Γ_n ، $\lceil n/2 \rceil$ است و سپس مرکز Γ_n را نیز محاسبه کرده‌اند. مرکز این گراف در حالتی که n زوج است، برابر با $\{0^n\}$ و در حالتی که n فرد است، برابر با $\{0^n\} \cup U_n$ است که در آن، U_n مجموعه‌رشته‌های به طول n است؛ به طوری که یک ۱ و دنبالهٔ ماکسیمال از ۰های به طول زوج دارند؛ برای مثال، $00100 \in U_5$ ولی $01000 \notin U_5$. در همان مرجع آمده است که در Λ_n ، اگر n زوج باشد، فقط یک جفت از رأس‌ها در فاصله‌ای به اندازه قطر از یکدیگرند، و اگر n فرد باشد، تعداد چنین زوج‌هایی برابر با $n-1$ است. از آنجا نتیجه شده است که برای هر $n \geq 1$

$$rad(\Lambda_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

$$Z(\Lambda_n) = \{0^n\}.$$

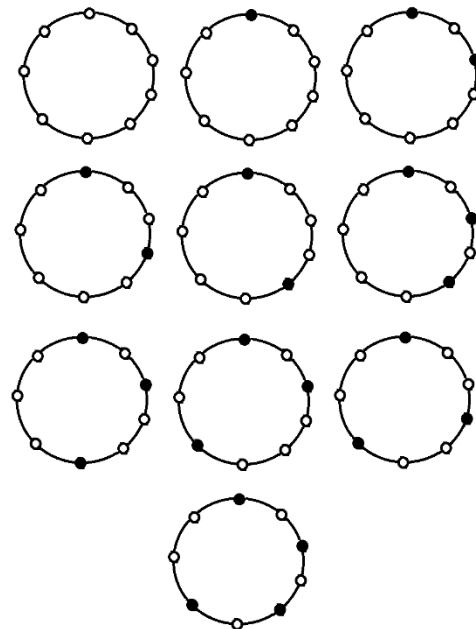


شکل (۱۱): کدهای تام در مکعب‌های فیوناتچی Γ_1 ، Γ_2 و Γ_3



شکل (۹): دستبندهای مختلف با ده مهره سفید و سیاه که در آن‌ها هیچ دو مهره سیاه مجاور نیستند.

وجود کدهای تام در گراف فیوناتچی Γ_n در [۳۲] بررسی شده است.



شکل (۱۰): گردنبندهای مختلف با نه مهره سفید و سیاه که در آن‌ها هیچ دو مهره سیاه مجاور نیستند.

همان‌طور که شکل (۱۱) نشان می‌دهد، مکعب فیوناتچی

مکعب فیوناتچی نتیجه شده است:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(\Gamma_n)}{n} = \frac{2}{5}$$

در [۳۴] شاخص وینر مکعب لوکاس به صورت زیر ارائه می‌شود: برای هر $n \geq 1$ ، $W(\Lambda_n) = nF_{n-1}F_{n+1}$ و از آنجا:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(\Lambda_n)}{n} = \frac{2}{5}$$

۱.۷ مسیره‌های همیلتنی در مکعب‌های فیوناتچی و

لوکاس

همان‌طور که پیش‌تر گفتیم، ابرمکعب‌ها مسیر همیلتنی و نیز دور همیلتنی دارند. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس نیز مسیر یا دور همیلتنی دارند؟ کنگ، ژنگ و شارما از تجزیه‌ی اساسی این مکعب‌ها استفاده کرده و نتیجه‌ی زیر را ثابت کرده‌اند:

قضیه ۲.۷ [۱۰] برای هر $n \geq 0$ ، مکعب‌های Γ_n مسیر همیلتنی دارند.

گفتنی است که مکعب‌های فیوناتچی یک دور همیلتنی دارند هرگاه تعداد رأس‌های آن‌ها زوج باشد. در صورتی که تعداد رأس‌ها فرد باشد، یک دور شامل همه‌ی رأس‌ها مگر یکی از آن‌ها دارند [۲۰]. در [۱۰] نیز آمده است که مکعب‌های فیوناتچی با تعداد رأس‌های زوج دارای دور همیلتنی هستند. زاگاگلیاسالوی در [۲۴] ثابت کرده که برای هر $n \geq 7$ ، هر یال از Γ_n به دورهایی با طول زوج متعلق است.

مکعب‌های لوکاس نیز در [۱۲] بررسی شده‌اند. در این مرجع ثابت شده است که این نوع از مکعب‌ها همیلتنی نیستند.

۲.۷ عدد استقلال رأسی و یالی

ابتدا به عدد استقلال مکعب‌های فیوناتچی می‌پردازیم. در [۱۸] ثابت شده است که برای هر $n \geq 0$

$$\alpha(\Gamma_n) = \left\lfloor \frac{F_{n+2}}{2} \right\rfloor$$

$$\alpha(\Gamma_n) = \max(e_n, o_n)$$

در [۱۲] عدد استقلال یالی مکعب Λ_n به صورت

قطر مکعب‌های لوکاس نیز در [۱۲] محاسبه شده است. ثابت شده است که اگر n زوج باشد، $\text{diam}(\Lambda_n) = n$ و در صورتی که n فرد باشد، $\text{diam}(\Lambda_n) = n - 1$. همچنین داریم:

