

تاریخ دریافت: 92/10/24

تاریخ پذیرش: 93/4/6

## ابرتفکیک پذیری: مروری بر روش های موجود

سید جلال سیدیزدی<sup>1\*</sup>، حمید حسن پور<sup>2</sup>

<sup>1</sup> دانشجوی دکتری مهندسی کامپیوتر، دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه شاهرود، شاهرود، ایران

seyedyazdi@shahroodut.ac.ir

<sup>2</sup> استاد دانشکده مهندسی کامپیوتر، دانشگاه شاهرود، شاهرود، ایران

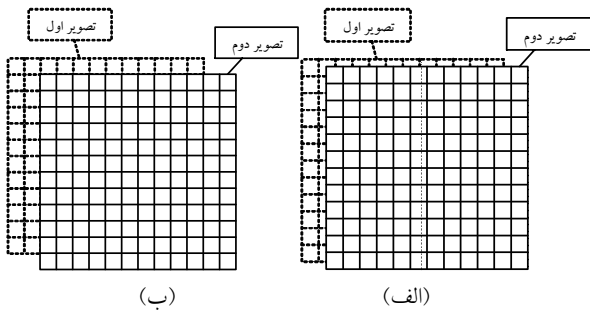
h.hassanpour@shahroodut.ac.ir

**چکیده:** استفاده روزافزون از تصاویر دیجیتال در کاربردهای مختلف بر کسی پوشیده نیست. تقریباً در همگی کاربردها تصاویر با تفکیک پذیری زیاد، کارایی و کیفیت بالاتری دارند. یک راه برای دستیابی به تصاویری با تفکیک پذیری زیاد، افزایش کیفیت سخت افزار سیستم تصویربرداری است که منجر به افزایش هزینه می شود. همچنین محدودیت های فیزیکی سیستم سخت افزار افزایش تفکیک پذیری تصویر را محدود می کند. در مقابل، ابرتفکیک پذیری روشی نرم افزاری است که هدف آن ایجاد تصاویری با درجه تفکیک پذیری زیاد با استفاده از تصاویر کم دقت از صحنه می باشد. از آنجاکه مسئله ابرتفکیک پذیری یک مسئله معکوس است، روش های منظم سازی که هدف آن ها وارد کردن اطلاعات پیشین از تصاویر در الگوریتم ابرتفکیک پذیری است، از جایگاه ویژه ای برخوردار هستند. در روش منظم سازی تصادفی، همه متغیرها و پارامترهای مسئله به صورت متغیری تصادفی در نظر گرفته شده و اطلاعات پیشین در مورد آن ها به صورت توابع توزیع احتمال لحاظ می گردد. همچنین در روش های مبتنی بر یادگیری اطلاعات پیشین به طرق دیگر، از جمله استفاده از دیکشنری برای اجزای تصویر به الگوریتم اعمال می شود. در این مقاله، بعد از تعریف مسئله ابرتفکیک پذیری، به بررسی چالش های آن و کارهای انجام شده با تأکید بر روش منظم سازی تصادفی می پردازیم.

**واژه های کلیدی:** ابرتفکیک پذیری، مسائل معکوس بدمطرح، منظم سازی، ثبت تصویر، چهارچوب بیز.

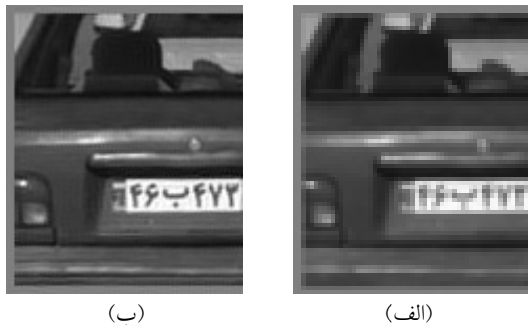
۱. مقدمه

هم‌پوشانی‌شده) اطلاعات یکسانی خواهند داشت و در نتیجه، با استفاده از تصاویری که به این گونه به دست می‌آید، نمی‌توان تصویر HR را بازسازی کرد. در مقابل، اگر مانند شکل (ب) جابجایی دو تصویر ضریبی نادرست از اندازه پیکسل باشد یا به عبارت دیگر، جابجایی مؤلفه زیرپیکسل<sup>۵</sup> داشته باشد، هر یک از این تصاویر، اطلاعاتی متفاوت از صحنه در خود دارند که می‌توان از آن‌ها جهت بازسازی تصویر HR استفاده کرد. هدف SR این است که با ترکیب کردن این اطلاعات مکمل، تصویری با جزئیات زیاد ایجاد شود.



شکل (۱): الف) جابجایی دو تصویر نسبت به هم ضریبی از اندازه پیکسل است؛ در این حالت، اطلاعات جدیدی به دست نمی‌آید. ب) جابجایی دو تصویر به گونه‌ای است که اطلاعات جدیدی حاصل می‌شود.

مثالی از ابرتفکیک پذیری در شکل (۲) نشان داده شده است. شکل (الف) یکی از چهار تصویر LR و شکل (ب) خروجی الگوریتم ابرتفکیک پذیری است. تفاوت تفکیک پذیری در این دو تصویر، کاملاً مشخص است؛ برای مثال، قسمت‌هایی از پلاک ماشین در تصویر (الف) تشخیص داده نمی‌شود؛ اما در تصویر (ب) پلاک ماشین کاملاً خواناست.



شکل (۲): مثالی از ابرتفکیک پذیری؛ الف) تصویر LR. ب) تصویر ایجادشده توسط ابرتفکیک پذیری با استفاده از چهار تصویر LR

کیفیت تصاویر تولیدشده توسط سیستم‌های تصویربرداری رقمی هر قدر هم که مطلوب باشد، به دلیل ایدئال نبودن سخت‌افزار سیستم تصویربرداری، تصویر ایجادشده نسبت به صحنه واقعی، همواره حاوی اطلاعات کمتری است. دلیل این امر وجود محدودیت‌هایی از قبیل محدودیت دقت در حسگر تصویربرداری، نرخ انتقال اطلاعات محدود و وجود نویز در فرایند تصویربرداری است [۱]. برخی از این محدودیت‌ها ذاتی است و برخی دیگر برای متعادل نگه داشتن قیمت محصول لحاظ می‌شود. با وجود این، در بسیاری از کاربردهای تصاویر رقمی از جمله نظامی، پزشکی، صنعتی و نظارت، تصاویری با تفکیک‌پذیری<sup>۱</sup> زیاد لازم است. برای غلبه بر این مشکل، روش‌های نرم‌افزاری تحت عنوان ابرتفکیک‌پذیری<sup>۲</sup> یا «وضوح برتر» ایجاد شده است که به کمک آن‌ها می‌توان بر محدودیت‌های سخت‌افزاری غلبه کرد و تصاویری فراتر از تفکیک‌پذیری سیستم تصویربرداری ایجاد کرد. در این الگوریتم‌ها با استفاده از یک یا چند تصویر از صحنه با تفکیک‌پذیری کم (LR<sup>۳</sup>)، تصویری با تفکیک‌پذیری زیاد (HR<sup>۴</sup>) به وجود می‌آید.

به‌طور دقیق، می‌توان گفت مسئله SR یک مسئله معکوس است که هدف آن ایجاد تصویر  $\mathbf{x}$  با اندازه  $P_1 L_1 \times P_2 L_2$  از یک صحنه با استفاده از مجموعه تصاویر  $\mathbf{y}_k$  با اندازه  $L_1 \times L_2$  از همان صحنه به‌ازای  $k = 1, 2, \dots, K$  است.  $P_1$  و  $P_2$  ضرایب افزایش تفکیک‌پذیری هستند. در ابرتفکیک‌پذیری با استفاده از اطلاعاتی که در چندین تصویر LR وجود دارد، تصویر HR بازسازی می‌شود؛ از این رو، شرط عملی بودن SR وجود اطلاعات متفاوت از صحنه در تصاویر LR است. این موضوع در شکل (۱) نمایش داده شده است. همان‌گونه که در شکل (الف) دیده می‌شود، زمانی که جابجایی دو تصویر ضریبی از اندازه پیکسل باشد، دو تصویر (در قسمت‌های

1. Resolution
2. Super Resolution (SR)
3. Low Resolution
4. High Resolution

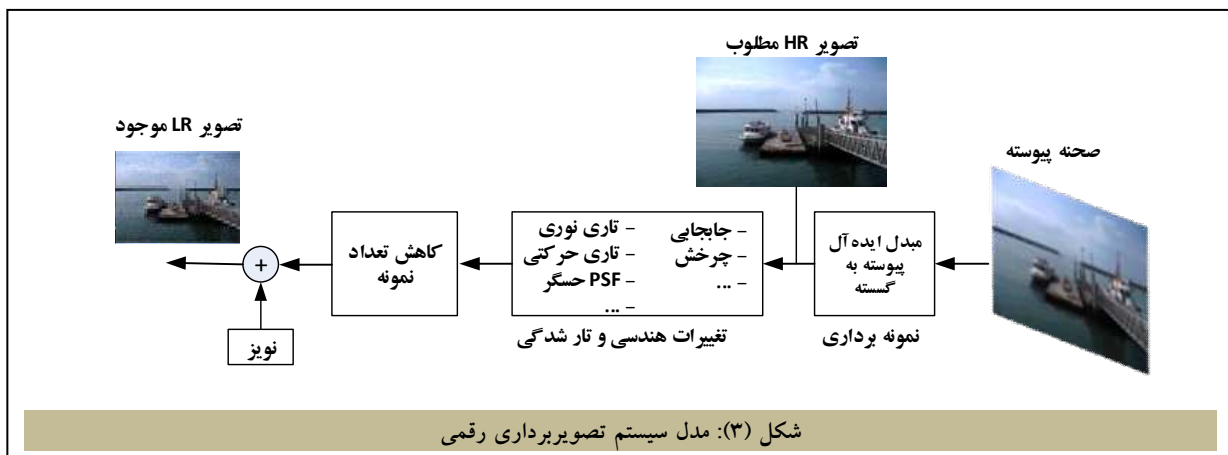
اعمال شده بر روی تصویر HR، تنها از روی تصاویر LR تخمین زده شوند [۲]. در بیشتر اوقات، به سختی می توان این پارامترها را تنها از روی تصاویر LR تخمین زد؛ از این رو، خطای تخمین در بسیاری از سیستم های عملی اجتناب ناپذیر است. خطا در تخمین پارامترهای تاری و جابجایی بین تصاویر، موجب اشکال های زیادی در SR شده که منجر به عدم کیفیت در بازیابی تصویر HR می شود.