قضیه ۱.۷ [۳۳] فرض کنیم $n \geq k \geq 1$. در این صورت، تعداد رأس‌های Γ_n با خروج از مرکز k برابر است با:

$$\binom{k}{n-k} + \binom{k-1}{n-k}$$

شاخص وینر متغیر دیگری است که بر مبنای فاصله تعریف می‌شود. شاخص وینر گراف همبند G با $W(G)$ نشان داده شده و به صورت مجموع فاصله‌های تمام زوج‌های نامرتب از رأس‌های G تعریف می‌شود. این متغیر در ریاضیات شیمی بسیار مهم است و مورد توجه ریاضی‌دانان و شیمی‌دانان بسیاری قرار گرفته است. فاصله متوسط گراف G ، $\mu(G)$ ، متغیر دیگری است که به صورت

$$\mu(G) = \frac{1}{\binom{|V(G)|}{2}} W(G)$$

برای محاسبه شاخص وینر گراف G ، می‌توان به طور معادل به محاسبه فاصله متوسط آن پرداخت. مولارد و کلاوزار در [۳۴] نشان داده‌اند که شاخص وینر یک مکعب فیوناتچی را می‌توان با اعداد فیوناتچی بیان کرد. در واقع، برای هر $n \geq 0$

$$W(\Gamma_n) = \sum_{i=1}^n F_i F_{i+1} F_{n-i+1} F_{n-i+2}$$

آن‌ها سپس در همان مرجع، فرمول بسته زیر را برای $W(\Gamma_n)$ ارائه دادند: برای هر $n \geq 0$

(۱۳)

$$W(\Gamma_n) = \frac{4(n+1)F_n^2}{25} + \frac{(9n+2)F_n F_{n+1}}{25} + \frac{6nF_{n+1}^2}{25}$$

به این ترتیب، چند مقدار نخست از دنباله $W(\Gamma_n)$ ، ۰، ۱، ۴، ۱۶، ۵۴، ۱۷۶، ۵۴۸ هستند. گفتنی است که شاخص وینر ابرمکعب n -بعدی نیز در [۱] محاسبه شده است:

$$W(Q_n) = 2^{2(n-1)} n$$

همچنین، از رابطه (۱۳) رفتار زیر برای فاصله متوسط

مکعب فیوناتچی Γ_n را با \mathcal{F}_n نشان دهیم، \mathcal{F}_n را می توان به مجموعه های $\mathcal{A}'_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \in \mathcal{F}_n \mid b_n = 1\}$ و $\mathcal{B}'_n = \{b_1 b_2 \dots b_n \in \mathcal{F}_n \mid b_n = 0\}$ تجزیه کرد که به ترتیب، رشته های فیوناتچی هستند که به 1 و 0 ختم می شوند. \mathcal{B}'_n مانند \mathcal{B}_n زیرگرافی یکریخت با Γ_{n-1} القا می کند. توجه داریم که این زیرگراف محدب است؛ زیرا یال های بین آن و زیرگراف القاشده توسط \mathcal{A}'_n (که با Γ_{n-2} یکریخت است) یک Θ -کلاس از Γ_n را تشکیل می دهند. تارانکو و وسل در [۳۸] نشان داده اند که زیرگراف های Γ_n که توسط \mathcal{B}'_n و \mathcal{B}_n القا می شوند، تنها زیرگراف های محدب از Γ_n هستند که با Γ_{n-1} یکریخت اند.

فرض کنیم $W_{uv} = \{w \mid d(u, w) < d(v, w)\}$. اگر F_{uv} مجموعه یال های بین W_{uv} و W_{vu} و همچنین U_{uv} مجموعه رأس های W_{uv} باشد که یک همسایه در W_{vu} دارند، آنگاه تعریف جدیدی از مکعب های فیوناتچی را می توان ارائه داد:

قضیه ۶.۷. [۳۸] فرض کنیم G یک گراف همبند دویخشی است. همچنین فرض کنیم $uv \in E(G)$ یالی از G است؛ به طوری که $deg(u) = n$ و $deg(v) = n-1$. در این صورت، G با Γ_n یکریخت است اگر و تنها اگر موارد زیر برقرار باشند:

- الف. U_{uv} در W_{uv} محدب است.
- ب. F_{uv} یک تطابق است که یک یکریختی بین U_{uv} و W_{vu} تعریف می کند.
- ج. W_{uv} با Γ_{n-1} و W_{vu} با Γ_{n-2} یکریخت هستند.
- د. $U_{vu} = W_{vu}$.

شایان ذکر است که با استفاده از قضیه ۶.۷ و در همان مرجع، الگوریتمی برای شناخت مکعب های فیوناتچی ارائه شده است که در زمان $O(|E(G)| \log(V(G)))$ اجرا می شود.

۸. متغیرها

در این بخش، به بررسی برخی از متغیرهایی که درباره این

$\beta(\Lambda_n) = \min(\hat{e}_n, \hat{o}_n)$ و نیز $\beta(\Lambda_n) = \left\lfloor \frac{L_n - 1}{2} \right\rfloor$ محاسبه شده است. در آخر، برای عدد استقلال رأسی Λ_n رابطه زیر در [۱۲] ارائه شده است:

$$\alpha(\Lambda_n) = \max(\hat{e}_n, \hat{o}_n)$$

۳.۷. مکعب های فیوناتچی و لوکاس گراف های میانی اند

پیش تر گفته شد که ابرمکعب ها گراف های میانی اند. با توجه به اینکه مکعب های فیوناتچی و لوکاس زیرگراف هایی از ابرمکعب ها هستند، این سؤال مطرح می شود که آیا این گراف ها نیز میانی هستند؟ مودر در [۳۵] ثابت کرده که گراف همبند G میانی است اگر و تنها اگر G گراف القایی از یک n -مکعب باشد؛ به طوری که برای هر سه رأس از G ، رأس میانی آن ها در n -مکعب، رأسی از G نیز باشد. با استفاده از این مطلب قضیه های زیر ثابت شده اند.