با توجه به وجود مشکلات مذکور در مسئله SR، رهیافت هایی که بتوانند به گونه ای خطاهای موجود را مدل کنند و عدم قطعیت را در فرمول های حل SR پوشش دهند، از موفقیت بیشتری برخوردارند. از بین روش های مختلف، رهیافت های آماری و به ویژه چهارچوب بیز، این ویژگی را ارائه می کند [۲]؛ زیرا به هر کمیت یک تابع توزیع احتمال نسبت می دهد. همچنین با استفاده از چهارچوب بیز سلسله مراتبی می توان پارامترهای تابع توزیع مذکور را به طور خودکار به دست آورد.

ساختار مقاله بدین قرار است که در بخش دوم، مدل سیستم تصویربرداری بیان می شود. در بخش سوم، مسائل معکوس و مفهوم بدمطرح بودن تشریح می شود. در بخش چهارم، رهیافت های موجود در حل مسئله SR به اختصار ارائه می شود. در بخش پنجم، روش منظم سازی تصادفی در چهارچوب بیز بیان می شود و بخش ششم نیز مقاله را جمع بندی می کند.

هرچند در زمینه SR کارهای زیادی انجام شده، این مسئله هنوز یک موضوع باز است که توسط محققان در حال بررسی است [۲]. اولین چالش در حل مسئله SR مدل سازی دقیق فرایند تصویربرداری است. گفتیم SR یک مسئله معکوس است؛ بدین معنی که خروجی سیستم تصویربرداری ورودی الگوریتم SR است و این الگوریتم باید ورودی سیستم تصویربرداری را بازتولید کند. برای دستیابی به این هدف، در اولین قدم، باید سیستم تصویربرداری به طور دقیق مدل شود. مشکل دیگر در مسئله SR این است که تنها با استفاده از تصاویر LR نمی توان تصویر HR را ایجاد کرد و نیاز به دانش پیشین<sup>۱</sup> درباره تصویر HR است. دلیل این امر از بدمطرح بودن مسئله SR ناشی می شود؛ بنابراین، چالش دیگر در مسئله SR توصیف، ترکیب و به کارگیری دانش پیشین درباره تصویر HR در فرایند بازسازی است.

همان طور که بیان شد، برای ایجاد تصویر HR نیاز است اطلاعات موجود در تصاویر LR با هم ترکیب شود. برای این کار، یکی از تصاویر LR به عنوان مرجع انتخاب و جابجایی بقیه تصاویر LR با تصویر مرجع تعیین می شود. به این عمل، تخمین حرکت<sup>۳</sup> یا ثبت تصویر<sup>۴</sup> می گویند. همچنین تصاویر LR معمولاً توسط سیستم تصویربرداری، تار می شوند که الگوریتم SR باید آن را رفع کند. مسئله SR یک مسئله بسیار بدمطرح است، به ویژه زمانی که قرار باشد پارامترهای تاری و جابجایی



1. Prior Knowledge
2. Ill-posed
3. Motion Estimation
4. Image Registration

## ۲. مدل سیستم تصویر برداری

در مباحث پردازش تصویر، اغلب تصاویر به صورت ماتریسی نمایش داده می شوند؛ اما در حوزه ابر تفکیک پذیری معمول است که اطلاعات تصاویر به صورتی که *lexicographical* نامیده می شود، نمایش داده شوند. در این روش، اطلاعات تصویر به ترتیب (مثلاً سطر به سطر) در یک بردار ستونی قرار داده می شود و تمامی پردازش ها بر روی بردارها انجام می گیرد؛ برای مثال، یک تصویر  $m \times n$  به برداری با اندازه  $mn \times 1$  تبدیل می شود.

در ادامه، تصویر HR را با بردار  $\mathbf{x}$  با اندازه  $NP \times 1$  و تصاویر LR را با بردارهای  $\mathbf{y}_k$  با اندازه  $N \times 1$  به ازای  $k = 1, 2, \dots, K$  نمایش می دهیم.  $P > 1$  ضریب افزایش دقت تصویر است.

شکل (۳) مدل سیستم تصویر برداری رقمی و چگونگی ایجاد تصویر LR را نمایش می دهد. در این مدل تقریبی، تغییرات هندسی<sup>۱</sup> و تارشدهگی<sup>۲</sup> تصویر در کنار هم، در یک کادر مدل شده است. ترتیب اعمال این دو عمل نسبت به هم، موجب ایجاد دو مدل Warp-Blur و Blur-Warp می شود. در مدل Warp-Blur ابتدا تغییرات هندسی و سپس تارشدهگی بر روی تصاویر اعمال می شود؛ از این رو، رابطه بین تصویر LR و تصویر HR به صورت زیر تعریف می شود [۳].

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{d}_k)\mathbf{x} + \mathbf{n}_k \quad (1)$$

در این رابطه، بردار تصویر HR با اندازه  $NP \times 1$ ، بردار تصویر LR با اندازه  $N \times 1$ ، ماتریس کاهش نمونه با اندازه  $N \times NP$ ، ماتریس تاری با اندازه  $NP \times NP$ ، ماتریس تغییرات هندسی با اندازه  $NP \times NP$  است که توسط بردار جابجایی یا حرکت  $\mathbf{d}_k$  تولید می شود و  $\mathbf{n}_k$  بردار نویز فرایند تصویر برداری با اندازه  $N \times 1$  است.

در مدل Blur-Warp ترتیب تارشدهگی و تغییرات هندسی جابه جا می شود و در نتیجه، این مدل منجر به رابطه زیر می شود:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}\mathbf{C}(\mathbf{d}_k)\mathbf{H}_k\mathbf{x} + \mathbf{n}_k \quad (2)$$

1. Warping
2. Blurring

در کارهای انجام شده، معمولاً از مدل Warp-Blur استفاده می شود. همچنین اگر تاری تصویر به طور مکانی- زمانی تغییر ناپذیر با جابجایی<sup>۳</sup> باشد و حرکت فقط شامل مؤلفه جابجایی کلی<sup>۴</sup> باشد، دو مدل یکسان خواهند بود. ذکر شدنی است در این حالت، ماتریس های حرکت و تاری با ماتریس های کانولوشن متناظر خواهند شد و در نتیجه، دارای خاصیت جابجایی هستند. جزئیات بیشتر در [۴] آمده است.

برای مقایسه با روابط بخش بعد، رابطه (۱) را می توان به صورت کلی زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{W}_k\mathbf{x} + \mathbf{n}_k \quad (3)$$

که در آن،  $\mathbf{W}_k = \mathbf{A}\mathbf{H}_k\mathbf{C}(\mathbf{d}_k)$  است.

## ۳. بررسی مسائل معکوس

همان گونه که در بخش ۱ بیان شد، مسئله ابر تفکیک پذیری یک مسئله معکوس است؛ از این رو در این قسمت، به طور اجمالی، مسائل معکوس و روش حل آن ها بررسی می شود. تمرکز ما بر روی مسائل خطی معکوسی است که بتوان آن ها را به فرم کلی زیر بیان کرد:

$$\int_{\Omega} \text{system} \times \text{input} \, d\Omega = \text{output} \quad (4)$$

یک مثال کلاسیک از این دست، معادله انتگرال فردهم نوع اول است [۵] که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^1 K(s, t)f(t)dt = g(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (5)$$

که در آن، قسمت سمت راست یعنی  $g(s)$  و هسته  $K(s, t)$  معلوم و  $f(t)$  نامعلوم بوده و هدف یافتن آن است. در اصطلاحات مربوط به مسائل معکوس، اغلب  $g(s)$  یعنی ورودی سیستم معکوس را «داده» و  $f(t)$  را که خروجی آن است، «تصویر»<sup>۵</sup> گویند. همچنین به مجموعه همه تصاویرهای ممکن، فضای تصویر<sup>۶</sup> گفته می شود. یک حالت خاص از رابطه

3. Spatiotemporal Shift Invariant

4. Global Translational

۵. «تصویر» در اینجا یک مفهوم کلی است و نباید آن را با تصویر دیجیتال که توسط سیستم تصویر برداری ایجاد می شود، اشتباه گرفت.

6. Image Space

گسسته‌سازی معادله دو بعدی فردهلم نیز مانند حالت یک بعدی با روش‌هایی همچون روش تریبج انجام می‌گیرد و نتیجه باز به فرم کلی (۶) خواهد بود.

### ۱.۳. مسائل بدمطرح و بدحالتی<sup>۳</sup>

با فرض معلوم بودن  $\mathbf{y}$  و  $\mathbf{A}$ ، مسئله معکوس یافتن  $\mathbf{x}$  با توجه به رابطه  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  خوش‌تعریف<sup>۴</sup> گفته می‌شود اگر شرایط خوش‌تعریفی را داشته باشد [۱۰]. این شرایط عبارت‌اند از: ۱. برای هر داده  $\mathbf{y}$  در فضای داده، تصویری مانند  $\mathbf{x}$  وجود داشته باشد؛ ۲. جواب در فضای تصویر یکتا باشد؛ ۳. نگاهت معکوس  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  پیوسته باشد؛ یعنی تغییرات اندک  $\mathbf{y}$  منجر به تغییرات اندک  $\mathbf{x}$  گردد.

شرط ۱ و ۲ بیان می‌دارند که  $\mathbf{A}$  دارای معکوسی مانند  $\mathbf{A}^{-1}$  است. شرط پیوستگی<sup>۳</sup> شرطی لازم، ولی ناکافی برای پایداری جواب است. در مسائل خوش‌تعریف، خطای نسبی که از داده  $(\mathbf{y})$  به جواب  $(\mathbf{x})$  منتقل می‌شود، با عدد وضعیت<sup>۵</sup> کنترل می‌شود: اگر  $\Delta \mathbf{y}$  میزان تغییر  $\mathbf{y}$  و  $\Delta \mathbf{x}$  میزان تغییر متناظر در  $\mathbf{x}$  باشد، آنگاه [۱۱]:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \quad (۸)$$

با توجه به اینکه طبق (۸) خطای نسبی در  $\mathbf{x}$  برابر است با حاصل ضرب عدد وضعیت  $\mathbf{A}$  در خطای نسبی  $\mathbf{y}$ ، مقادیر کم  $\text{cond}(\mathbf{A})$  مطلوب است. اگر  $\text{cond}(\mathbf{A})$  خیلی بزرگ نباشد، مسئله معکوس  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  خوش‌حالت<sup>۶</sup> خوانده می‌شود و جواب نسبت به تغییرات اندک داده‌ها پایدار است؛ یعنی تغییر اندک  $\mathbf{y}$  موجب تغییر اندک  $\mathbf{x}$  خواهد شد. زمانی که  $\text{cond}(\mathbf{A})$  بزرگ باشد، مسئله بدحالت<sup>۷</sup> نامیده می‌شود.

بدمطرح بودن یک مسئله به این صورت تعریف شده است که مسئله شرایط خوش‌تعریفی را نداشته باشد؛ بنابراین، مسئله بدمطرح مسئله‌ای است که در آن، معکوس وجود ندارد؛ زیرا

(۵) زمانی است که  $K(s, t)$  تنها تابعی از  $s - t$  باشد که در این صورت، رابطه (۵) عملگر آشنای کانولوشن خواهد شد.

با توجه به رابطه (۵)، مشکل در مسائل معکوس از این دست این است که ورودی  $f(t)$  در اثر ضرب‌شدن در هسته  $K(s, t)$  و انتگرال‌گیری هموار می‌شود و فرکانس‌های بالای آن از بین می‌رود. این عمل شبیه کانوالو کردن یک تصویر با یک فیلتر پایین‌گذر است که سبب هموارشدن لبه‌های تصویر می‌شود. همچنین وجود خطا یا نویز در  $g(s)$  سبب ایجاد مشکلاتی در بازیابی  $f(t)$  می‌شود.

رابطه (۵) ارتباط بین داده‌های واقعی و تصویر را بیان می‌کند. از آنجاکه معمولاً این معادله با روش‌های عددی حل می‌شود، باید گسسته شود. دو روش اصلی برای این کار عبارت‌اند از: روش تریبج<sup>۱</sup> و روش بسط<sup>۲</sup> یا Galerkin. برای اطلاعات بیشتر در خصوص این روش‌ها به [۶-۸] مراجعه شود. حاصل گسسته‌سازی رابطه (۵) به صورت زیر است:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} \quad (۶)$$

که در آن، عناصر بردار  $x_j = \tilde{f}(t_j)$  عناصر بردار  $y_i = g(s_i)$  عناصر بردار  $\mathbf{y}$  و  $a_{ij} = w_j K(s_i, t_j)$  عناصر ماتریس  $\mathbf{A}$  بوده و  $w_j$  هاوزن‌های استفاده‌شده در روش تریبج هستند. نکته جالب توجه این است که اگر معادله (۵) به فرم کانولوشن باشد، ماتریس  $\mathbf{A}$  ماتریس Toeplitz خواهد بود [۹]. به این ترتیب، مسئله معکوس عبارت از یافتن تصویر  $\mathbf{x}$  با فرض معلوم بودن داده  $\mathbf{y}$  و مدل مستقیم  $\mathbf{A}$  است.

از آنجاکه داده‌های اندازه‌گیری‌شده همواره با مقداری نویز همراه هستند، رابطه (۶) را می‌توان به صورت  $\mathbf{y}_{exact} = \mathbf{Ax} + \mathbf{n}$  نوشت که در آن،  $\mathbf{y}_{exact}$  داده بدون نویز است. مقایسه (۳) با این رابطه، ارتباط مسئله ابرتفکیک‌پذیری را با مسائل معکوس، به خوبی نشان می‌دهد.

در حالت دو بعدی، معادله فردهلم به شکل زیر است:

$$\int_0^1 \int_0^1 K(s, t, s', t') f(s, t) ds dt = g(s', t'), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (۷)$$

3. Ill-conditioning  
4. Well-posed  
5. Condition Number  
6. Well-Condition  
7. Ill-Condition

1. Quadrature Method  
2. Expansion Method

نشان می‌دهد که هیچ مسئلهٔ نزدیکی که دارای ماتریس ضرایب خوش حالت و رتبهٔ عددی خوبی باشد، وجود ندارد که بتوان این مسئله را به آن تقریب زد.

نکتهٔ جالب و مهم دربارهٔ مسائل بدمطرح گسسته این است که بدحالت بودن مسئله به این معنی نیست که یک جواب با تقریب خوب محاسبه پذیر نیست؛ بلکه بدحالت بودن بیان می‌دارد که روش‌های استاندارد در جبر خطی عددی برای حل معادلات بالا به طور مستقیم، استفاده شدنی نیست و باید از روش‌های پیشرفته تری برای تعیین جواب استفاده شود. این مطلب هدف اساسی روش‌های منظم سازی است که جلوتر بررسی خواهند شد.

در ادامه، یکی از ابزارهای مهم برای تحلیل مسائل بدمطرح گسسته بررسی می‌شود.

### ۲.۳. تحلیل SVD

یکی از ابزارهای عددی مناسب برای تحلیل مسائل بدمطرح گسسته، تجزیهٔ مقادیر تکین<sup>۳</sup> ماتریس  $\mathbf{A}$  است [۴۱]. این تحلیل مشکلات مربوط به بدحالت بودن ماتریس  $\mathbf{A}$  را آشکار می‌کند. فرض کنیم  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  یک ماتریس مستطیلی است که  $m \geq n$ ، آنگاه SVD ماتریس  $\mathbf{A}$  تجزیه‌ای به شکل زیر است:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \quad (11)$$

که  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$  و  $\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$  ماتریس‌هایی با ستون‌های متعامد هستند؛ یعنی  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_m$  و  $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_n$  و ماتریس قطری  $\mathbf{\Sigma}$  دارای عناصر نامنفی  $\sigma_i$  است که به صورت غیر افزایشی بر روی قطر اصلی قرار گرفته‌اند:

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0. \quad (12)$$

اعداد  $\sigma_i$  مقادیر تکین ماتریس  $\mathbf{A}$  بوده که معادل جذر مقادیر ویژهٔ ماتریس  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  یا  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$  می‌باشند و بردارهای  $\mathbf{u}_i$  و  $\mathbf{v}_i$  به ترتیب، بردارهای تکین چپ و راست ماتریس  $\mathbf{A}$  هستند. فرض می‌کنیم اولین  $r$  مقدار تکین  $\mathbf{A}$  غیر صفر باشند، در این صورت، عدد وضعیت ماتریس  $\mathbf{A}$  برابر است با نسبت  $\sigma_1 / \sigma_r$

داده‌ها در بُرد<sup>۱</sup> عملگر  $\mathbf{A}$  نیستند، یا اینکه معکوس به دست آمده یکتا نیست (یعنی دو یا چند تصویر به داده‌های یکسانی نگاشت می‌شوند) یا اینکه یک تغییر کوچک در داده‌ها می‌تواند موجب تغییر بزرگی در تصویر شود؛ برای مثال، نشان می‌دهیم معادلهٔ (۵) یک مسئلهٔ بدمطرح است. با فرض اینکه تغییرات ورودی برابر  $\Delta f(t) = \sin(2\pi p t)$  به ازای  $p = 1, 2, \dots$  باشد، تغییرات خروجی برابر است با:

$$\Delta g(s) = \int_0^1 K(s, t) \sin(2\pi p t) dt \quad (9)$$

طبق قضیهٔ Riemann-Lebesgue با میل کردن  $p$  به سمت بی‌نهایت، مقدار  $\Delta g$  به سمت صفر میل می‌کند. پس با انتخاب مقدار  $p$  به اندازهٔ کافی بزرگ، نسبت  $\|\Delta f\| / \|\Delta g\|$  به طور دلخواه بزرگ می‌شود. این نشان دهندهٔ بدمطرح بودن این مسئله است؛ زیرا نشان می‌دهد شرط سوم از شرایط خوش تعریفی صادق نیست. همچنین این مثال اثر حذف فرکانس‌های بالا را که قبلاً به آن اشاره شد، نشان می‌دهد. می‌توان انتظار داشت برای بازیافت  $f$  از روی  $g$  نیاز باشد فرکانس‌های بالای  $g$  را بیشتر از فرکانس‌های پایین آن تقویت کرد. حال اگر  $g$  آغشته به نویز باشد، این نویز نیز تقویت می‌شود؛ به ویژه نویزهایی با فرکانس بالا. این نکته یکی از مشکلات در حل مسائل معکوس است.

یک راه برای حل تقریبی رابطهٔ (۶)، کمینه کردن تابع هزینهٔ کمترین مربعات خطاست:

$$\min_x \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \quad (10)$$

مسئلهٔ (۱۰) بدمطرح گسسته<sup>۲</sup> است اگر هر دو شرط مقابل را برآورده کند [۱۲]: ۱.  $\mathbf{A}$  دارای دسته‌ای از مقادیر تکین کوچک باشد یا اینکه مقادیر تکین  $\mathbf{A}$  به تدریج به صفر برسند؛ ۲. نسبت بزرگترین به کوچکترین مقدار تکین غیر صفر بزرگ باشد.

شرط دوم بیان می‌دارد که ماتریس  $\mathbf{A}$  بدحالت است؛ یعنی جواب به طور بالقوه، خیلی به اغتشاش حساس است. شرط اول

تقسیم مؤلفه تصادفی بزرگی را ایجاد خواهد کرد که معمولاً مؤلفه  $\mathbf{x}$  در آن راستا در مقابل آن، ناچیز خواهد بود و در نتیجه، مؤلفه  $\hat{\mathbf{x}}$  در آن راستا کاملاً تحت تأثیر نویز است. پس نتیجه‌ای که می‌توان از این بحث گرفت، این است که برای مسائل بدمطرح نمی‌توان از روش‌های معمول مانند شبه معکوس یا همان کمترین مربعات خطا استفاده کرد.