قضیه ۳.۷. [۱۵] برای هر $n \geq 2$ ، Λ_n میانی است.

قضیه ۴.۷. [۱۵] برای هر $n \geq 0$ ، Γ_n میانی است.

برای اینکه بتوانیم مکعب های فیوناتچی را میان گراف های میانی تشخیص دهیم، به دو مفهوم جدید نیاز داریم. مکعب جزئی G را در نظر بگیرید. τ -گراف G که با G^τ نشان داده می شود، گرافی است که رأس های آن Θ -کلاس های G هستند و دو Θ -کلاس متفاوت E و F مجاورند هرگاه $E \neq F$ و یال های $e \in E$ و $f \in F$ چنان موجود باشند که ef همچنین، یک Θ -کلاس F از یک مکعب جزئی G را جانی می نامیم هرگاه حداقل یکی از (دو) مؤلفه های همبند $G - F$ دارای $|F|$ رأس باشد. وسل مکعب های فیوناتچی را به صورت زیر معرفی می کند:

قضیه ۵.۷. [۳۶] فرض کنیم G یک گراف است. در

این صورت، G با Γ_n یکریخت است اگر و تنها اگر هر Θ -کلاس از G جانی بوده و نیز $G^\tau = P_n$.

اضافه می کنیم که برای هر گراف G ، گراف میانی M چنان موجود است که $G = M^\tau$. [۳۷] اگر مجموعه رأس های

اساسی، $\gamma(\Gamma_n) \leq \gamma(\Gamma_{n-1}) + \gamma(\Gamma_{n-2})$ ، از طرف دیگر، قضیه زیر کران پایینی برای $\gamma(\Gamma_n)$ به دست می‌دهد:

قضیه ۱.۸ [۴۰]. برای هر $n \geq 4$

$$\gamma(\Gamma_n) \geq \left\lfloor \frac{F_{n+2} - 3}{n - 2} \right\rfloor$$

پایک و ژو به کمک محاسبات کامپیوتری، مقادیر دقیق $\gamma(\Gamma_n)$ را برای $n \leq 8$ تعیین کرده‌اند (نک: جدول ۲). در [۲۸] نشان داده شد که $\gamma(\Gamma_9) \leq 17$ و حدس زده شد که $\gamma(\Gamma_9) = 17$. بعدها این حدس اثبات شد و نیز ثابت شد که $\gamma(\Gamma_{10}) = 25$.

جدول (۲): عدد غالب مکعب‌های کوچک

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(\Gamma_n)$	1	1	2	3	4	5	8	12	17	25
$\gamma(\Lambda_n)$	1	1	1	3	4	5	7	11	≤ 16	-

عدد غالب مکعب‌های لوکاس در [۲۸] بررسی شده است:

قضیه ۲.۸ [۲۸] فرض کنیم $n \geq 4$ ، در این صورت:

الف. $\gamma(\Lambda_n) \leq \gamma(\Gamma_{n-1}) + \gamma(\Gamma_{n-3})$

ب. $\gamma(\Lambda_n) \leq \gamma(\Gamma_n) \leq \gamma(\Lambda_n) + \gamma(\Gamma_{n-4})$

مقدار دقیق عدد غالب Λ_n برای $n \leq 8$ در [۲۸] محاسبه شده است (نک جدول ۲). همچنین، در آن مقاله با یافتن یک مجموعه غالب با اندازه شانزده از Λ_n نتیجه شده است که $\gamma(\Lambda_n) \leq 16$.

مشابه با کرانی که در قضیه ۱.۸ برای $\gamma(\Gamma_n)$ مطرح شد، درباره مکعب‌های لوکاس داریم:

قضیه ۳.۸ [۲۸] برای هر $n \geq 7$ $\gamma(\Lambda_n) \geq \left\lfloor \frac{L_n - 2n}{n - 3} \right\rfloor$

اضافه می‌کنیم که در [۳] آمده است که برای هر گراف G ، $\gamma(G) \geq \rho(G)$. همچنین داریم:

قضیه ۴.۸ [۲۸] برای هر $n \geq 8$ ، $\rho(\Gamma_n) \geq \rho(\Lambda_n) \geq 2^{\lfloor \frac{[ign]_1}{2} \rfloor}$

در آخر، مقدار عدد ۲-بسته‌بندی مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس برای $n \leq 10$ در جدول (۳) گردآوری شده است.

مکعب‌ها مطرح و محاسبه شده‌اند، می‌پردازیم. چون Γ_n دوبخشی است، عدد رنگی و شاخص رنگی آن مشخص‌اند. متغیر رنگی دیگری به نام وضوح تعریف می‌شود که بررسی آن از جذابیت بیشتری برخوردار است. وضوح گراف G کمترین تعداد رنگ‌هایی است که برای رنگ‌آمیزی کامل یال‌های G لازم است؛ به طوری که رأس‌های متمایز مجموعه‌های متمایزی از رنگ‌ها را بر یال‌های گذرنده از خود اختیار کنند. در [۱۳] ثابت شده است که وضوح Γ_n برابر با n است؛ بنابراین با شاخص رنگی آن برابر است.

عدد بدون دور در گراف G با $\nabla(G)$ نشان داده می‌شود و کمترین تعداد رأس‌هایی است که می‌توان از G حذف کرد؛ به طوری که گراف حاصل دور نداشته باشد. به بیان دیگر، $\nabla(G)$ اندازه کوچک‌ترین زیرمجموعه $X \subseteq V(G)$ است که $G - X$ بدون دور باشد. عدد بدون دور مکعب‌های فیبوناتچی در [۳۹] بررسی شده و مقدار دقیق آن تا $n = 9$ محاسبه شده است؛ برای مثال، $\nabla(\Gamma_8) = 19$ ، $\nabla(\Gamma_9) = 33$ و برای $n = 10$ ، $53 \leq \nabla(\Gamma_{10}) \leq 55$. همچنین در آن مرجع این حدس آمده است که $\nabla(\Gamma_n) = \nabla(\Gamma_{n-1}) + \nabla(\Gamma_{n-2}) + \mu(n)$ ؛ به طوری که در آن $\mu(n)$ تابعی غیرکاهشی بر حسب n است.

در [۱۴] مسئله جدیدی مطرح شد که در آن برعکس عدد بدون دور، به دنبال کمترین تعداد رأس‌های یک گراف هستیم که با حذف آن‌ها تمام زیرمکعب‌های فیبوناتچی آن نیز از بین بروند. به طور دقیق‌تر، گرگور در [۱۴] کمترین تعداد رأس‌ها را که باید از Q_n حذف شوند به طوری که تمام زیرگراف‌های القایی یکریخت با Γ_m را از بین ببرند، بررسی کرد. او این عدد را با $\psi(n, m)$ نشان داد. گرگور مقدار $\psi(n, m)$ را برای هر n و $m \leq 3$ تعیین کرد؛ برای مثال، $\psi(n, 3) = \lfloor 2^n / 3 \rfloor$ که در آن $n \geq 3$. او همچنین کران‌های متعددی مطرح کرده است، از جمله آن‌که برای هر $n \geq m \geq 4$ ، $\psi(n, m) \geq 2\psi(n - 4, m - 4)$.

پایک و ژو، عدد غالب مکعب‌های فیبوناتچی را ابتدا در [۴۰] توسط بررسی کردند. از یک طرف، به کمک تجزیه

جدول (۳): عدد ۲-بسته‌بندی مکعب‌های کوچک

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\rho(\Gamma_n)$	1	1	2	2	3	5	6	9	14	20
$\rho(\Lambda_n)$	1	1	1	2	3	5	6	8	13	18

۹. جمع‌بندی مطالب

در این مقاله، به مرور نتایج اساسی به دست آمده دربارهٔ مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس از نقطه نظر ترکیباتی و متریک پرداختیم. شایان ذکر است که مجموعه‌ای کامل تر از خواص و ویژگی‌های این دو نوع مکعب با توضیح بیشتر را می‌توانید در [۴۱] بیابید.

این مکعب‌ها از نقطه نظر هندسی نیز مورد مطالعه قرار گرفته و کاربردهای فراوان آن‌ها در علوم کامپیوتر، شیمی و زیست‌شناسی مورد توجه بوده‌اند. همچنین، به علت نظم و پیچیدگی گراف‌های متناظر، این مکعب‌ها در شبکه‌های پیچیده مانند فیس‌بوک و توییتر بسیار مورد استفاده بوده‌اند که مطالعه آن‌ها را توجیه‌پذیر می‌کند. محاسبات ما در این مقاله با استفاده از نرم‌افزار Sage صورت گرفته است که در بخش پایانی، به توضیح مختصری از آن خواهیم پرداخت.

۱۰. مسائل باز

در این بخش به ارائه چند مسئله باز که در کارهایمان با آن‌ها مواجه شده‌ایم، می‌پردازیم. تلاش می‌کنیم تا مسائل حل نشده را با ذکر مثال‌هایی روشن سازیم.

در [۳۰] مدارهای رأسی و یالی مکعب‌های فیبوناتچی و لوکاس را مطالعه کرده و تعداد کل آن‌ها را مشخص کردیم. حتی تعیین کردیم که هریک از این مدارها از چه اندازه‌هایی موجودند و نیز تعداد مدارها از اندازه‌های مختلف را محاسبه کردیم. اما سؤال باقی مانده، تعیین عناصر دقیق موجود در هر مدار است. بنابراین، مسئله نخست را به صورت زیر مطرح می‌کنیم:

مسئله ۱. آیا می‌توان به طور دقیق تعیین کرد که برای هر اندازه دلخواه از مدارها، نماینده‌های مدارها چه هستند؟ برای توضیح این مسئله، گراف Λ_{11} را در نظر بگیرید. با

توجه به قضیه ۳.۵، تعداد کل مدارهای رأسی آن برابر است با:

$$\begin{aligned} o_V(\Lambda_{11}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{11} (\phi(11)L_1 + \phi(1)L_{11}) + F_7 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{11} (10 + 199) + 13 \right) = 16 \end{aligned}$$

قضیه زیر اندازه این مدارها را مشخص می‌کند:

قضیه ۱.۱۰. [۳۰] برای هر $n \in \mathbb{N}$

$$\{ |X|; X \in O_V(\Lambda_n) \} = \{ k \geq 1; k | n \} \cup \{ k \geq 18; k | 2n \}$$

قضیه زیر نیز تعداد مدارها از هر اندازه را تعیین می‌کند:

قضیه ۲.۱۰. [۳۰] برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $k | 2n$

$$o_V(\Lambda_{n,k}) = \begin{cases} \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) F_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2}, & k | n, k \text{ odd} \\ \sum_{d|k} \mu\left(\frac{k}{d}\right) F_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2} + \frac{1}{k} \sum_{d \mid \frac{k}{2}} \mu\left(\frac{k}{2d}\right) (L_d - \frac{k}{2} F_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2}), & k | n, k \text{ even} \\ \frac{1}{k} \sum_{d \mid \frac{k}{2}} \mu\left(\frac{k}{2d}\right) (L_d - \frac{k}{2} F_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 2}), & k | 2n, k \nmid n \end{cases}$$

به این ترتیب، از قضیه ۱.۱۰، اندازه این مدارها یک، یازده

و بیست و دو هستند و از قضیه ۲.۱۰

$$o_V(\Lambda_{11}, 1) = \mu(1)F_2 = 1$$

$$o_V(\Lambda_{11}, 11) = \mu(11)F_2 + \mu(1)F_7 = 12$$

$$o_V(\Lambda_{11}, 22) = \frac{1}{22} (\mu(11)(L_1 - 11F_2) + \mu(1)(L_{11} - 11F_2)) = 3$$

بنابراین، یک مدار از اندازه یک، دوازده مدار از اندازه

یازده و سه مدار از اندازه بیست و دو وجود دارند. اما نماینده

هریک از این دسته از مدارها چه عناصری هستند؟ در این

مثال، مدار با اندازه یک را 0^{11} می‌سازد. مدارهای با اندازه

یازده نیز توسط عناصر زیر ساخته می‌شوند:

1000000000, 10100000000, 10010000000,
10001000000, 10000100000, 10101000000,
10010010000, 10001001000, 10101010000,
10100101000, 10010010100, 10101010100.

همچنین، نماینده‌های مدارهای بیست و دو عضوی، عناصر

10100010010 و 10001010000

هستند. اما آیا این کار همواره امکان‌پذیر است؟ آیا می‌توان

برای هر n دلخواه، پس از تعیین تعداد کل مدارها، اندازه

آن‌ها و تعداد مدارها از هر اندازه، نماینده‌های آن‌ها را نیز

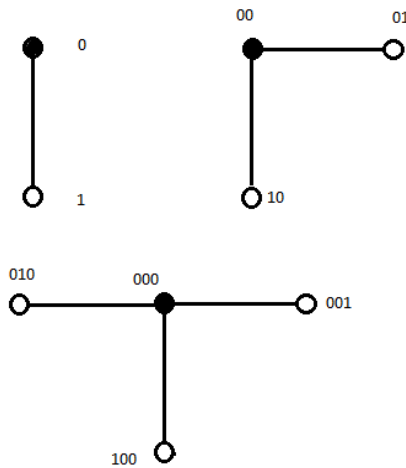
در نتیجه،

$$r(1 + \delta) = (1 + \delta) + \dots + (1 + \delta) \\ \leq |V(G)| \leq (1 + \Delta) + \dots + (1 + \Delta) = r(1 + \Delta)$$

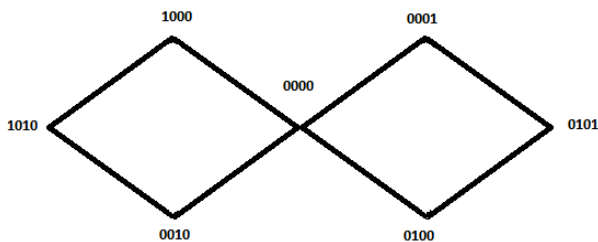
به این ترتیب، $\frac{|V(G)|}{\Delta + 1} \leq C(G) \leq \frac{|V(G)|}{\delta + 1}$ و حکم کامل می‌شود.

درواقع، قضیه ۳.۱۰ کرانی برای اندازه کد تام (در صورت وجود) در مکعب لوکاس را نیز به دست می‌دهد. حال سؤال زیر مطرح می‌شود:

مسئله ۳. آیا می‌توان این کران را کوچک‌تر کرد؟ یا حتی می‌توان مقدار دقیق اندازه کد تام را تعیین کرد؟



شکل (۱۲): کد تام در مکعب‌های لوکاس با بعد کوچک



شکل (۱۳): مکعب لوکاس Λ_4

در ادامه، مسئله دیگری را که در محاسبات خود به آن برخوردیم، توضیح می‌دهیم. فرض کنیم G یک گراف است و u و v دو رأس از آن هستند. منظور از گراف بازه $I(u, v)$ زیرگرافی از G است که با تمام کوتاه‌ترین

مشخص کرد؟ توجه کنید که با مفروض بودن نماینده‌های مدارها، با توجه به گروه خودریختی گراف مورد مطالعه، می‌توان کل عناصر مدار را یافت. در مثال بالا، برای Λ_{11} ، عناصر مداری که 10100100000 نماینده آن است، به صورت زیرند:

{10100100000, 01010010000, 00101001000, 00010100100, 00001010010, 10000010100, 01000001010, 00100000101, 10010000010, 01001000001, 00000100101, 10000010010, 01000001001, 10100000100, 01010000010, 00101000001, 10010100000, 01001010000, 00100101000, 00010010100, 00001001010}.