برای نشان دادن این مطلب به‌طور عملی، آزمایشی در شکل (۴) انجام گرفته است. در این آزمایش، قرار است تصویر تارشدگی که نویز به آن اعمال شده، تارزدایی شود. عمل تارزدایی یک مسئله معکوس و بدمطرح است که به مسئله ابرتفکیک‌پذیری نیز ارتباط دارد. در شکل (۴)، ردیف اول از چپ به راست تصویر اصلی، تصویر تارشدگی، تصویر تارشدگی نویزی و تصویر بازیابی شده با رابطه (۱۵) نشان داده شده است. تصویر بازیابی شده به شدت تحت تأثیر نویز است. نکته جالب در این آزمایش، این است که اعمال رابطه (۱۵) به تصویر تارشدگی بدون نویز، منجر به ایجاد تصویری می‌شود که اختلاف آن با تصویر اصلی، بسیار ناچیز است.

### ۳.۳. روش‌های منظم‌سازی<sup>۳</sup>

هدف مسئله معکوس یافتن جوابی است که در رابطه (۶) صدق کند؛ اما همان‌طور که در قسمت قبل دیدیم، یافتن این جواب مشکل است. در حال حاضر، تنها معیاری که نشان‌دهنده مناسب بودن جواب  $\hat{\mathbf{x}}$  است، نزدیک بودن  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$  تا حد امکان به  $\mathbf{y}$  می‌باشد. یکی از کمیت‌هایی که می‌تواند میزان این معیار را تعیین کند، نرم باقیمانده<sup>۴</sup> است:

$$C(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|^2 \quad (16)$$

البته همان‌طور که در قسمت قبل دیدیم، انتخاب تصویری که  $C(\mathbf{x})$  را کمینه کند، معمولاً منجر به تصویر مناسبی نمی‌شود؛ زیرا که اگر ماتریس  $\mathbf{A}$  مرتبه کامل نباشد، تصاویر زیادی وجود دارند که رابطه بالا را کمینه می‌کنند. مشکل اصلی در مسائل بدمطرح گسسته (۶) و (۱۰) این است که به‌علت وجود دسته‌ای

[۱۲ و ۴۱] که نشان می‌دهد اگر  $\sigma_r$  عدد کوچکی باشد، عدد وضعیت ماتریس  $\mathbf{A}$  بزرگ خواهد بود.

در صورت خوش تعریف بودن (۱۰)، می‌توان از شبه معکوس<sup>۱</sup> Moore-Penrose برای حل تقریبی آن استفاده کرد [۴۲]. در ادامه، با کمک SVD اعمال این روش بر مسائل بدمطرح بررسی می‌شود. برای کمینه کردن مجموع مربعات باقیمانده  $e_{SSR} = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|^2$ ، مشتق آن را نسبت به  $\mathbf{x}$  مساوی صفر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب به جواب زیر می‌رسیم:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (13)$$

که  $\hat{\mathbf{x}}$  جواب تقریبی مورد نظر بوده و عبارت  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$  شبه معکوس  $\mathbf{A}$  است. اگر معادل  $\mathbf{A}$  و  $\mathbf{A}^T$  را از تحلیل SVD در این رابطه قرار دهیم، داریم  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \sum_{k=1}^r \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^T$  [۱۳]. با قراردادن این عبارت در رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

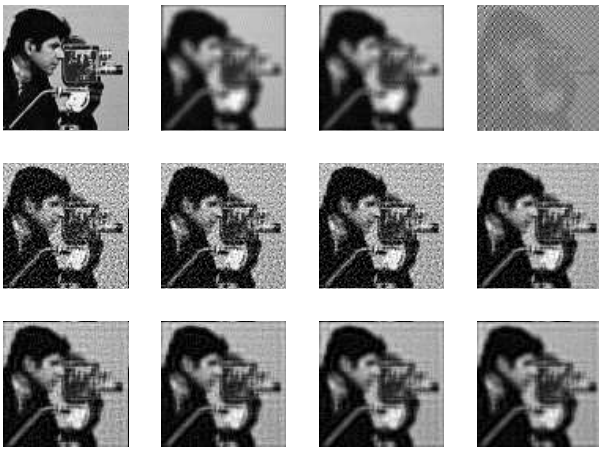
$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^r \frac{(\mathbf{u}_k^T \mathbf{y})}{\sigma_k} \mathbf{v}_k \quad (14)$$

با توجه به اینکه اندازه‌گیری داده‌ها همواره با مقداری خطا همراه خواهد بود؛ از این‌رو، داده  $\mathbf{y}$  را می‌توان به صورت  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{exact} + \mathbf{n}$  نوشت که در آن،  $\mathbf{n}$  نویز بوده و  $\mathbf{y}_{exact}$  داده بدون نویز است. با جایگذاری این عبارت در رابطه (۱۴) خواهیم داشت  $\hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^r \frac{1}{\sigma_k} \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^T (\mathbf{y}_{exact} + \mathbf{n})$  و در نهایت، با فرض مرتبه کامل بودن ماتریس  $\mathbf{A}$  (یعنی  $r = n$ )، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \sum_{k=1}^n \frac{(\mathbf{u}_k^T \mathbf{n})}{\sigma_k} \mathbf{v}_k \quad (15)$$

رابطه (۱۵) نشان می‌دهد جواب به‌دست آمده از روش شبه معکوس برابر است با مجموع تصویر واقعی و عبارتی که به‌علت وجود نویز ایجاد شده است. خطای ایجاد شده در راستای  $\mathbf{v}_k$  در فضای تصویر از مؤلفه نویز در راستای  $\mathbf{u}_k^T$  که بر مقدار تکین  $\sigma_k$  تقسیم شده است، به‌وجود می‌آید. اگر فرض کنیم برخی از مقادیر تکین  $\sigma_k$  کوچک باشند، آنگاه این

باقی مانده کنترل می کند. به روشنی مشخص است که مقدار بزرگ  $\lambda$  (معادل با منظم سازی زیاد)، موجب ایجاد جوابی با اندازه کوچک، ولی به قیمت معیار باقی مانده بزرگ می شود؛ درحالی که مقدار کوچک  $\lambda$  (معادل با منظم سازی کم) اثری معکوس دارد؛ به طوری که اگر  $\lambda$  را مساوی صفر قرار دهیم، به مسئله کمترین مربعات خطا می رسیم؛ بنابراین، پارامتر منظم سازی کمی مهم است که خواص جواب منظم شده را کنترل می کند. برای تعیین مقدار بهینه  $\lambda$  معمولاً از تحلیل منحنی  $L^2$  استفاده می شود. برای اطلاعات بیشتر به [۱۲] مراجعه شود.



شکل (۴): ردیف اول از چپ به راست: تصویر اصلی، تصویر تار شده، تصویر تار شده نویزی و تصویر بازیافت شده با روش شبه معکوس. ردیف دوم و سوم: تار زدایی به روش منظم سازی تیخونوف به ازای مقادیر مختلف  $\lambda$

در پایان این بخش، مثال تار زدایی را با روش منظم سازی بر روی تصویر تار شده نویزی بررسی می کنیم. در شکل (۴)، سطرهای دوم و سوم تصاویر تار زدایی شده به روش تیخونوف، به ازای مقادیر مختلف  $\lambda$  نشان داده شده است. مقدار  $\lambda$  در این بازسازی ها از چپ به راست و از بالا به پایین افزایش پیدا می کند. همان گونه که دیده می شود، به ازای مقادیر کم  $\lambda$  تصویر برفکی و با افزایش آن تصویر هموارتر می شود.

#### ۴. رهیافت های ابر تفکیک پذیری

رهیافت های موجود برای حل مسئله SR را می توان به چهار دسته تقسیم بندی کرد [۱۵] که عبارت اند از: ۱. رهیافت مبتنی بر

#### 5. L-Curve Analysis

از مقادیر تکین کوچک برای ماتریس  $A$ ، این مسائل اساساً فرومعین<sup>۱</sup> هستند؛ از این رو، برای پایدار کردن مسئله و به دست آوردن جواب مفید، لازم است اطلاعاتی اضافی درباره جواب مطلوب به معادله وارد کنیم. این عمل هدف منظم سازی است و جواب حاصل از تکنیک منظم سازی را جواب منظم شده<sup>۲</sup> گویند. از آنجاکه روش های تحلیلی تنها در صورت انتخاب معیارهای ساده برای منظم سازی وجود دارد، تابع ساده  $\Omega(x)$  به عنوان قید دوم معرفی می شود. این تابع نمایانگر شرایط نامطلوب جواب است و قرار است کمینه شود. رهیافت غالب برای منظم سازی مسائل بدمطرح گسسته این است که جواب یا تقریبی از آن معیار  $l_2$  کوچکی داشته باشد؛ از این رو، تابع  $\Omega(x)$  معمولاً شکل کلی زیر را دارد [۱۲].

$$\Omega(x) = \|L(x - x^*)\|_2^2 \quad (17)$$

در ساده ترین حالت، ماتریس  $L$  ماتریس همانی  $I_n$  و  $x^* = 0$  است که منجر به  $\Omega(x) = \|x\|_2^2$  می شود؛ یعنی دنبال جوابی هستیم که اندازه کوچکی داشته باشد. حالت بعدی زمانی است که اطلاعاتی از قبل درباره جواب مناسب داشته باشیم؛ از این رو، ترجیح می دهیم جواب بازیافت شده به یک جواب پیش فرض مانند  $x^*$  نزدیک باشد. حالت کلی تر این است که ماتریس  $L$  تقریبی گسسته از یک مشتق گیر باشد. به عبارت  $\|L(x - x^*)\|_2$  نیمه معیار جواب<sup>۳</sup> نیز گفته می شود.