در [۳۲] وجود کدهای تام در مکعب‌های فیبوناتچی را بررسی کرده‌ایم. بنابراین سؤال زیر به‌طور طبیعی به ذهن خطور می‌کند:

مسئله ۲. کدهای تام در مکعب‌های لوکاس چگونه‌اند؟

در شکل (۱۲) نشان داده شده است که مکعب لوکاس Λ_n برای $n = 1, 2, 3$ کد تام دارد. اما همان‌طور که شکل (۱۳) نشان می‌دهد، Λ_4 کد تام ندارد. آیا می‌توان در حالت کلی نتیجه گرفت که Λ_n برای $n > 3$ کد تام ندارد؟ در این صورت، اگر برای عدد طبیعی k ، Λ_k کد تام دارد، آیا می‌توان اندازه کد تام را در آن تعیین کرد؟ قضیه زیر در حالت کلی، کرانی را برای اندازه یک کد تام در گراف دلخواه G ارائه می‌دهد.

قضیه ۳.۱۰. فرض کنیم G یک گراف ساده و $C(G)$ یک کد تام از آن است. اگر δ و Δ به ترتیب، کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین درجه رأس‌های G باشند،

$$\frac{|V(G)|}{\Delta + 1} \leq C(G) \leq \frac{|V(G)|}{\delta + 1}$$

اثبات. فرض کنیم $C(G) = \{v_1, \dots, v_r\}$ ، در این صورت، هر v_i ، خود v_i و نیز همه رأس‌های مجاور آن را می‌پوشاند. در نتیجه، در کل، $deg(v_i) + 1$ رأس توسط هر v_i پوشانده می‌شوند. بنابراین:

$$|V(G)| = (1 + deg(v_1)) + \dots + (1 + deg(v_r))$$

در نظر گرفتن ترتیب جمع و ندهاست.

۱.۱۰. نحوه ساختن مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس با

نرم افزار Sage

Sage یکی از نرم افزارهای پرکاربرد و البته جدید ریاضی است. که به طور رایگان قابل دسترسی است. در این بخش، برخی از برنامه‌های مورد نیاز برای بررسی مکعب‌های فیوناتچی و لوکاس را مطرح می‌کنیم.

تابع زیر یک مکعب فیوناتچی n بُعدی را تعریف می‌کند:

def fibonacci-cube(n):

```
G=graphs.CubeGraph(n)
return G.subgraph (v for v in G if '11' not in v)
```

به طور مشابه، دستور زیر مکعب لوکاس n بُعدی را تولید

می‌کند:

def lucas-cube(n):

```
G=graphs.CubeGraph(n)
return G.subgraph (v for v in G if '11' not in v+v)
```

توجه داریم که فاصله در Sage بسیار مهم است. در واقع، آنچه شروع و پایان حلقه‌ها را تعیین می‌کند، فاصله است. به بیان دقیق‌تر، تمام دستورات یک حلقه کمی جلوتر از بقیه دستورها و به طور کامل زیر یکدیگرند. در تابع‌های بالا نیز خطوط بعدی باید کمی جلوتر و زیر یکدیگر باشند. حال نحوه عملکرد تابع *fibonacci - cube* را توضیح می‌دهیم. (تابع *lucas - cube* نیز مشابه است). دستور `G = graphs.CubeGraph(n)` یک ابرمکعب n بُعدی ساخته و آن را G می‌نامد. سپس با دستور

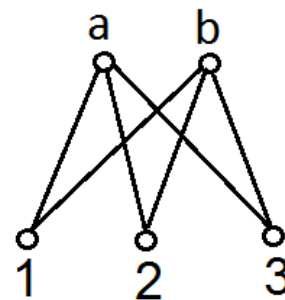
```
return G.subgraph (v for v in G if '11' not in v)
```

زیرگرافی از G را چنان می‌سازد که شامل رأس‌هایی مانند v از G باشد که 11 ندارند. بنا به تعریف مکعب‌های فیوناتچی، زیرگراف حاصل یک مکعب فیوناتچی n بُعدی است. حال اگر بنویسیم $g = fibonacci - cube(4)$ ، g یک مکعب فیوناتچی با بعد 4 است. برای نمایش g ، کافی است بنویسیم `g.show()` دستور

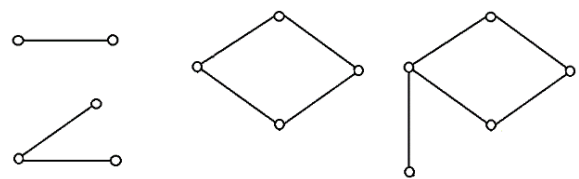
```
for v in g
print(v)
```

مسیرهای موجود بین u و v ساخته می‌شود. بنابراین، $I(u, v)$ شامل u و v و نیز همه رأس‌هایی است که بر تمام کوتاه‌ترین مسیرهای موجود بین u و v قرار دارند؛ برای مثال، گراف شکل (۱۴) را ببینید. در این گراف، $I(1, 2)$ شامل رأس‌های 1، 2، a و b است. همچنین، $I(a, b)$ زیرگراف القاشده بر رأس‌های a ، b ، 1، 2 و 3 است.

مجموعه تمام گراف‌های بازه غیریکریخت از گراف G را با $I(G)$ نشان می‌دهیم. اگر به مکعب‌های فیوناتچی بازگردیم، روشن است که $I(\Gamma_1)$ تنها شامل یک گراف کامل دو رأسی است؛ بنابراین $|I(\Gamma_1)| = 1$. به همین ترتیب، $I(\Gamma_2)$ شامل یک گراف کامل دو رأسی و یک مسیر سه رأسی است و در نتیجه $|I(\Gamma_2)| = 2$. عناصر موجود در $I(\Gamma_3)$ را می‌توانید در شکل (۱۵) ببینید که از آن داریم $|I(\Gamma_3)| = 4$.