حال باید جوابی را جست و جو کرد که بین کمینه شدن قید جانبی  $\Omega(x)$  و کمینه شدن معیار باقی مانده، یعنی  $\|Ax - y\|_2$  تعادل ایجاد کند. روش های منظم سازی مختلفی وجود دارد که یکی از متداول ترین و معروف ترین آن ها منظم سازی تیخونوف<sup>۴</sup> [۱۴] است. در این روش، جواب منظم شده  $x_\lambda$  جوابی است که مجموعی وزن دار از معیار باقیمانده و قید جانبی را کمینه کند:

$$x_\lambda = \arg \min \{ \|Ax - y\|_2^2 + \lambda^2 \|L(x - x^*)\|_2^2 \} \quad (18)$$

پارامتر منظم سازی  $\lambda$  وزن قید جانبی را نسبت به معیار

1. Underdetermined
2. Regularized Solution
3. Solution semi-Norm
4. Tikhonov Regularization



اطلاعات متفاوت از دیگر تصاویر است، تصویر نهایی دقت بیشتری خواهد داشت. رهیافت مبتنی بر درون‌یابی معمولاً شامل سه مرحله است [۱]: ۱. مرحله ثبت تصاویر LR؛ ۲. مرحله درون‌یابی برای ایجاد تصویر HR؛ ۳. مرحله تازی‌زدایی تصویر ایجادشده در مرحله دوم.

مرحله درون‌یابی نقشی کلیدی در این رهیافت بازی می‌کند. روش‌های مختلفی برای درون‌یابی وجود دارد. ساده‌ترین روش درون‌یابی نزدیک‌ترین همسایه است که به هر پیکسل نامشخص، شدت نوری برابر با همسایه‌اش می‌دهد. عیب این روش درون‌یابی ایجاد تصویری بلاکی است. روش دیگر برای درون‌یابی، درون‌یابی نایکناخت [۱۷] است که از قضیه نمونه‌برداری چندکاناله تعمیم‌یافته<sup>۴</sup> استفاده می‌کند.

از مزایای رهیافت درون‌یابی بار محاسباتی پایین آن است که برای کارهای بلادرنگ مفید است؛ البته بهینه‌بودن این روش تضمین نمی‌شود؛ زیرا خطای درون‌یابی در آن لحاظ نمی‌شود. همچنین خطای ثبت می‌تواند به‌سادگی به مراحل دیگر انتشار پیدا کند.

در [۱۸] از روش کمترین مربعات متحرک<sup>۵</sup> برای تخمین روشنایی هر پیکسل از تصویر HR توسط تقریب چندجمله‌ای با استفاده از مقدار روشنایی پیکسل‌های معلوم استفاده شده است. در این روش، درجه و ضرایب چندجمله‌ای برای هر پیکسل، به‌طور تطبیقی تعیین می‌شود.

مراحل بیان‌شده در این رهیافت را می‌توان به‌طور تکراری اجرا کرد؛ از این‌رو، مرجع [۱۹] الگوریتم پس‌افکنش تکراری<sup>۶</sup> را پیشنهاد داده است که در آن، تصویر HR با افکنش متوالی اختلاف بین تصویر LR مشاهده‌شده و تصویر LR شبیه‌سازی شده برآورد می‌شود؛ البته در این الگوریتم، به‌دلیل عدم طرح‌بودن مسئله SR، ممکن است جواب‌ها یکتا نباشند که از معایب این روش به حساب می‌آید.

افکنش بر روی مجموعه‌های محدب<sup>۷</sup> روشی است که در

حوزه فرکانس؛ ۲. رهیافت مبتنی بر درون‌یابی؛ ۳. رهیافت مبتنی بر یادگیری؛ ۴. رهیافت مبتنی بر منظم‌سازی. در ادامه، هریک از این رهیافت‌ها را به‌طور خلاصه بررسی می‌کنیم.

#### ۱.۴. رهیافت مبتنی بر حوزه فرکانس

مسئله SR در ابتدا توسط تسای و هوانگ [۱۶] در سال ۱۹۸۴ مطرح شد. ایشان رهیافت حوزه فرکانس را برای حل مسئله SR پیشنهاد دادند. در این روش، از درهم‌آمیختگی<sup>۱</sup> که در تصاویر LR وجود دارد، برای بازسازی تصویر HR استفاده می‌شود. این روش بر پایه این سه اصل استوار است: ۱. خاصیت جابجایی تبدیل فوریه؛ ۲. ارتباط درهم‌آمیختگی بین تبدیل فوریه پیوسته تصویر HR و تبدیل فوریه گسسته تصاویر LR؛ ۳. فرض اینکه تصویر HR بانند محدود است.

مهم‌ترین مزیت روش حوزه فرکانس، سادگی تئوری آن است. بدین معنی که ارتباط بین تصاویر LR و تصویر HR به‌روشنی در حوزه فرکانس، نمایش داده می‌شود. از دیگر مزایای این روش، امکان پیاده‌سازی موازی آن است که موجب افزایش سرعت می‌شود. با وجود این، در این روش، نوع حرکت تصاویر نسبت به هم، فقط محدود به انتقال کلی است و تازی اعمال‌شده به تصاویر خطی و نامتغیر با مکان<sup>۲</sup> فرض می‌شود؛ درحالی‌که در عمل ممکن است تصاویر نسبت به هم حرکت‌های پیچیده‌تری مانند چرخش، تغییر مقیاس و ترکیبی از آن‌ها را داشته باشند. از دیگر معایب این روش، این است که اعمال دانش پیشین در حوزه مکان برای منظم‌سازی آن مشکل است [۱]. به‌عبارت دیگر، اطلاعات قبلی در حوزه مکان را نمی‌توان به‌راحتی در روابط حوزه فرکانس وارد کرد. با توجه به معایب گفته‌شده، امروزه این روش کاربرد چندانی ندارد.

#### ۱.۴. رهیافت مبتنی بر درون‌یابی

در این رهیافت، تصویر HR با افکنش<sup>۳</sup> تمام تصاویر LR بر روی تصویر مرجع و سپس ترکیب‌کردن اطلاعات موجود در آن‌ها به‌دست می‌آید. از آنجاکه هر تصویر دارای مقداری

4. Generalized Multichannel Sampling Theorem

5. Moving Least Square (MLS)

6. Iterative Back-Propagation

7. Projection onto Convex Sets(POCS)

1. Aliasing

2. Linear Space Invariant (LSI)

3. Projection

هدف آن جست‌وجو برای نمایش خلوت هر وصله از ورودی LR و استفاده از نمایش خلوت تصویر برای تولید خروجی HR است. با آموزش دو دیکشنری برای وصله‌های LR و HR، نمایش خلوت وصله LR با استفاده از دیکشنری LR ایجاد و به دیکشنری HR اعمال می‌شود تا وصله HR متناظر به وجود آید. صحت این روش که نتایج امیدبخشی در پی دارد، در [۲۵] از منظر تئوری یادگیری به اثبات رسیده است.

شکل (۵) تعدادی از عناصر موجود در یک دیکشنری HR را نشان می‌دهد. این عناصر با استفاده از یکصد هزار زوج تصویر با دقت زیاد و دقت کم از تصاویر مختلف آموزشی ایجاد شده‌اند و اندازه هر یک  $9 \times 9$  می‌باشد.



شکل (۵): برخی از عناصر یک دیکشنری HR که برای بازسازی وصله‌های تصویر HR استفاده می‌شود [۲۴].

### ۳.۴. رهیافت منظم‌سازی برای ابر تفکیک پذیری<sup>۷</sup>

همان‌طور که گفته شد، مسئله SR یک مسئله بدمطرح است و برای پایاساختن مسائل معکوس بدمطرح، از روش‌های منظم‌سازی استفاده می‌شود. روش‌های منظم‌سازی به دو دسته منظم‌سازی قطعی<sup>۸</sup> و منظم‌سازی تصادفی<sup>۹</sup> تقسیم‌بندی می‌شوند. می‌شوند.

#### ۱.۴.۴. منظم‌سازی قطعی

منظم‌سازی قطعی در بخش قبل، برای مسائل معکوس بیان شد. برای یافتن تصویر مطلوب در رابطه (۳) می‌توان جوابی را جست‌وجو کرد که تابع هزینه  $\sum_{k=1}^K \|y_k - W_k x\|^2$  را کمینه کند؛ البته تابع هزینه مذکور به‌تنهایی برای حل مسئله SR کافی نیست [۲۶]؛ از این‌رو، با استفاده از روش منظم‌سازی به راه حل تکراری زیر می‌رسیم [۱]:

7. Regularized SR Reconstruction Approach
8. Deterministic Regularization
9. Stochastic Regularization

[۲۰] برای ایجاد یک تصویر HR که هم با تصاویر LR و هم با دانش قبلی راجع به تصویر HR سازگار باشد، پیشنهاد شده است. این اطلاعات با استفاده از مجموعه‌های قید<sup>۱</sup> بیان می‌شوند. این مجموعه‌ها در فضای جواب واقع هستند و اشتراک آن‌ها جواب‌های مجاز را مشخص می‌کند. پیاده‌سازی الگوریتم ساده است؛ اما تضمینی برای جواب یکتا وجود نداشته و هزینه محاسباتی آن زیاد است.

### ۲.۴. رهیافت مبتنی بر یادگیری

روش‌های یادگیری نیز برای حل مسئله SR پیشنهاد شده‌اند. برخلاف دیگر رهیافت‌ها، در این رهیافت، تنها یک تصویر LR وجود دارد و اطلاعات فرکانس بالای آن براساس ویژگی‌های محلی آن، از روی تصاویر آموزشی به‌دست می‌آید. در [۲۱] یک روش برای تولید جزئیات فرکانس بالای تصویر LR با استفاده از مجموعه داده آموزشی پیشنهاد شده است که الگوریتم آن دو مرحله دارد: مرحله یادگیری برون خط<sup>۲</sup> و مرحله بازسازی SR. در مرحله یادگیری، وصله‌های تصویر<sup>۳</sup> به‌عنوان تصاویر مرجع<sup>۴</sup> در نظر گرفته می‌شود و با شبیه‌سازی سیستم تصویربرداری، از آن‌ها تصاویر کم‌دقت ایجاد می‌شود. به این ترتیب، زوج وصله‌های LR و وصله‌های HR متناظر به‌صورت مجموعه داده جمع‌آوری می‌شود. در مرحله بازسازی SR، وصله‌های تصویر LR استخراج و با وصله‌های داخل مجموعه داده مقایسه می‌شود. سپس وصله‌ای با بهترین تطابق براساس معیار شباهت مشخصی انتخاب و وصله HR متناظر با آن، برای ساخت تصویر HR استفاده می‌شود.