شکل (۱۴): گراف کامل دوبخشی $K_{2,3}$



شکل (۱۵): گراف‌های بازه غیریکریخت در Γ_3

به همین ترتیب، $|I(\Gamma_4)| = 6$ و $|I(\Gamma_5)| = 10$. در واقع دنباله $|I(\Gamma_n)|$ برای $n \geq 1$ به صورت زیر است:
 $1, 2, 4, 6, 10, 14, 21, 29, 41, 55, 76, \dots$
 به نظر می‌رسد که این دنباله، A000065 از [۲۹] است. به بیان دیگر:

مسئله ۴. آیا می‌توان نوشت $|I(\Gamma_n)| = p(n+1) - 1$ که در آن منظور از $p(n+1)$ افزایش‌های عددی $n+1$ بدون

0101

0100

به این مجموعه از رأس‌ها، بازه 0000 و 0101 گفته می‌شود. حال یک تابع چنان می‌نویسیم که با گرفتن هر دو رأس دلخواه u و v از g ، بازه آن‌ها را تعیین کند:

```
def interval(g, u, v):
    DM=g.distance_all_pairs()
    s=set()
    for w in g:
        if DM[u][v]==DM[u][w]+DM[w][v]:
            s.add(w)
    return s
```

به این ترتیب، برای یافتن بازه 0000 و 0101، از دستور $interval(g, '0000', '0101')$ استفاده می‌کنیم. می‌توان تابع بالا را چنان به‌کار برد که بازه موجود بین هر دو رأس از g را یک‌دفعه در خروجی ظاهر کند:

```
for u, v in Combinations(g, 2):
    interval(g, u, v)
```

که در آن، $Combinations(g, 2)$ هر بار دو رأس از گراف را انتخاب می‌کند. توجه داریم که دستورهای بیشتر و متنوعی وجود دارند که ما در این مختصر، از بیان همه آن‌ها خودداری می‌کنیم.

همه رأس‌های g را تولید می‌کند:

0000

0001

0010

0101

1001

1000

0100

دستورهای متفاوت دیگری وجود دارند که خواص بیشتری

از g را به دست می‌دهند؛ برای مثال، در صورتی که بنویسیم $DM = g.distance_all_pairs()$ در واقع

ماتریس فاصله است و می‌توان به‌کمک آن فاصله بین هر دو رأس دلخواه را یافت؛ برای مثال، دستور $DM['0000']['0101']$

فاصله بین دو رأس 0000 و 0101 را می‌دهد که می‌شود دو.

حال فرض کنیم بخواهیم مجموعه رأس‌هایی را بیابیم که در تمام کوتاه‌ترین مسیرهای ممکن بین این دو رأس قرار دارند. برای این کار، از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

```
for w in g:
    if DM['0000']['0101'] == DM['0000'][w] +
        DM[w]['0101']:
        print(w)
```

در این صورت، خروجی به‌صورت زیر است:

0000

0001

مراجع

- [1] Darafsheh, M. R., "Computation of topological indices of some graphs", Acta Appl. Math. Vol. 110, No. 3, pp. 1225–1235, 2010.
- [2] Imrich, W., Klavžar, S., "Product graphs. Structure and recognition", With a foreword by Peter Winkler. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [3] Imrich, W., Klavžar, S., Rall, D. F., "Topics in graph theory: Graphs and their Cartesian product", A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008.
- [4] Djokovic, D. Z., "Distance-preserving subgraphs of hypercubes", J. Combinatorial Theory. Ser. B, Vol. 14, pp. 263–267, 1973.
- [5] Winkler, P. M., "Isometric embedding in products of complete graphs", Discrete Appl. Math. Vol. 7, No. 2, pp. 221–225, 1984.
- [6] Feder, T., "Product graph representations", J. Graph Theory. Vol. 16, No. 5, pp. 467–488, 1992.
- [7] Klavžar, S., "Structure of Fibonacci cubes: a survey", J. Comb. Optim. Vol. 25, no. 4, pp. 505–522, 2013.
- [8] Hsu, W. J., "Fibonacci cubes-a new interconnection technology", IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst., Vol. 4, No. 1, pp. 3–12, 1993.
- [9] Klavžar, S., Peterin, I., "Edge-counting vectors, Fibonacci cubes, and Fibonacci triangle", Publ. Math. Debrecen. Vol. 71, No. 3–4, pp. 267–278, 2007.
- [10] Cong, B., Zheng, S. Q., Sharma, S., "On simulations of linear arrays, rings and 2d meshes on fibonacci cube networks", In Processings of the 7th International Parallel Processing Symposium, pp. 748–751, 1993.