تحقیقات اخیر در زمینه مطالعه آماری تصویر نشان می‌دهد وصله‌های تصویر را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی خلوت<sup>۵</sup> از عناصر یک دیکشنری فوق کامل<sup>۶</sup> از وصله‌های تصویر نمایش داد [۲۲-۲۴]. با توجه به این نکته، الگوریتمی ارائه شده که

1. Constraint Sets
2. Off-line
3. Image Patches
4. Ground Truth
5. Sparse Linear Combination
6. Over-complete

$$\hat{\mathbf{x}}^{n+1} = \hat{\mathbf{x}}^n + \beta \left[ \sum_{k=1}^K \mathbf{W}_k^T (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}^n) - \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}^n \right] \quad (19)$$

که در آن،  $\beta$  پارامتر همگرایی بوده و  $\mathbf{W}_k^T$  شامل عملگر افزایش تعداد نمونه<sup>۱</sup>، تاری و تغییرات هندسی است.

#### ۲.۴.۴. منظم‌سازی تصادفی

روش دیگر منظم‌سازی، منظم‌سازی تصادفی است که معمولاً از چهارچوب بیز در آن استفاده می‌شود. رهیافت منظم‌سازی تصادفی امکان اعمال دانش قبلی درباره مسئله را به‌طور کارا در اختیار قرار می‌دهد [۲]. در این رهیافت، همه پارامترها و متغیرهای مشاهده‌شده به‌صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شوند و براساس اطلاعات موجود، در حیطه مسئله، یعنی همان دانش قبلی، به هریک از آن‌ها یک توزیع احتمال متناسب می‌گردد که به آن، توزیع پیشین<sup>۲</sup> گفته می‌شود. سپس با استفاده از چهارچوب بیز، توزیع احتمالی متغیرهای مورد نظر براساس توزیع‌های احتمالی پیشین و توزیع احتمالی شرطی به‌دست می‌آید. این روش منظم‌سازی معمولاً جامع‌تر از روش منظم‌سازی قطعی است؛ به‌طوری‌که در حالتی که نویز اعمال‌شده در فرایند تصویربرداری از نوع نرمال جمع‌شونده باشد، رهیافت منظم‌سازی قطعی متناظر است با تخمین درست‌نمایی بیشینه که یک حالت خاص از رهیافت منظم‌سازی تصادفی است [۲۷]؛ ازاین‌رو، این رهیافت در بخش بعد با تفصیل بیشتر تشریح می‌شود.

#### ۵. چهارچوب بیز برای حل مسئله SR

در این بخش، راه حل مسئله SR را با روش منظم‌سازی تصادفی در قالب مدل بیز بیان می‌کنیم. در ادامه، منظور از  $\mathbf{y}$  و  $\mathbf{d}$  به ترتیب، بردار همه تصاویر مشاهده‌شده و بردار همه حرکت‌هاست که از روی هم قرارگرفتن بردارهای  $\mathbf{y}_k$  و  $\mathbf{d}_k$  ایجاد می‌شوند. در مدل بیز، همه پارامترها و متغیرهای مشاهده شده به‌صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شوند و براساس

اطلاعات موجود در حیطه مسئله، به هریک از آن‌ها یک توزیع احتمال منسوب می‌شود [۴۲]. به این ترتیب، تصویر  $\mathbf{x}$  و بردار حرکت  $\mathbf{d}$  به‌عنوان نمونه‌هایی از میدان‌های تصادفی<sup>۳</sup> با توزیع‌های احتمال پیشینی که دانش قبلی ما را درباره تصویر HR و بردارهای حرکت مدل می‌کنند، بیان می‌شوند. همچنین تصاویر مشاهده‌شده  $\mathbf{y}$  که تابعی از  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{d}$  هستند، نمونه‌هایی از یک میدان تصادفی در نظر گرفته می‌شوند که یک توزیع احتمال شرطی فرایند ایجاد آن‌ها را از روی  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{d}$  مدل می‌کند. توزیع‌های احتمالی بیان‌شده به پارامترهایی وابسته‌اند که آن‌ها را با  $\Omega$  نشان می‌دهیم. با فرض معلوم بودن  $\Omega$ ، توزیع احتمال توأم که رابطه بین داده‌های مشاهده‌شده و کمیت‌های مجهول را در مسئله SR مدل می‌کند، به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{y}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{d})\mathbf{P}(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (20)$$

#### ۱.۵. استنتاج بیز

بعد از مدل کردن مسئله SR در چهارچوب بیز، استنتاج بیز با تعیین توزیع احتمال پسین<sup>۴</sup> به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{d}|\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{d})\mathbf{P}(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{d})}{\mathbf{P}(\mathbf{y})} \quad (21)$$

با توجه به رابطه بالا یکی از روش‌های تعیین  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{d}$  راه حل بیشینه احتمال پسین است:

$$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{d}} = \arg \max_{\mathbf{x}, \mathbf{d}} \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{d}|\mathbf{y}) \\ = \arg \max_{\mathbf{x}, \mathbf{d}} \{\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{d})\mathbf{P}(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{d})\} \quad (22)$$

بسته به تابع چگالی احتمال پیشین و تابع چگالی احتمال شرطی در روابط بالا، ممکن است یافتن راه حل تحلیلی برای (۲۲) مشکل باشد؛ ازاین‌رو، از روش‌های عددی برای حل آن استفاده می‌شود. مشکل اصلی در حل عددی این روابط، تخمین هم‌زمان متغیرهای  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{d}$  است. در کارهای انجام‌شده در زمینه SR اغلب از دو روش زیر برای غلبه بر این مشکل استفاده می‌شود [۳].

- روش تناوبی<sup>۵</sup>: این روش از رویه تناوبی کاهش مختصات<sup>۱</sup> مختصات<sup>۱</sup> استفاده می‌کند. فرض می‌کنیم  $\hat{\mathbf{x}}^q$  تخمین فعلی

3. Random Fields

4. Posterior Probability Distribution

5. Alternate Procedure

1. Upsampling operator

2. Prior Distribution

$$P(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}, \mathbf{d}_k) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y}_k - \mathbf{A}\mathbf{H}_k \mathbf{C}(\mathbf{d}_k) \mathbf{x}\|^2 \right] \quad (26)$$

با توجه به رابطه بالا و با فرض استقلال بین مشاهدات، توزیع شرطی تصاویر مشاهده شده برابر است با  $P(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{d}) = \prod_{k=1}^K P(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}, \mathbf{d}_k)$  که در آن،  $K$  تعداد تصاویر LR است.

طبق رابطه (26) برای محاسبه  $P(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}, \mathbf{d})$  نیاز است بردارهای حرکت یا جابجایی  $\mathbf{d}_k$  تعیین شوند. برای تخمین بردارهای حرکت، فرض می کنیم به مجموعه تصاویر LR یعنی  $\mathbf{y}$  که شامل  $\mathbf{y}_1$  تا  $\mathbf{y}_K$  است، دسترسی داریم. اغلب روش های تخمین حرکت در تصاویر HR، ابتدا  $\mathbf{y}_k$  ها را با استفاده از درون یابی بزرگ نمایی می کند تا  $\mathbf{u}_k$  ها یعنی تخمینی از  $\mathbf{x}$  یا همان تصویر HR به دست آید. برای محاسبه بردارهای جابجایی نیاز است تصویری مانند  $\mathbf{u}_r$  به عنوان تصویر مرجع انتخاب شود (مثلاً تصویر اول) و سپس جابجایی بقیه تصاویر  $\mathbf{u}_k$  نسبت به آن محاسبه گردد. این جابجایی را که در رابطه زیر صدق می کند، با  $\mathbf{d}_{k,r}(x, y)$  نمایش می دهیم.

$$\mathbf{u}_k(x, y) = \mathbf{u}_r(x + d_{k,r}^x(x, y), y + d_{k,r}^y(x, y)) \quad (27)$$

که  $d_{k,r}^x$  و  $d_{k,r}^y$  مؤلفه های  $\mathbf{d}_{k,r}$  هستند.

حال با توجه به رابطه بالا، در این قسمت، تعدادی از مدل های حرکت یا تغییرات هندسی بیان می شود. ساده ترین مدل حرکت، مدل حرکت انتقالی<sup>۳</sup> است که می تواند بر روی کل تصویر یا ناحیه ای خاص از تصویر اعمال شود. این مدل به صورت  $\mathbf{u}_k(x, y) = \mathbf{u}_r(x + p_1, y + p_2)$  بیان می شود. در کارهای انجام شده، چندین روش برای تخمین حرکت انتقالی بیان شده است که پرکاربردترین آن تطبیق بلاک سلسله مراتبی<sup>۴</sup> [۲۸] است. همبستگی زاویه<sup>۵</sup> نیز در اینجا مورد استفاده قرار گرفته است [۲۹].

مدل دیگر برای تغییرات هندسی که انعطاف پذیری بیشتری دارد، مدل جابجایی و چرخش به دور مبدأ است:

از تصویر HR باشد که در آن،  $q$  اندیس تکرار است. ابتدا تخمینی از بردار جابجایی با حل رابطه زیر به دست می آید:

$$\hat{\mathbf{d}}^q = \arg \max_{\mathbf{d}} \{P(\hat{\mathbf{x}}^q, \mathbf{d})P(\mathbf{y} | \hat{\mathbf{x}}^q, \mathbf{d})\} \quad (23)$$

سپس تصویر  $\mathbf{x}$  با فرض اینکه بردار جابجایی بالا دقیق است، طبق رابطه زیر به دست می آید:

$$\hat{\mathbf{x}}^q = \arg \max_{\mathbf{x}} \{P(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}^q)P(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \hat{\mathbf{d}}^q)\} \quad (24)$$

آنگاه اندیس  $q$  به  $q + 1$  تبدیل می شود و جواب های روابط فوق دوباره به دست می آیند. این رویه تا رسیدن به همگرایی تکرار می شود.

• روش ترتیبی<sup>۶</sup>: در این روش، فرض می شود  $\mathbf{d}$  یا مشخص است یا از قبل برآورد شده است. این مقدار  $\mathbf{d}$  را با  $\bar{\mathbf{d}}$  نمایش می دهیم. حال طبق رابطه (24) تصویر HR را به دست می آوریم که در آن، به جای  $\hat{\mathbf{d}}^q$  باید  $\bar{\mathbf{d}}$  را قرار داد؛ البته این روش برخلاف روش قبل، روشی تکراری نیست. از آنجاکه در روش ترتیبی، تخمین بردار  $\mathbf{d}$  به صورت مجزا از تخمین تصویر HR انجام می شود، هرگونه خطا در تخمین  $\mathbf{d}$  به مرحله تخمین HR منتقل می شود و در نتیجه، این روش خطا پذیری بیشتری نسبت به روش تناوبی دارد. با توجه به اینکه  $P(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = P(\mathbf{x})P(\mathbf{d} | \mathbf{x})$ ، رابطه (22) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{d}} = \arg \max_{\mathbf{x}, \mathbf{d}} \{P(\mathbf{x})P(\mathbf{d} | \mathbf{x})P(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{d})\} \quad (25)$$

طبق رابطه (25) با داشتن سه توزیع  $P(\mathbf{d} | \mathbf{x})$ ،  $P(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{d})$  و  $P(\mathbf{x})$  می توان تصویر HR را بازسازی کرد. در اینجا تابع احتمال شرطی  $P(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{d})$  و در ادامه، دو توزیع دیگر بررسی خواهد شد. تابع چگالی احتمال شرطی  $P(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}, \mathbf{d})$  مربوط به تصویر  $\mathbf{y}_k$  از رابطه (۱) و با توجه به نوع نویز به دست می آید؛ برای مثال، اگر نویز  $\mathbf{n}_k$  در رابطه (۱) از نوع گوسی با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  باشد، تابع چگالی احتمال شرطی زیر به دست می آید [۳]. فرض انواع دیگر نویز، توزیع شرطی متفاوتی را به دست خواهد داد.

کیفیت تصویر HR بازسازی شده تا حد زیادی به دانش پیشین ما درباره ساختار  $\mathbf{x}$  که با چگالی احتمال  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  بیان می شود، بستگی دارد. چندین انتخاب برای  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  ممکن است. برخی از روش های SR به همه تصاویر HR ممکن احتمال یکسانی می دهند. این فرض متناظر است با پیشین بدون اطلاعات<sup>۴</sup> که نمایش آن به صورت  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) \propto \text{constant}$  است. در این صورت، تصویر HR برابر است با:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \mathbf{P}(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (32)$$

و با جایگذاری رابطه (۲۶) در رابطه (۳۲) تصویر HR به دست می آید.

علاوه بر مدل پیشین بدون اطلاعات، مدل دیگر برای  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  براساس فرض هموار بودن تصاویر طبیعی است. یک راه برای مدل سازی این ایده، استفاده از توزیع پیشین زیر است:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) \propto \exp \left[ -\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{Q}\mathbf{x}\|^2 \right] \quad (33)$$

که  $\mathbf{Q}$  نمایانگر یک فیلتر بالاگذر خطی است که تخمین هایی را که هموار نیستند، جریمه و  $\lambda$  واریانس توزیع را کنترل می کند و با آن نسبت عکس دارد.

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که توزیع های احتمال پیشین و احتمال شرطی به پارامترهایی وابسته اند که آن ها را با  $\Omega$  نشان می دهیم. پارامترهای توزیع پیشین ابرپارامتر<sup>۵</sup> نامیده می شوند. اغلب مقدار این پارامترها معلوم فرض می شود؛ هر چند در عمل ممکن است مقدار آن ها مشخص نباشد. چهارچوب بیز این قابلیت را دارد که در صورت معلوم نبودن  $\Omega$  بتوان آن را تخمین زد. زمانی که  $\Omega$  نامشخص باشد، می توان از چهارچوب سلسله مراتبی بیز استفاده کرد که در آن، دانش قبلی در مورد مقدار  $\Omega$  مدل می شود. توزیع احتمال این ابرپارامترها، توزیع ابرپیشین<sup>۶</sup> نامیده می شود. این مدل سازی سلسله مراتبی، توزیع احتمال توأم کلی<sup>۷</sup> زیر را در پی دارد.

$$\mathbf{P}(\Omega, \mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{y}) = \mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{d}|\Omega)\mathbf{P}(\mathbf{y}|\Omega, \mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (34)$$

$$\mathbf{u}_k(x, y) = \mathbf{u}_r(x \cos \theta - y \sin \theta + a, x \sin \theta + y \cos \theta + b) \quad (28)$$

تخمین زاویه چرخش و جابجایی با استفاده از اولین جمله از بسط سری تیلور انجام شده است [۱۹ و ۳۰].

با پیچیده تر کردن مدل به تبدیل مستوی<sup>۱</sup> می رسیم که انتقال، چرخش و تغییر مقیاس از حالات خاص آن است. این مدل در [۱۹ و ۳۱] استفاده شده است. مدل دیگر تبدیل دو خطی<sup>۲</sup> است که در [۳۲] از آن استفاده شده است. همچنین از روش های مرتبط به الگوریتم Lucas-Kanade نیز برای تخمین جابجایی در این مدل ها استفاده شده است [۳۳].

تطبیق ویژگی<sup>۳</sup> نیز در تخمین جابجایی در SR استفاده شده است که می توان به الگوریتم تشخیص ویژگی Harris اشاره کرد [۳۴ و ۳۵]. همچنین مقایسه ای بین الگوریتم های مبتنی بر Lucas-Kanade و الگوریتم های تطبیق ویژگی برای SR در [۳۶] انجام شده است. علاوه بر روش های بیان شده در زمینه تخمین حرکت در مسئله SR، کارهایی با استفاده از روش های Blind Deconvolution نیز در این زمینه صورت گرفته است [۳۷].

حال نوبت به بررسی مدل های پیشین برای تصاویر HR یعنی  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  می رسد. با داشتن این توزیع، آنچه برای مدل سازی بیز در مسئله SR نیاز است، یعنی همه کمیت های سمت راست رابطه زیر فراهم خواهد بود:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \mathbf{y}_k) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{d}|\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (29)$$

و تصویر HR با حل معادله زیر به دست می آید:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{d}|\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (30)$$

در اغلب روش هایی که در مقالات پیشنهاد شده، فرض شده است که روشنایی تصویر و بردارهای حرکت مستقل از هم هستند؛ یعنی  $\mathbf{P}(\mathbf{d}|\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{d})$ . با در نظر گرفتن این استقلال رابطه بالا به رابطه زیر تبدیل می شود:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (31)$$

4. Non-informative Prior  
5. Hyperparameter  
6. Hyperprior Distribution  
7. Joint Global Probability Distribution

1. Affine Transformation  
2. Bilinear Transformation  
3. Feature Matching

تولیدشده توسط یک زنجیر مارکوف، توزیع پسین را تقریب می‌زند. ساده‌ترین مثال برای MCMC نمونه‌بردار گیبز است. زمانی که نمونه‌ها جمع‌آوری شد، می‌توان از آن‌ها جهت یافتن خواص توزیع و بیشینه‌کردن آن استفاده کرد.

### ۶. جمع‌بندی

تهیه تصاویر با تفکیک‌پذیری زیاد در کاربردهای مختلف، از ارزش بالایی برخوردار است. برای دستیابی به تصاویری با تفکیک‌پذیری زیاد، دو رهیافت سخت‌افزاری و نرم‌افزاری وجود دارد. با توجه به محدودیت‌های سخت‌افزار و نیز برای جلوگیری از افزایش هزینه، رهیافت نرم‌افزاری مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. این رهیافت نرم‌افزاری که ابرتفکیک‌پذیری نام دارد، روشی است که توسط آن می‌توان با استفاده از یک یا چند تصویر با تفکیک‌پذیری کم از صحنه، تصویری با تفکیک‌پذیری زیاد از آن صحنه ایجاد کرد.

روش‌های گوناگونی برای مسئله ابرتفکیک‌پذیری پیشنهاد شده است که به‌علت عدم مطرح‌بودن این مسئله، روش‌های منظم‌سازی از جایگاه ویژه‌ای برخوردار هستند. در این روش‌ها از اطلاعات موجود درباره تصاویر برای منظم‌سازی استفاده می‌شود. روش‌های منظم‌سازی به دو دسته قطعی و تصادفی تقسیم می‌شوند. در روش منظم‌سازی تصادفی، همه پارامترها و متغیرهای مشاهده‌شده به‌صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شوند و اطلاعات موجود درباره هر یک به‌صورت یک توزیع احتمال پیشین به آن منتسب می‌شود. روش منظم‌سازی تصادفی با استفاده از چهارچوب بیز توزیع احتمالی متغیرهای مورد نظر را براساس توزیع‌های احتمال پیشین و توزیع احتمال شرطی به‌دست می‌دهد. همچنین چهارچوب بیز این قابلیت را دارد که پارامترهای نامعلوم توزیع‌های مذکور را با استفاده از داده‌های مسئله مشخص کند.