- [11] Hsu, W. J., Page, C. V., Liu, J. S., "Fibonacci cubes—a class of self-similar graphs," *Fibonacci Quart.* Vol. 31, No. 1, pp. 65–72, 1993.
- [12] Munarini, E., Perelli Cippo, C., Zagaglia Salvi, N., "On the Lucas cubes", *Fibonacci Quart.* Vol. 39, No. 1, pp. 12–21, 2001.
- [13] Dedo, E., Torri, D., Zagaglia Salvi, N., "The observability of the Fibonacci and the Lucas cubes", *Discrete Math.* Vol. 255, No. 1-3, pp. 55–63, 2002.
- [14] Gregor, P., "Recursive fault-tolerance of Fibonacci cube in hypercubes", *Discrete Math.* Vol. 306, No. 13, pp. 1327–1341, 2006.
- [15] Klavžar, S., "On median nature and enumerative properties of Fibonacci-like cubes", *Discrete Math.* Vol. 299, No. 1-3, pp. 145–153, 2005.
- [16] Klavžar, S., Mollard, M., "Cube polynomial of Fibonacci and Lucas cubes", *Acta Appl. Math.* Vol. 117, pp. 93–105, 2012.
- [17] Zagaglia Salvi, N., "The automorphism group of the Lucas semilattice", *Bull. Inst. Combin. Appl.* Vol. 34, pp. 11–15, 2002.
- [18] Munarini, E., Zagaglia Salvi, N., "Structural and enumerative properties of the Fibonacci cubes", *Combinatorics '98 (Palermo)*. *Discrete Math.* Vol. 255, No. 1-3, pp. 317–324, 2002.
- [19] Klavžar, S., Mollard, M., Petkovšek, M., "The degree sequence of Fibonacci and Lucas cubes", *Discrete Math.* Vol. 311, No. 14, pp. 1310–1322, 2011.
- [20] Liu, J., Hsu, W. J., Chung, M. J., "Generalized Fibonacci cubes are mostly Hamiltonian", *J. Graph Theory.* Vol. 18, No. 8, pp. 817–829, 1994.
- [21] Munarini, E., Zagaglia Salvi, N., "Structural and enumerative properties of the Fibonacci cubes", *(Russian) Intellectual Systems.* Vol. 2, No. 1-4, pp. 265–274, 1997.
- [22] Ilic, A., Klavžar, S., Rho, Y., "Generalized Fibonacci cubes", *Discrete Math.* Vol. 312, No. 1, pp. 2–11, 2012.
- [23] Hsu, W. J., Chung, M. J., "Generalized Fibonacci cubes", In *Proceedings of the 1993 International Conference on Parallel Processing - ICPP'93*, Vol. 1, pp. 299–302, 1993.
- [24] Zagaglia Salvi, N., "On the existence of cycles of every even length on generalized Fibonacci cubes", *Matematiche (Catania)*. Vol. 51, pp. 241–251, 1997.
- [25] Azarija, J., Klavžar, S., Lee, J., Pantone, J., Rho, Y., "On isomorphism classes of generalized Fibonacci cubes", *European J. Combin.* Vol. 51, pp. 372–379, 2016.
- [26] Wu, J., "Extended Fibonacci cubes", *IEEE Trans. Parallel Distr. Systems.* Vol. 8, No. 12, pp. 1203–1210, 1997.
- [27] Whitehead, C., Zagaglia Salvi, N., "Observability of the extended Fibonacci cubes", *The 18th British Combinatorial Conference (Brighton, 2001)*. *Discrete Math.* Vol. 266, No. 1-3, pp. 431–440, 2003.
- [28] Castro, A., Klavžar, S., Mollard, M., Rho, Y., "On the domination number and the 2-packing number of Fibonacci cubes and Lucas cubes", *Comput. Math. Appl.* Vol. 61, No. 9, pp. 2655–2660, 2011.
- [29] Sloane, N. J. A., "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences", published electronically at <http://oeis.org>, 2015.
- [30] Ashrafi, A. R., Azarija, J., Fathalikhani, Kh., Klavžar, S., Petkovšek, M., "Vertex and edge orbits of Fibonacci and Lucas cubes", *Ann. Comb.* Vol. 20, No. 2, pp. 209–229, 2016.
- [31] Patten, W. E., Golomb, S. W., "Problem: E1470," *Amer. Math. Monthly.* Vol. 69, no. 1, pp. 61–62, 1962.
- [32] Ashrafi, A. R., Azarija, J., Babai, A., Fathalikhani, Kh., Klavžar, S., "The (non-) existence of perfect codes in Fibonacci cubes", *Inform. Process. Lett.* Vol. 116, pp. 387–390, 2016.
- [33] Castro, A., Mollard, M., "The eccentricity sequences of Fibonacci and Lucas cubes", *Discrete Math.* Vol. 312, No. 5, pp. 1025–1037, 2012.
- [34] Klavžar, S., Mollard, M., "Wiener index and Hosoya polynomial of Fibonacci and Lucas cubes", *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* Vol. 68, No. 1, pp. 311–324, 2012.
- [35] Mulder, M., "The structure of median graphs", *Discrete Math.* Vol. 24, No. 2, pp. 197–204, 1978.
- [36] Vesel, A., "Characterization of resonance graphs of catacondensed hexagonal graphs", *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* Vol. 53, No. 1, pp. 195–208, 2005.
- [37] Klavžar, S., Kovše, M., "Partial cubes and their τ -graphs", *European J. Combin.* Vol. 28, No. 4, pp. 1037–1042, 2007.
- [38] Taranenko, A., Vesel, A., "Fast recognition of Fibonacci cubes", *Algorithmica.* Vol. 49, No. 2, pp. 81–93, 2007.
- [39] Ellis-Monaghan, J. A., Pike, D. A., Zou, Y., "Decycling of Fibonacci cubes", *Australas. J. Combin.* Vol. 35, pp. 31–40, 2006.
- [40] Pike, D. A., Zou, Y., "The domination number of Fibonacci cubes", *J. Combin. Math. Combin. Comput.* Vol. 80, pp. 433–444, 2012.

- [41] Fathalikhani, Kh., “Agebraic and metric properties of hypercube and some its subgraphs”, PhD Thesis, University of Kashan, Kashan, 2016.