هرچند رهیافت ابرتفکیک‌پذیری مبتنی بر یادگیری در دسته روش‌های منظم‌سازی قرار ندارد، اساساً این روش هم از نوعی منظم‌سازی استفاده می‌کند. در واقع، دیکشنری‌های مورد استفاده در این روش، به نوعی اطلاعاتی درباره تصاویر به الگوریتم وارد می‌کند. با توجه به نتایج امیدبخش این روش و روش

که  $P(\mathbf{y}|\Omega, \mathbf{x}, \mathbf{d})$  درست‌نمایی مشاهدات<sup>۱</sup> نام دارد. عموماً  $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{d}$  با معلوم‌بودن مقدار  $\Omega$  مستقل فرض می‌شوند:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{d}|\Omega) = P(\mathbf{x}|\Omega)P(\mathbf{d}|\Omega) \quad (35)$$

تحت چهارچوب سلسله‌مراتبی بیز، مسئله SR تبدیل به یافتن احتمال پسین به‌صورت زیر می‌شود:

$$P(\Omega, \mathbf{x}, \mathbf{d}|\mathbf{y}) \propto P(\Omega)P(\mathbf{x}, \mathbf{d}|\Omega)P(\mathbf{y}|\Omega, \mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (36)$$

در قسمت‌های قبل، توزیع‌های  $P(\mathbf{x}, \mathbf{d}|\Omega)$  و  $P(\mathbf{y}|\Omega, \mathbf{x}, \mathbf{d})$  با فرض معلوم‌بودن  $\Omega$  بررسی شد. در اصطلاحات مربوط به مدل‌سازی سلسله‌مراتبی بیز، فرمول‌بندی  $P(\Omega)$  مرحله دوم<sup>۲</sup> را تشکیل می‌دهد؛ مرحله اول فرمول‌بندی  $P(\mathbf{x}, \mathbf{d}|\Omega)$  و  $P(\mathbf{y}|\Omega, \mathbf{x}, \mathbf{d})$  است.

در بسیاری از کارهای انجام‌شده، زمانی که  $\Omega$  نامعلوم است، از مدل  $P(\Omega) = \text{constant}$  استفاده شده است. روشن است که این بهترین انتخاب برای توزیع  $P(\Omega)$  نیست. در [۳] مدل‌های دیگری برای ابر پیشین بیان شده است. بعد از انتخاب  $P(\Omega)$ ، یک راه برای حل مسئله SR استفاده از  $MAP^*$  است:

$$\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{d}}, \hat{\Omega}\}_{MAP} = \arg \max_{\mathbf{x}, \mathbf{d}, \Omega} P(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \Omega|\mathbf{y}) \quad (37)$$

از الگوریتم بیشینه‌سازی امید<sup>۴</sup> که روش متداولی برای حل تکراری مسائل MAP و ML است، نیز برای حل مسئله SR استفاده شده است [۳۸ و ۳۹]. در مسائلی که به‌علت مشخص‌نبودن توزیع پسین نمی‌توان از EM استفاده کرد، روش‌های بیز تغییراتی<sup>۵</sup> که تعمیمی از الگوریتم EM هستند، با تقریب‌زدن  $P(\mathbf{x}, \mathbf{d}, \Omega|\mathbf{y})$  به توزیعی ساده‌تر مشکل را برطرف می‌کنند. روش بیز تغییراتی در [۲] استفاده شده است.

در نهایت، زمانی که راه حل تحلیلی در دست نیست، متداول‌ترین رهیافت برای SR شبیه‌سازی توزیع پسین، یعنی رابطه (۳۶) است. از لحاظ نظری، این روش بر روی مدل‌هایی در فضاها چندبعدی و با پیچیدگی دلخواه، اجراشدنی است. روش‌های MCMC<sup>۶</sup> [۴۰] با استفاده از آمار نمونه‌های

1. Likelihood of Observation
2. Second stage
3. Maximum a Posteriori
4. Expectation Maximization (EM)
5. Variational Bayesian
6. Markov Chain Monte Carlo (MCMC)

درخصوص تصاویر و به‌کارگیری این اطلاعات به‌طور کارا در الگوریتم است.

منظم‌سازی تصادفی، می‌توان نتیجه گرفت موفقیت الگوریتم‌های ابرتفکیک‌پذیری در گرو استخراج و مدل‌کردن اطلاعات مفید

## مراجع

- [1] Park, Sung Cheol, Min Kyu Park, and Moon Gi Kang. "Super-resolution image reconstruction: a technical overview." *Signal Processing Magazine, IEEE* 20.3 (2003): 21-36.
- [2] Babacan, S. Derin, Rafael Molina, and Aggelos K. Katsaggelos. "Variational Bayesian super resolution." *Image Processing, IEEE Transactions on* 20.4 (2011): 984-999.
- [3] Katsaggelos, Aggelos K., Rafael Molina, and Javier Mateos. "Super resolution of images and video." *Synthesis Lectures on Image, Video, and Multimedia Processing* 1.1 (2007): 1-134.
- [4] Z. Wang and F. Qi, "On ambiguities in super-resolution modeling", *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 11, pp. 678-681, 2004.
- [5] C. W. Groetsch, *the Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Pitman, Boston, 1984.
- [6] C. T. H. Baker, *the Numerical Treatment of Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1977.
- [7] L. M. Delves and J. Walsh (Eds.), *Numerical Solution of Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1974.
- [8] L. M. Delves and J. L. Mohamed, *Computational Methods for Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985.
- [9] Hansen, Per Christian. "Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices."
- [10] Vogel, Curtis R. *Computational methods for inverse problems*. Vol. 10. Siam, 2002.
- [11] Cheney, E. Elliott Ward, and David Ronald Kincaid. *Numerical mathematics and computing*. Cengage Learning, 2012.
- [12] Hansen, Per Christian. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion*. Vol. 4. Siam, 1998.
- [13] Colin Fox, Geoff K. Nicholls, Sze M. Tan, "An Introduction To Inverse Problems", Course notes for ELEC 404, 2010 Edition.
- [14] A. N. Tikhonov & V. Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston & Sons, Washington, D.C., 1977.
- [15] Tian, Jing, and Kai-Kuang Ma. "A survey on super-resolution imaging." *Signal, Image and Video Processing* 5.3 (2011): 329-342.
- [16] R.Y. Tsai and T.S. Huang, "Multiple frame image restoration and registration," in *Advances in Computer Vision and Image Processing*. Greenwich, CT: JAI Press Inc., (1984): 317-339.
- [17] Ur, Hanoch, and Daniel Gross. "Improved resolution from subpixel shifted pictures." *CVGIP: Graphical Models and Image Processing* 54.2 (1992): 181-186.
- [18] Bose, Nirmal K., and Nilesh A. Ahuja. "Superresolution and noise filtering using moving least squares." *Image Processing, IEEE Transactions on* 15.8 (2006): 2239-2248.
- [19] Irani, Michal, and Shmuel Peleg. "Improving resolution by image registration." *CVGIP: Graphical models and image processing* 53.3 (1991): 231-239.
- [20] Patti, Andrew J., M. Ibrahim Sezan, and A. Murat Tekalp. "Superresolution video reconstruction with arbitrary sampling lattices and nonzero aperture time." *Image Processing, IEEE Transactions on* 6.8 (1997): 1064-1076.
- [21] Hertzmann, Aaron, et al. "Image analogies." *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. ACM, 2001.
- [22] Wang, Jinjun, Shenghuo Zhu, and Yihong Gong. "Resolution enhancement based on learning the sparse association of image patches." *Pattern Recognition Letters* 31.1 (2010): 1-10.
- [23] Kim, Kwang In, and Younghee Kwon. "Single-image super-resolution using sparse regression and natural image prior." *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on* 32.6 (2010): 1127-1133.
- [24] Yang, Jianchao, et al. "Image super-resolution via sparse representation." *Image*

- Processing, IEEE Transactions on 19.11 (2010): 2861-2873.
- [25] Tang, Yi, et al. "Greedy regression in sparse coding space for single-image super-resolution." Journal of Visual Communication and Image Representation 24.2 (2013): 148-159.
- [26] Farsiu, Sina, et al. "Advances and challenges in super-resolution." International Journal of Imaging Systems and Technology 14.2 (2004): 47-57.
- [27] M. Elad, A. Feuer. "Restoration of single super-resolution image from several blurred, noisy and down-sampled measured images" IEEE Trans. Image Process 6(1997): 1646 – 1658
- [28] Borman, Sean, Mark Robertson, and Robert L. Stevenson. "Block-matching sub-pixel motion estimation from noisy, under-sampled frames-an empirical performance evaluation." SPIE Visual Communications and Image Processing. Vol. 3653. No. 2. 1999.
- [29] Tekalp, A. Murat, and A. Murat Tekalp. *Digital video processing*. Vol. 1. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1995.
- [30] Keren, Danny, Shmnel Peleg, and Ran Brada. "Image sequence enhancement using sub-pixel displacements." Computer Vision and Pattern Recognition, 1988. Proceedings CVPR'88., Computer Society Conference on. IEEE, 1988.
- [31] Irani, Michal, and Shmuel Peleg. "Motion analysis for image enhancement: Resolution, occlusion, and transparency." Journal of Visual Communication and Image Representation 4.4 (1993): 324-335.
- [32] Cheeseman, Peter, et al. "Super-resolved surface reconstruction from multiple images." Maximum Entropy and Bayesian Methods. Springer Netherlands, 1996. 293-308.
- [33] Baker, Simon, and Iain Matthews. "Lucas-kanade 20 years on: A unifying framework." International Journal of Computer Vision 56.3 (2004): 221-255.
- [34] Capel, David. *Image mosaicing and super-resolution*. Springer, 2004.
- [35] Capel, David, and Andrew Zisserman. "Computer vision applied to super resolution." Signal Processing Magazine, IEEE 20.3 (2003): 75-86.
- [36] Lim, Douglas. *Achieving accurate image registration as the basis for super-resolution*. Diss. Master Thesis, The School of Computer Science and Software Engineering, The University of Western Australia, 2003.
- [37] Šroubek, F., and Jan Flusser. "Resolution enhancement via probabilistic deconvolution of multiple degraded images." Pattern Recognition Letters 27.4 (2006): 287-293.
- [38] Tom, Brian C., and Aggelos K. Katsaggelos. "Reconstruction of a high resolution image from multiple degraded mis-registered low resolution images." Proc. SPIE. Vol. 2308. 1994.
- [39] Tom, Brian C., and Aggelos K. Katsaggelos. "Reconstruction of a high-resolution image by simultaneous registration, restoration, and interpolation of low-resolution images." Image Processing, 1995. Proceedings., International Conference on. Vol. 2. IEEE, 1995.
- [40] Andrieu, Christophe, et al. "An introduction to MCMC for machine learning." Machine learning 50.1-2 (2003): 5-43.
- [41] Trefethen, Lloyd N., and David Bau III. *Numerical linear algebra*. Vol. 50. Siam, 1997.
- [42] Bishop, Christopher M. *Pattern recognition and machine learning*. Vol. 1. New York: springer, 2006.